Lambacher Schweizer

Mathematik **Qualifikationsphase**

Leistungskurs/ Grundkurs

Nordrhein-Westfalen

erarbeitet von

Dr. Dieter Brandt
Wiebke Bucholzki
Inga Giersemehl
Thomas Jörgens
Thorsten Jürgensen-Engl
Judith Lohmann
Dr. Wolfgang Riemer
Heike Spielmans
Raphaela Sonntag
Anna Stump

Ernst Klett Verlag
Stuttgart · Leipzig · Dortmund

I Fortsetzung der Differenzialrechnung

Check-in 6

Erkundungen 8

1 Wiederholung: Funktionen untersuchen 10
■ 2 Substitution 14
3 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen 16
4 Ganzrationale Funktionen bestimmen 20
5 Funktionen mit Parametern untersuchen 24
6 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion 29
7 Potenzfunktionen ableiten 33
Klausurtraining 38
Rückblick 42
Probeklausur 43
Exkursion: Ortskurven 46

II Integralrechnung

Check-in 48

Erkundungen 50

1 Rekonstruktion einer Größe 52
2 Das Integral 56
3 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 62
4 Regeln zur Bestimmung von Stammfunktionen 68
5 Integral und Flächeninhalt 73
■ 6 Unbegrenzte Flächen – uneigentliche Integrale 78
■ 7 Volumen von Rotationskörpern 81
Klausurtraining 85
Rückblick 90
Probeklausur 91
Exkursion: Mittelwerte von Funktionen 94

III Exponentialfunktionen

Check-in 96

Erkundungen 98

1 Wiederholung: Exponentialfunktionen 100
2 Die natürliche Exponentialfunktion 104
3 Transformierte Exponentialfunktionen untersuchen 108
■ 4 Ableitung beliebiger Exponentialfunktionen 112
5 Begrenztes Wachstum 116
■ 6 Die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion 120
Klausurtraining 124
Rückblick 128
Probeklausur 129
Exkursion: Differenzialgleichungen 132

■ ausschließlich Leistungskursinhalte

IV Weitere Funktionen — Check-in 134

Erkundungen 136

1 Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion 138
2 Verkettung von Funktionen 143
3 Produktregel 147
■ 4 Kettenregel 151
5 Zusammengesetzte Funktionen untersuchen 155
6 Zusammengesetzte Funktionen im Kontext 160
Klausurtraining 165
Rückblick 170
Probeklausur 171
Exkursion: Trigonometrie trifft Differenzialrechnung: Die Sinusfunktion ableiten 174

V Vektoren, Geraden und Winkel — Check-in 176

Erkundungen 178

1 Wiederholung: Geraden und Lagebeziehungen 180
2 Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt 186
3 Winkel und Schnittwinkel 191
Klausurtraining 196
Rückblick 200
Probeklausur 201
Exkursion: Das Vektorprodukt 204

VI Ebenen — Check-in 206

Erkundungen 208

1 Der Gauß-Algorithmus 210
■ 2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme 214
3 Ebenen im Raum – die Parameterform 219
4 Koordinatenform und Normalenvektor 223
5 Schnittwinkel und Schnittpunkte 227
6 Geometrische Objekte im Raum 231
Klausurtraining 236
Rückblick 240
Probeklausur 241
Exkursion: Schrägbilder – Eine Darstellung räumlicher Objekte in einer Ebene (Projektion) 244

■ ausschließlich Leistungskursinhalte

VII Lagebeziehungen und Abstände

Check-in 246

Erkundungen 248

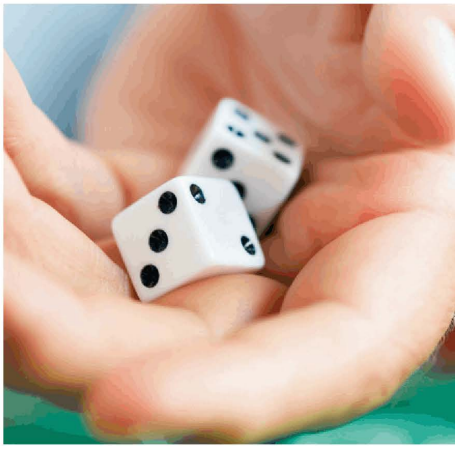
1 Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen 250
2 Abstand eines Punktes von einer Ebene 256
3 Abstand eines Punktes von einer Geraden 261
4 Abstand zwischen Geraden 265
5 Abstandsberechnungen in Kontexten 269
Klausurtraining 274
Rückblick 278
Probeklausur 279
Exkursion: Geometrie in Gleichungssystemen 282

VIII Daten und Wahrscheinlichkeit

Check-in 284

Erkundungen 286

1 Wiederholung: Wahrscheinlichkeit 288
2 Verknüpfen von Ereignissen 293
3 Bedingte Wahrscheinlichkeit – stochastische Unabhängigkeit 297
4 Simulationen 301
5 Daten erheben und mit Kenngrößen beschreiben 305
6 Zufallsgrößen – Erwartungswert und Standardabweichung 310
Klausurtraining 314
Rückblick 318
Probeklausur 319
Exkursion: Stochastische Prozesse 322



IX Binomialverteilung

Check-in 324

Erkundungen 326

1 Bernoulli-Experimente, Binomialverteilung 328
2 Binomialkoeffizienten 332
3 Erwartungswert und Histogramme 335
4 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten 339
5 Standardabweichung 343
6 Probleme lösen mit der Binomialverteilung 346
Klausurtraining 350
Rückblick 354
Probeklausur 355
Exkursion: Optimal entscheiden 358

□ X Prognose- und Konfidenzintervalle Check-in 360

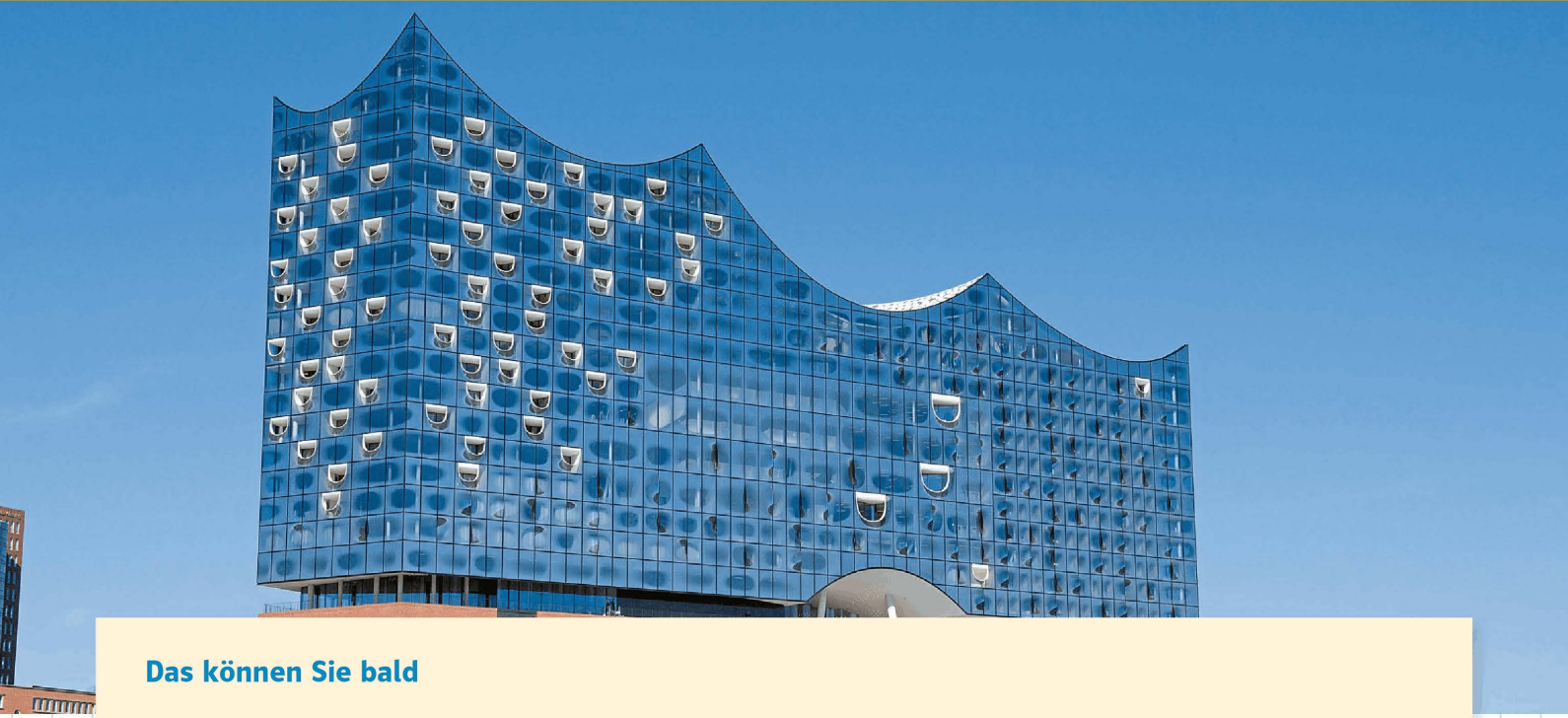
- Erkundungen 362

- 1 Prognoseintervalle für absolute Häufigkeiten 364
- 2 Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten 368
- 3 Konfidenzintervalle 372
- 4 Stichprobenumfang schätzen 377
- 5 Normalverteilung 380
- Klausurtraining 386
- Rückblick 390
- Probeklausur 391
- Exkursion: Der rotierende Penny und die Konfidenzintervalle 394
- Exkursion: Die Normalverteilung und Normal-Quantil-Plots 395

ANHANG Nachschlagen und Überprüfen

Prüfungsvorbereitung 396
Grundwissen 409
Lösungen zu den Kapiteln 423
Lösungen zum Grundwissen 535
Register 549
Text- und Bildquellenverzeichnis 552
Mathematische Begriffe und Bezeichnungen

I Fortsetzung der Differenzialrechnung



Das können Sie bald

- biquadratische Gleichungen lösen
- Gleichungen ganzrationaler Funktionen ermitteln
- Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen lösen
- Funktionen mit Parametern untersuchen
- die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion deuten
- Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten untersuchen

Check-in

Schätzen Sie sich ein:

	☺	😐	☹
1. Ich kann Nullstellen einer ganzrationalen Funktion bestimmen.	☐	☐	☐
2. Ich kann die Gleichung der Ableitungsfunktion einer ganzrationalen Funktion bestimmen.	☐	☐	☐
3. Ich kann die Bedeutung der Ableitung im Sachzusammenhang beschreiben.	☐	☐	☐
4. Ich kann die Steigung und die Größe des Steigungswinkels einer Tangente bestimmen.	☐	☐	☐
5. Ich kann lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen lösen.	☐	☐	☐
6. Ich kann die Potenzgesetze anwenden.	☐	☐	☐

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen**, Seite 411
zu 2. **Grundwissen**, Seite 414
zu 3. **Grundwissen**, Seite 414
zu 4. **Grundwissen**, Seite 415
zu 5. **Grundwissen**, Seite 417
zu 6. **Grundwissen**, Seite 413

Test

Lösungen, Seite 423

1 **Nullstellen ganzrationaler Funktionen bestimmen**

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a) $f(x) = (3 - 2x)(5x + 15)$ **b)** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ **c)** $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$

d) $f(x) = x^2 - 12x + 36$ **e)** $f(x) = x^3 - 4x$ **f)** $f(x) = 5x^3 - 10x^2 + 5x$

2 **Ableitungsfunktion bestimmen**

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der ersten, zweiten und dritten Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{5}x - 2$ **c)** $f(x) = ax^4 - bx^2 + c$

3 **Bedeutung der Ableitungsfunktion im Sachzusammenhang beschreiben**

Beschreiben Sie jeweils, welche Bedeutung die Ableitungsfunktion f' im vorliegenden Sachzusammenhang hat.

a) f(t) gibt die Strecke in km an, die ein Auto innerhalb der Zeit t (in h) gefahren ist.

b) f(x) beschreibt das Höhenprofil einer Straße (x in m, f(x) in m).

4 **Steigung und Größe des Steigungswinkels einer Tangente bestimmen**

Bestimmen Sie die Steigung und die Größe des Steigungswinkels der Tangente an der Stelle x_0.

a) $f(x) = 0{,}75x^2 + 1;\ x_0 = 2$ **b)** $f(x) = 0{,}2x^2 - 0{,}5x + 2;\ x_0 = -2$

5 **Lineare Gleichungssysteme (LGS) lösen**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

a) I $8x + 4y = 20$ II $3x + 4y = 10$ **b)** I $x = 5y - 4$ II $7x - 4y = 3$ **c)** I $4a - 6b = -7$ II $-5a + 8b = 9{,}5$ **d)** I $-10a + 8b = 2$ II $30a + 2b = \frac{34}{3}$

6 **Potenzgesetze anwenden**

Gegeben ist $x \neq 0$. Notieren Sie den Term in der Form x^r.

a) $x^8 \cdot x^3$ **b)** $\frac{x^9}{x^5}$ **c)** $(x^{-2})^3$ **d)** $x^{-5} \cdot x^6$ **e)** $(\sqrt{x})^4$

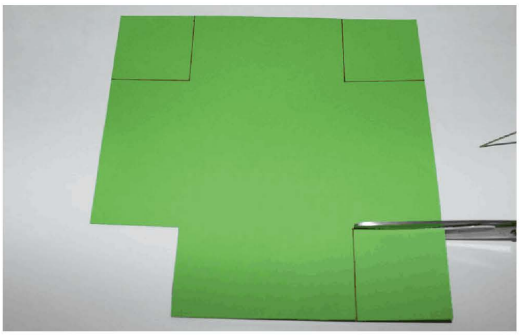
Eine möglichst große Schachtel basteln

Aus einem quadratischen Blatt mit den Maßen 20 cm × 20 cm soll eine nach oben offene Schachtel gebastelt werden, die ein möglichst großes Volumen hat. Hierzu werden an den Ecken jeweils Quadrate ausgeschnitten und dann vier Rechtecke nach oben geklappt.

→ Lerneinheit 3 Seite 16

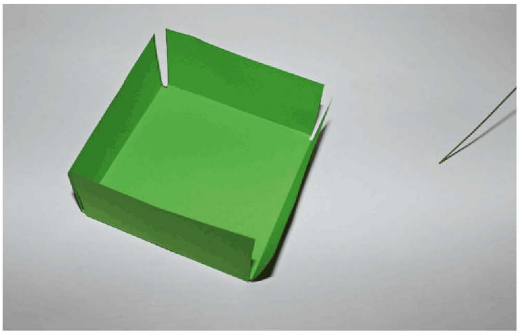
1. Ausprobieren

Nehmen Sie jeweils zu zweit ein Blatt Papier und schneiden Sie ein Quadrat mit den Maßen 20 cm × 20 cm aus. Überlegen Sie nun, welche Maße die Schachtel haben könnte, damit das Volumen möglichst groß ist. Schneiden Sie die Quadrate an den Ecken entsprechend aus, erstellen Sie die Schachtel und berechnen Sie das Volumen Ihrer Schachtel.



2. Ergebnisse vergleichen

Tragen Sie die Ergebnisse, die im Kurs berechnet wurden, zusammen. Vergleichen Sie Ihre Vorgehensweise.
Was vermuten Sie aufgrund der Ergebnisse: Welche Maße müssen die ausgeschnittenen Quadrate haben, damit das Volumen der Schachtel möglichst groß ist?



3. Volumen systematisch untersuchen

Untersuchen Sie systematisch, wie sich das Volumen entwickelt, wenn man die Seitenlänge des ausgeschnittenen Quadrats, also die Höhe der Schachtel, schrittweise erhöht. Erstellen Sie eine Tabelle wie in der Abbildung und stellen Sie den Zusammenhang zwischen der Höhe der Schachtel und dem Volumen grafisch dar.
Welche Vermutung über das maximale Volumen lässt sich aus dem Graphen ableiten?

Höhe der Schachtel	Seitenlänge der Grundfläche	Volumen der Schachtel

4. Untersuchung des Volumens mit einer Funktionsgleichung

Stellen Sie eine allgemeine Formel für das Volumen der Schachtel auf, bei der Quadrate mit der Seitenlänge x cm abgeschnitten werden. Berechnen Sie hiermit für welche abgeschnittenen Quadrate das Volumen der Schachtel maximal wird.

5. Weiterdenken

Wie findet man das größte Schachtelvolumen, wenn man statt des quadratischen Blatts ein rechteckiges Blatt mit den Maßen 20 cm × 30 cm verwenden würde?
Stellen Sie eine Vermutung auf und begründen Sie diese.
Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse und Begründungen innerhalb des Kurses.

Funktionsgleichungen bestimmen

Lerneinheit 4
Seite 20

D3 **Dokument**
Steckbriefe
zum Ausdrucken

1. Wer findet am schnellsten die Gleichungen?

Bilden Sie Gruppen mit mindestens vier Personen.
In jeder Gruppe spielen nun zwei Teams gegeneinander. Jedes Team versucht, innerhalb einer vereinbarten Zeit, möglichst viele der gesuchten Funktionsgleichungen zu finden.

2. Sieger des Wettbewerbs ermitteln

Präsentieren Sie sich innerhalb Ihrer Gruppe gegenseitig die gefundenen Funktionsgleichungen.
Kontrollieren Sie mit einem MMS, ob die Bedingungen für die gefundenen Funktionsgleichungen jeweils erfüllt sind.
Das Team, das am Ende in der Summe die höchste Belohnung erreicht, gewinnt.

3. Auswertung des Wettbewerbs

a) Vergleichen Sie im Kurs, wie Sie die Funktionsgleichungen gefunden haben.
b) Erstellen Sie eine Anleitung zum Bestimmen der Funktionsgleichungen. Gibt es mehrere Möglichkeiten? Diskutieren Sie.
c) Überlegen Sie in Kleingruppen: Würden Sie die gleichen Preisgelder aussetzen oder andere? Begründen Sie.

4. Weitere Rätsel erfinden

a) Zeichnen Sie den Graphen einer selbst gewählten rationalen Funktion maximal dritten Grades mit einem MMS und formulieren Sie ein Rätsel zum Aufstellen der Funktionsgleichung. Achten Sie darauf, dass die Informationen zur Bestimmung der Funktionsgleichung ausreichen.
b) Prüfen Sie gegenseitig, ob Ihre Rätsel eindeutig lösbar sind.
c) Überlegen Sie in Kleingruppen: Welche Informationen reichen aus, damit man die Gleichung einer quadratischen Funktion bzw. einer Funktion dritten Grades eindeutig aufstellen kann? Begründen Sie.

1 Wiederholung: Funktionen untersuchen

Erklären Sie sich gegenseitig die Begriffe auf den Kärtchen. Klären Sie offene Fragen in der Gruppe.

Strukturieren Sie die Begriffe und stellen Sie diese z. B. in Form eines Clusters dar. Stellen Sie sich Ihre Ergebnisse vor und erläutern Sie, warum Sie die Begriffe so angeordnet haben.

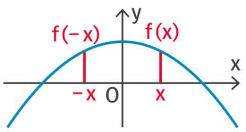
Hochpunkt | erste Ableitung | Achsensymmetrie | Nullstelle | Tangente | Krümmung | Wendepunkt | Punktsymmetrie | zweite Ableitung | Monotonie | Sattelpunkt | Tiefpunkt | y-Achsenabschnitt | Steigung | Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Mithilfe der Gleichung einer Funktion lassen sich charakteristische Punkte und Eigenschaften ihres Graphen ermitteln. Im Folgenden werden bereits kennengelernte Verfahren der Funktionsuntersuchung wiederholt und zusammengefasst.

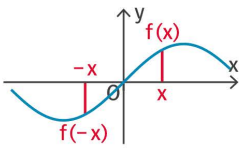
Die Tabelle zeigt, welche Bedingungen man prüfen muss, um auf die Eigenschaften einer Funktion f und ihres Graphen zu schließen.

Bedingung	Eigenschaft der Funktion	Eigenschaft des Graphen
$f(-x) = f(x)$ Bei ganzrationalen Funktionen treten nur gerade Potenzen von x im Funktionsterm auf.	Die Funktionswerte von $-x$ und x sind gleich.	**Achsensymmetrie** zur y-Achse
$f(-x) = -f(x)$ Bei ganzrationalen Funktionen treten nur ungerade Potenzen von x im Funktionsterm auf.	Die Funktionswerte von $-x$ und x unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.	**Punktsymmetrie** zum Koordinatenursprung
$f(x_0) = 0$	x_0 ist eine **Nullstelle**.	$N(x_0 \mid 0)$ ist ein **Schnittpunkt mit der x-Achse**.
$f(0) = y_0$	y_0 ist der Funktionswert an der Stelle 0.	$P(0 \mid y_0)$ ist ein **Schnittpunkt mit der y-Achse**.
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ *oder* $f'(x_0) = 0$ und f' hat an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von „+“ nach „–“.	x_0 ist eine **Extremstelle**. $f(x_0)$ ist ein **lokales Maximum**.	$H(x_0 \mid f(x_0))$ ist ein **Hochpunkt**.
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ *oder* $f'(x_0) = 0$ und f' hat an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von „–“ nach „+“.	x_0 ist eine **Extremstelle**. $f(x_0)$ ist ein **lokales Minimum**.	$T(x_0 \mid f(x_0))$ ist ein **Tiefpunkt**.
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ *oder* $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und f'' hat an der Stelle x_0 keinen Vorzeichenwechsel.	x_0 ist eine **Sattelstelle**.	$S(x_0 \mid f(x_0))$ ist ein **Sattelpunkt**.
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ *oder* $f''(x_0) = 0$ und f'' hat an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel.	x_0 ist eine **Wendestelle**.	$W(x_0 \mid f(x_0))$ ist ein **Wendepunkt**.

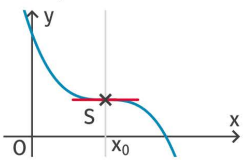
$f(-x) = f(x)$
Achsensymmetrie



$f(-x) = -f(x)$
Punktsymmetrie



$S(x_0 \mid f(x_0))$ ist ein Sattelpunkt



Bei einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ und $a_n \neq 0$ wird das Grenzverhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ vom Summanden $a_n x^n$ bestimmt.
Es gilt beispielsweise $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 + x^2 + x) = +\infty$, denn $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$.

Funktionen untersuchen und Funktionsgraphen skizzieren
Um eine Funktion und den Verlauf ihres Graphen zu untersuchen, sind folgende Aspekte hilfreich:
- Symmetrieverhalten
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
- Extrempunkte und Sattelpunkte
- Wendepunkte
- Verhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$

Beispiel 1 Wendestellen einer ganzrationalen Funktion bestimmen

Berechnen Sie die Wendestellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{2}x^5 - 10x^4 + 20x^3$.

Lösung

$f'(x) = \frac{15}{2}x^4 - 40x^3 + 60x^2$; $f''(x) = 30x^3 - 120x^2 + 120x$ und $f'''(x) = 90x^2 - 240x + 120$

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 30x^3 - 120x^2 + 120x &= 0 \quad | : 30 \\ x^3 - 4x^2 + 4x &= 0 \quad | \text{ x ausklammern} \\ x(x^2 - 4x + 4) &= 0 \quad | \text{ binomische Formel} \\ x(x-2)^2 &= 0 \\ x_1 = 0 \text{ und } x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen prüfen:
Es gilt $f'''(0) = 120 \neq 0$.
Da $f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$ ist, ist $x_1 = 0$ eine Wendestelle von f.
Es gilt $f'''(2) = 90 \cdot 2^2 - 240 \cdot 2 + 120 = 360 - 480 + 120 = 0$.
Daher muss untersucht werden, ob f'' an der Stelle $x_2 = 2$ einen Vorzeichenwechsel hat.
Man setzt für x Zahlen in f''(x) ein, mit denen man schnell und sicher rechnen kann, beispielsweise $x = 1$ für $0 < x < 2$ und $x = 10$ für $x > 2$:
$f''(1) = 30 \cdot 1^3 - 120 \cdot 1^2 + 120 \cdot 1 = 30 - 120 + 120 = 30 > 0$
$f''(10) = 30 \cdot 10^3 - 120 \cdot 10^2 + 120 \cdot 10 = 30\,000 - 12\,000 + 1200 = 19\,200 > 0$
Es gibt keinen Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an der Stelle $x_2 = 2$, die Stelle $x_2 = 2$ ist also keine Wendestelle. Die einzige Wendestelle von f ist $x_1 = 0$.

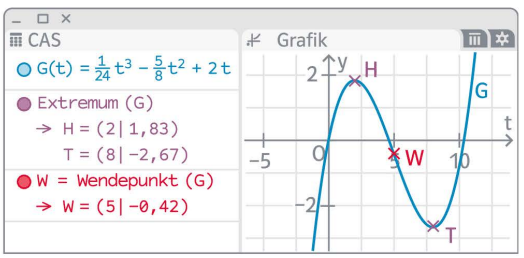
Beispiel 2 Funktionen untersuchen und im Sachzusammenhang deuten

Die Funktion G mit $G(t) = \frac{1}{24}t^3 - \frac{5}{8}t^2 + 2t$ wird zur Beschreibung des Gewinns eines Unternehmens im Jahr 2024 genutzt ($t \in [0; 12]$ in Monaten nach Jahresbeginn, G(t) in 10 000 €).

a) Ermitteln Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen sowie die globalen Extrema von G.
b) Deuten Sie die in Teilaufgabe a) ermittelten Werte im Sachkontext.

Lösung

a) Mit einem MMS erhält man den Hochpunkt H(2 | 1,83), den Tiefpunkt T(8 | −2,67) und den Wendepunkt W(5 | −0,42) des Graphen von G.
Mit $G(0) = 0$ und $G(12) = 6$ folgt:
$G_1 = -2{,}67$ ist das globale Minimum und $G_2 = 6$ ist das globale Maximum von G im Intervall $[0; 12]$.



b) Der Gewinn wird laut Modell Ende Februar vorrübergehend maximal mit 18 300 €. Der maximale Gewinn wird laut Modell Ende Dezember mit 60 000 € erreicht, der maximale Verlust beträgt 26 700 € und wird Ende August erreicht.
Eine Wendestelle von G ist eine Extremstelle von G'.
Ende Mai nimmt der Gewinn am stärksten ab.

Die Funktion kann auch ohne ein MMS mithilfe der Ableitungen untersucht werden.

D1 **MMS-Anleitung** Eigenschaften von Funktionen und ihren Graphen

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ b) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 9x$

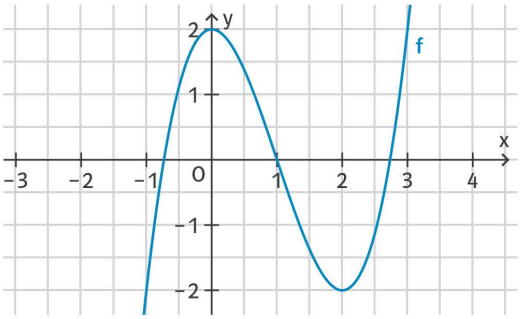
2 Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen von f.

a) $f(x) = x^4 - 6x^2$ b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ c) $f(x) = 0{,}6x^5 - 2x^4$

Lerntipp
Seite 11, Beispiel 1

3 **Wahr oder falsch?**
Gegeben ist der Graph der Funktion f.
Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) $f'(1) = 0$
b) $f'(2) = 0$
c) $f''(2) > 0$
d) $f(2) = 0$
e) $f''(1) = 0$
f) $f''(0) > 0$



4 Die Funktion f beschreibt die Höhe einer Sonnenblume (in m) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Wochen). Formulieren Sie die Aussage mithilfe der Funktion f.

a) Nach zwei Wochen ist die Sonnenblume 0,3 m hoch.
b) Nach 20 Wochen wächst die Sonnenblume nicht mehr.
c) In den ersten fünf Wochen wächst die Sonnenblume um 0,6 m.
d) Die Wachstumsgeschwindigkeit ist nach acht Wochen am höchsten.

Test 1

Lösungen, Seite 424

5 Bestimmen Sie die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f.

a) $f(x) = x^3 - 12x$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ c) $f(x) = -x^3 + 6x^2$

6 Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen von f.

a) $f(x) = x^3 + 6x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$ c) $f(x) = x^5$

7 Gegeben sind die Funktionsgleichungen der Funktionen f, g und h.

$f(x) = x^3 - 3x^2$ $g(x) = x \cdot (x^2 - 4)$ $h(x) = 4x^4 - 4x^2$

a) Untersuchen Sie, ob die Graphen von f, g und h achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung sind.
b) Ermitteln Sie das Grenzverhalten von f, g und h für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.
c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f, g und h mit den Koordinatenachsen sowie alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
d) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f, g und h anhand der bisherigen Ergebnisse. Bestimmen Sie hierzu notwendige Näherungswerte.
e) Kontrollieren Sie Ihre Graphen aus Teilaufgabe d) mithilfe eines MMS.

8 Ein Herd wird zum Backen vorgeheizt, bis er die vorgesehene Endtemperatur erreicht hat. Die Temperatur im Herd in Abhängigkeit von der Zeit t kann durch die Funktion T beschrieben werden ($T(t)$ in °C, t in min). Es gelten die Gleichungen $T(5) = 180$ und $T'(2) = 30$.

a) Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Gleichungen im Sachzusammenhang.
b) Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von T.

Lerntipp
Seite 11, Beispiel 2

◒ **9** Der Geldbetrag auf dem Konto einer Firma soll für $0{,}5 \le t \le 5$ durch die Funktion f mit $f(t) = -0{,}75t^3 + 6{,}75t^2 - 18t + 17$ (t in Wochen, $f(t)$ in 1000 €) modelliert werden.

a) Berechnen Sie den höchsten und den tiefsten Kontostand, mit dem laut Modell im angegebenen Zeitraum zu rechnen ist.

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem der Kontostand laut Modell am stärksten zunimmt.

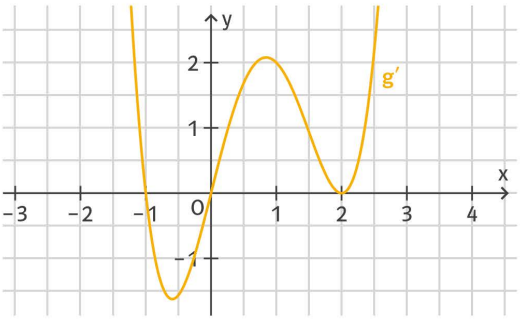
◒ **10** **Wahr oder falsch?**

Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion g' einer Funktion g. Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) g hat an der Stelle $x_1 = 0$ ein Maximum.

b) Der Graph von g hat an der Stelle $x_2 = 2$ einen Sattelpunkt.

c) Der Graph von g hat im Intervall $[-1; 2{,}5]$ genau 3 Wendepunkte.



◒ **11** **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage über eine ganzrationale Funktion f immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Hat f den Grad 3, so hat der Funktionsgraph von f genau einen Wendepunkt.

b) Hat f den Grad 3, so gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) Die Anzahl der Extremstellen von f entspricht der Anzahl der Nullstellen von f'.

d) Der Grad von f' ist um 1 geringer als der von f.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 424

◒ **12** Forscher haben das Wachstum einer Bakterienkultur in einer Petrischale beobachtet. Die von Bakterien bedeckte Fläche wird im Zeitraum von 8 Uhr morgens bis 12 Uhr mittags des darauffolgenden Tages durch die Funktion A mit $A(t) = -0{,}005t^3 + 0{,}2t^2 + 0{,}9t + 1$ modelliert (t in h seit dem Beobachtungsbeginn um 8 Uhr morgens, $A(t)$ in cm^2).

a) Bestimmen Sie, welche Fläche laut Modell um 3 Uhr morgens von Bakterien bedeckt ist.

b) Ermitteln Sie, wann die Bakterienkultur laut Modell am schnellsten wächst. Geben Sie die maximale Wachstumsgeschwindigkeit an.

● **13** Der Längsschnitt einer Piste in einer Skihalle kann für $x \in [0; 250]$ näherungsweise durch die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{200\,000}x^3 + 0{,}002x^2 + 0{,}025x + 10$ beschrieben werden (x und $f(x)$ in m, wobei $x = 0$ dem unteren und $x = 250$ dem oberen Ende der Piste entspricht.).

a) Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels am oberen Ende der Piste.

b) Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung der Piste in %.

c) Die Skihallenbetreiber behaupten, dass die Piste eine Steigung von bis zu 29% hat. Prüfen Sie, ob die Betreiber recht haben.

d) Bestimmen Sie, an welcher Stelle die Steigung der Piste am niedrigsten ist.

Grundwissen Test

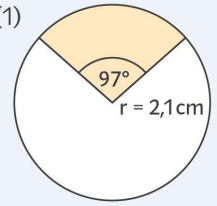
Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und Kreisteilen berechnen

→ **Grundwissen**, Seite 418
Lösungen, Seite 425

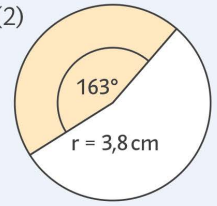
G **14** **a)** Berechnen Sie jeweils den Umfang und den Flächeninhalt der abgebildeten Kreise.

b) Berechnen Sie jeweils die Bogenlänge und den Flächeninhalt der farbig markierten Kreisausschnitte.

(1)

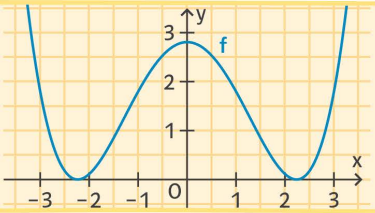


(2)



2 Substitution

Anna behauptet: „Die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 10x^2 + 25$ kann ich im Kopf ausrechnen. $f(x)$ kann nur dann null sein, wenn $x^2 = 5$ ist."
Bestätigen Sie, dass Annas Aussage zum Graphen passt.
Erläutern Sie, wie Anna ihre Aussage begründen könnte.



Bei der Bestimmung von Nullstellen ganzrationaler Funktionen vom Grad größer 2 ist man in der Regel auf ein MMS angewiesen. Für einige Spezialfälle kann man diese aber auch ohne Hilfsmittel bestimmen. Wenn der Funktionsterm als Produkt von Linearfaktoren vorliegt, lassen sich die Nullstellen beispielsweise unmittelbar ablesen. Einige Funktionsterme lassen sich durch Ausklammern in diese Form bringen, z. B. gilt $g(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$.
Im Folgenden wird gezeigt, wie man die Nullstellen von Funktionen mit Gleichungen der Form $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ berechnen kann.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x^4 - 16x^2 + 12$. Da im Funktionsterm nur die Potenzen x^2 und x^4 vorkommen, kann man x^2 und x^4 durch z und z^2 ersetzen. Hierdurch entsteht bei der Nullstellenberechnung eine quadratische Gleichung, die man mit der pq-Formel lösen kann.

$4x^4 - 16x^2 + 12 = 0$	| **Substitution**: $z = x^2$
$4z^2 - 16z + 12 = 0$	| : 4
$z^2 - 4z + 3 = 0$	| Verwenden der pq-Formel
$z_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm \sqrt{1} = 2 \pm 1$	
$z = 2 + 1 = 3$ oder $z = 2 - 1 = 1$	| **Rücksubstitution**: $x^2 = z$
$x^2 = 3$ oder $x^2 = 1$	| Wurzel ziehen
$x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$	

substituo (lat.): an die Stelle einer Sache setzen

Biquadratische Gleichungen mithilfe einer Substitution lösen
Gleichungen der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ werden **biquadratische Gleichungen** genannt. Sie lassen sich durch die **Substitution** $z = x^2$ in die quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ überführen. Aus den Lösungen für z erhält man durch die **Rücksubstitution** $x^2 = z$ die Lösungen für x.

Beispiel **Substitution zur Berechnung von Nullstellen nutzen**
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^5 + 7x^3 - 8x$.

Lösung

$x^5 + 7x^3 - 8x = 0$	| x ausklammern
$x \cdot (x^4 + 7x^2 - 8) = 0$	
$x = 0$ oder $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$	
Lösen der Gleichung $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$*:*	| Substitution $z = x^2$
$z^2 + 7z - 8 = 0$	| pq-Formel anwenden
$z_{1/2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 8} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}$	
$z = -\frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 1$ oder $z = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -8$	| Rücksubstitution $x^2 = z$
$x^2 = 1$ oder $x^2 = -8$	| Wurzel ziehen, falls möglich
$x = 1$ oder $x = -1$	

Die Nullstellen von f sind $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$.

$z = -8$ liefert keine Lösung für x, da x^2 nicht negativ werden kann.

Aufgaben

○ **1** Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mithilfe einer Substitution.

a) $f(x) = x^4 - 20x^2 + 64$ b) $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 90$ c) $f(x) = x^4 + x^2 - 2$

→ **Lerntipp** Seite 14, Beispiel

○ **2** Geben Sie mithilfe der Kärtchen eine mögliche Strategie zum Lösen der Gleichung an. Es können mehrere Schritte notwendig sein. Lösen Sie anschließend die Gleichung.

I Ausklammern | II binomische Formeln | III Ablesen von Nullstellen des Linearfaktors

IV Substitution | V Lösungsformel für quadratische Gleichungen | VI Rücksubstitution

a) $(x - 7)(x^4 + 2x^2 - 3) = 0$ b) $2x^5 - 40x^3 - 250x = 0$ c) $16x^6 - 40x^4 + 9x^2 = 0$

d) $(x^2 - 1)\left(x^4 - \frac{14}{3}x^2 + 5\right) = 0$ e) $(x^4 - 3x^2 - 54)\left(x + \frac{3}{8}\right) = 0$ f) $x^6 - 17x^4 + 16x^2 = 0$

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 425

○ **3** Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ **b)** $f(x) = x^5 - 10x^3 + 9x$ **c)** $f(x) = (x^4 - 9x^2 + 8)(x - 4)$

◒ **4** Pina behauptet: „Auch die Gleichung $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$ kann man mithilfe einer Substitution lösen, man muss einfach $z = x^3$ setzen."

a) Bestätigen Sie Pinas Behauptung und lösen Sie die Gleichung.

b) Lösen Sie die Gleichung $x^8 - 14x^4 - 32 = 0$ mithilfe einer geeigneten Substitution.

◒ **5** **Finden Sie den Fehler**

Lea löst die Gleichung $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$ mithilfe der Substitution $z = x^3$.
Erklären Sie, was Lea falsch gemacht hat, und notieren Sie die richtige Lösung.

$z^2 + 2z + 1 = 0$ | binomische Formel
$(z + 1)^2 = 0$
$z = -1$
Da z negativ ist, existiert keine Lösung für x.

◒ **6** **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Gegeben ist die Funktion f mit einer Funktionsgleichung der Form $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$. Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Die Anzahl der Nullstellen von f ist gerade.

b) Die Funktion f hat mindestens eine Nullstelle.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 425

◒ **7** Ali stellt fest: „Kennt man die Nullstellen der Funktion f, kann man die Nullstellen der Funktion g mit $g(t) = f(t + a)$ durch Substitution und Rücksubstitution bestimmen."
Bestätigen Sie Alis Aussage anhand der Funktion g mit $g(t) = (t + 1)^3 + (t + 1)^2 - 6(t + 1)$.

● **8** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^4 - 1)^2 + 2x^6$.

a) Stellen Sie eine begründete Vermutung auf, wie viele Extrempunkte der Graph von f hat.

b) Überprüfen Sie Ihre Vermutung aus Teilaufgabe a) rechnerisch.

Grundwissen Test **Größe von Mittelpunktswinkeln von Kreisteilen berechnen**

→ **Grundwissen**, Seite 418
Lösungen, Seite 425

G **9** Berechnen Sie die Größe des Mittelpunktswinkels α des Kreisausschnitts mit dem Radius r = 5,6 cm.

a) Bogenlänge b = 17,8 cm **b)** Inhalt des Kreisausschnitts $A = 24{,}9\,\text{cm}^2$

3 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Mit einem 30 m langen Zaun soll ein rechteckiges Gehege gebaut werden. Man kann den Zaun so aufstellen, dass eine Seite durch eine Hauswand begrenzt wird.
Wie würden Sie die Maße des Geheges wählen? Begründen Sie.

In vielen Anwendungssituationen wird ein Maximum oder Minimum einer Größe gesucht. Wie man Extrema einer Funktion bestimmt, wurde bereits thematisiert. Im Folgenden geht es um Probleme, bei denen die zu untersuchende Größe von mehreren anderen Größen abhängt.

Gesucht ist ein möglichst großes Rechteck, das man aus einem gegebenen dreieckigen Stück Papier herausschneiden kann (Fig. 1). Der Flächeninhalt A des Rechtecks hängt von zwei Größen ab: $A = a \cdot b$ (a = Breite des Rechtecks in dm, b = Länge des Rechtecks in dm)

Geeignete Funktion A ermitteln

Um das Maximum des Flächeninhalts A zu erhalten, muss man eine Funktion für A finden, die nur von einer Variablen abhängt. In Fig. 2 erkennt man, dass der Eckpunkt $P(a\,|\,b)$ auf der Geraden durch die Punkte $Q(0\,|\,5)$ und $R(3\,|\,0)$ liegen muss. Diese hat den y-Achsenabschnitt $n = 5$ und die Steigung $m = \frac{0-5}{3-0} = -\frac{5}{3}$, also die Gleichung $y = -\frac{5}{3}x + 5$.

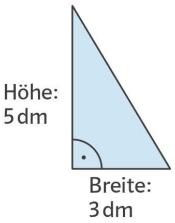


Fig. 1

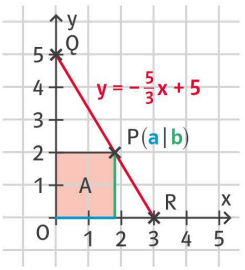


Fig. 2

Das Einsetzen der Koordinaten von P liefert $b = -\frac{5}{3}a + 5$ für $a \in [0; 3]$. Diese sogenannte **Nebenbedingung** beschreibt einen Zusammenhang zwischen a und b. Sie lässt sich daher zum Aufstellen der gesuchten Funktionsgleichung nutzen.
Hierzu setzt man den Term für b in die Formel für A ein: $A = a \cdot b = a \cdot \left(-\frac{5}{3}a + 5\right) = -\frac{5}{3}a^2 + 5a$
Die Funktion A mit $A(a) = -\frac{5}{3}a^2 + 5a$ mit $D_A = [0; 3]$ nennt man auch **Zielfunktion**.

Globales Maximum der Funktion A berechnen

Ableitung: $A'(a) = -\frac{10}{3}a + 5$

Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$$\begin{aligned} -\tfrac{10}{3}a + 5 &= 0 && \mid -5 \\ -\tfrac{10}{3}a &= -5 && \mid : \left(-\tfrac{10}{3}\right) \\ a &= -5 \cdot \left(-\tfrac{3}{10}\right) = \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

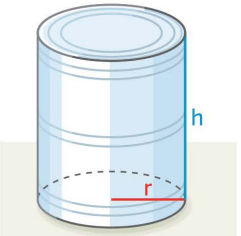
Da der Graph von A eine nach unten geöffnete Parabel ist, ist $A\left(\frac{3}{2}\right) = 3{,}75$ das globale Maximum im Intervall $[0; 3]$. Der maximale Flächeninhalt beträgt also 3,75 dm².

Strategie für das Lösen von Extremwertproblemen mit Nebenbedingung

1. Zu untersuchende Größe durch eine **Formel** beschreiben. Diese kann mehrere Variablen enthalten.
2. **Nebenbedingung** ermitteln, die eine Beziehung zwischen den Variablen beschreibt.
3. **Zielfunktion** ermitteln, die nur von einer Variablen abhängt. Definitionsbereich der Zielfunktion angeben.
4. Globales Minimum bzw. Maximum der Zielfunktion bestimmen. Dabei auf den Definitionsbereich und mögliche Randextrema achten.

Beispiel **Maße einer 1-Liter-Dose mit minimalem Oberflächeninhalt bestimmen**

Es sollen zylindrische Blechdosen mit Boden und Deckel mit einem Volumen von 1 Liter hergestellt werden. Dabei sollen der Radius und die Höhe der Dose so gewählt werden, dass die Oberfläche möglichst klein wird. Bestimmen Sie den minimalen Oberflächeninhalt der Dose und geben Sie den gesuchten Radius und die gesuchte Höhe an.



Lösung

1. *Die Oberfläche setzt sich aus der rechteckigen Mantelfläche und dem kreisförmigen Boden bzw. Deckel der Dose zusammen.* Für den Oberflächeninhalt O (in dm^2) gilt:
   $O = 2\pi rh + 2\pi r^2$ (r ist der Radius der Dose in dm, h ist die Höhe der Dose in dm.)
2. Es gilt $1\,l = 1\,dm^3$. Also erhält man als Nebenbedingung: $V = \pi r^2 h = 1 \quad | : \pi r^2$
   $$h = \frac{1}{\pi r^2}$$
3. Einsetzen der Nebenbedingung $h = \frac{1}{\pi r^2}$ in die Formel $O = 2\pi rh + 2\pi r^2$ liefert die Zielfunktion O mit $O(r) = 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$. Der Definitionsbereich ist $D_O =]0; +\infty[$.
4. Mit einem MMS erhält man $T(0{,}54\,|\,5{,}54)$ als einzigen lokalen Tiefpunkt des Graphen von O.
   Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs $D_O =]0; +\infty[$:
   Für $r \to 0$ strebt $\frac{2}{r} \to +\infty$ und $2\pi r^2 \to 0$.
   Für $r \to +\infty$ strebt $\frac{2}{r} \to 0$ und $2\pi r^2 \to +\infty$.
   Daraus folgt $\lim\limits_{r \to 0} O(r) = \lim\limits_{r \to +\infty} O(r) = +\infty$.
   Damit ist $r \approx 0{,}54$ die globale Minimalstelle und $O \approx 5{,}54$ das globale Minimum.
   In dieser Situation gilt $h = \frac{1}{\pi \cdot r^2} \approx 1{,}08$.

CAS

$O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{2}{r}$
→ $O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{2}{r}$

fMin(O(r), r)|r > 0
→ r = 0,541926

O(r)|r = 0,541926
→ 5,53581

$h = \frac{1}{\pi \cdot r^2}$|r = 0,541926
→ h = 1,08385

Der minimale Oberflächeninhalt der 1-Liter-Dose beträgt 5,54 dm^2. Hierzu muss der Radius der Dose 0,54 dm betragen und die Höhe 1,08 dm.

D1 **MMS-Anleitung** Eigenschaften von Funktionen und ihren Graphen

Aufgaben

○ **1** Gesucht ist eine Zerlegung der Zahl 12 in zwei nicht negative Summanden x und y, sodass das Produkt der beiden Summanden möglichst groß ist.
Bringen Sie die Lösungsschritte A bis E anhand des Merkzettels auf dem Rand in die passende Reihenfolge. Ergänzen Sie die nötigen Rechenschritte und formulieren Sie ein Fazit.

A $P(x) = 12x - x^2$

B $D_P = [0; 12]$

C $P = x \cdot y$

D Das gesuchte Maximum beträgt 36.

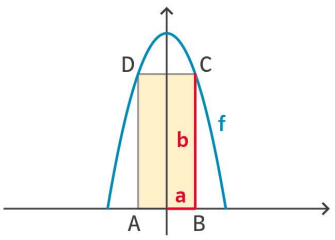
E $12 = x + y$

Extremwertaufgaben
- Formel notieren
- Nebenbedingung aufstellen
- Zielfunktion ermitteln
- Definitionsbereich angeben
- Extremum bestimmen

○ **2** Gesucht ist eine Zerlegung der Zahl 12 in zwei nicht negative Summanden x und y, bei der die Summe der Quadrate der beiden Summanden möglichst klein ist.
a) Zeigen Sie, dass $f(x) = 2x^2 - 24x + 144$ eine geeignete Zielfunktion ist.
b) Ermitteln Sie die gesuchte Zerlegung.

○ **3** Ein rechteckiges Grundstück mit den Seitenlängen a und b (jeweils in m) und dem Flächeninhalt 400 m^2 soll einen möglichst kleinen Umfang erhalten.
a) Ermitteln Sie eine Zielfunktion u für den Umfang des Rechtecks in m, die nur von der Seitenlänge a abhängt. Geben Sie die Definitionsmenge D_u an.
b) Bestimmen Sie, wie die Seitenlängen a und b zu wählen sind, damit der Umfang des Rechtecks möglichst klein wird. Geben Sie den minimalen Umfang an.

○ **4** Gegeben ist der Funktionsgraph der Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 9$.
Die Punkte $A(-a|0)$, $B(a|0)$, $C(a|f(a))$ und $D(-a|f(-a))$ bilden ein Rechteck.
Berechnen Sie, für welchen Wert von a der Umfang des Rechtecks maximal wird.



Test 1

→ **Lösungen**, Seite 425

○ **5** Aus einem Draht mit der Länge 50 cm soll eine möglichst große rechteckige Fläche mit den Seitenlängen a und b (jeweils in cm) umrandet werden.

a) Ermitteln Sie eine Zielfunktion A für den Flächeninhalt des Rechtecks in cm^2, die nur von der Seitenlänge a abhängt. Geben Sie die Definitionsmenge D_A an.

b) Bestimmen Sie, wie die Seitenlängen a und b zu wählen sind, damit der Flächeninhalt A möglichst groß wird. Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt.

◒ **6** Es sollen zylindrische Eimer ohne Deckel mit einem Volumen von 10 Litern hergestellt werden. Dabei sollen der Radius und die Höhe des Eimers so gewählt werden, dass die Oberfläche möglichst klein wird. Bestimmen Sie den minimalen Oberflächeninhalt des Eimers ohne Deckel und geben Sie den gesuchten Radius und die gesuchte Höhe an.

→ **Lerntipp**
Seite 17, Beispiel

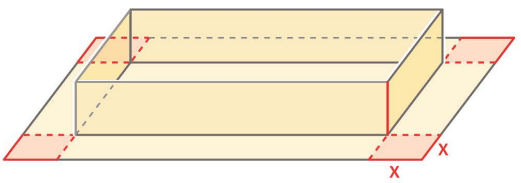
◒ **7** Die linke untere Ecke eines Rechtecks liegt im Ursprung des Koordinatensystems, die rechte obere Ecke soll auf dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = -3x + 1$ liegen. Die Seiten des Rechtecks liegen auf bzw. parallel zu den Koordinatenachsen.

a) Erstellen Sie eine geeignete Skizze zu dem Sachverhalt.

b) Gesucht ist das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt. Bestimmen Sie die Koordinaten der zugehörigen Eckpunkte und die Größe des Rechtecks.

◒ **8** Ermitteln Sie, welches Rechteck mit dem Umfang 30 cm die kürzeste Diagonale hat.

◒ **9** Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit der Länge 16 cm und der Breite 10 cm werden an den Ecken Quadrate der Seitenlänge x ausgeschnitten. Die überstehenden Teile werden zu einer nach oben offenen Schachtel hochgebogen. Ermitteln Sie, für welchen Wert von x das Volumen maximal wird.



◒ **10** Ein Unternehmen verkauft T-Shirts zum Preis von 15 € und macht dabei 8 € Gewinn pro T-Shirt. Bei diesem Preis verkauft das Unternehmen täglich 500 T-Shirts. Eine Marktuntersuchung hat ergeben, dass bei einer Preissenkung mehr T-Shirts verkauft werden könnten. Man geht davon aus, dass pro Euro Ermäßigung 80 T-Shirts mehr pro Tag verkauft würden.
Berechnen Sie, um wie viel Euro man den Preis reduzieren sollte, damit der Gewinn am größten ist.

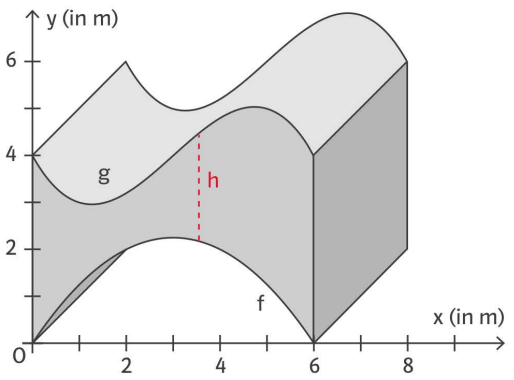
◒ **11** Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$ und $g(x) = 0{,}5x^2 - 2$ begrenzen eine Fläche, in der ein zur y-Achse symmetrisches Rechteck ABCD liegt. Die Punkte A und B liegen auf dem Graphen von g, die Punkte C und D auf dem Graphen von f.

a) Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der beiden Parabeln sowie deren Schnittpunkte und fertigen Sie eine Skizze mit den Parabeln und der Lage des Rechtecks an.

b) Das Rechteck soll einen möglichst großen Flächeninhalt haben. Beschriften Sie die Skizze und stellen Sie die Zielfunktion mithilfe der Funktionsgleichungen von f und g auf.

c) Berechnen Sie die Eckpunkte, für die der Flächeninhalt des Rechtecks am größten wird.

◒ **12** Der untere und obere Rand des Querschnitts eines 6 m langen Fertigteils aus Beton wird für $0 \le x \le 6$ durch die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$ und g mit $g(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{9}{10}x^2 - \frac{9}{5}x + 4$ modelliert (x, $f(x)$ und $g(x)$ jeweils in m).
Bestimmen Sie die Stellen, an denen die Höhe h des Betonteils minimal bzw. maximal ist. Berechnen Sie, wie hoch das Betonteil an diesen Stellen jeweils ist.



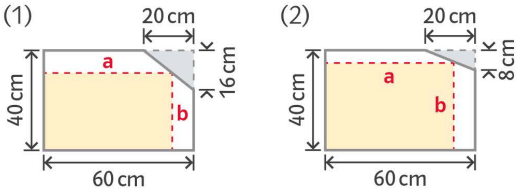
Test 2

→ **Lösungen**, Seite 426

◒ **13** Ein nach oben offener Karton mit quadratischer Grundfläche soll bei einer vorgegebenen Oberfläche von 100 cm^2 ein möglichst großes Volumen haben. Ermitteln Sie, wie die Maße des Kartons gewählt werden müssen, und geben Sie das maximale Volumen an.

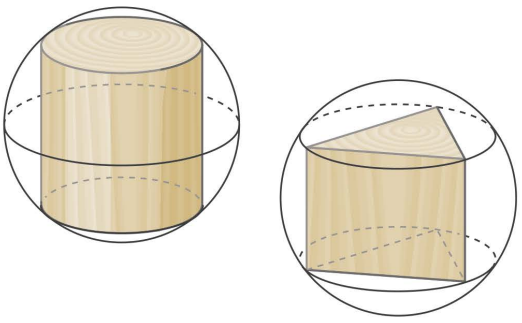
◒ **14** Eine Elektronikfirma verkauft monatlich 5000 Stück eines Bauteils zum Stückpreis von 25 €. Die Marktforschungsabteilung stellt fest, dass sich der durchschnittliche monatliche Absatz bei jeder Stückpreissenkung von 1 € um jeweils 300 Stück erhöhen würde. Ermitteln Sie, bei welchem Stückpreis die monatlichen Einnahmen dann am größten sind.

● **15** Die Abbildungen zeigen zwei rechteckige Glasplatten, aus denen jeweils eine dreieckige Fläche herausgebrochen ist. Aus dem Rest soll jeweils eine große rechteckige Glasplatte hergestellt werden.



a) Ermitteln Sie Zielfunktionen A_1 bzw. A_2 für die Flächeninhalte der Rechtecke in cm^2, die nur von der Variablen a abhängen. Bestimmen Sie die Definitionsmengen D_{A_1} bzw. D_{A_2}.
b) Bestimmen Sie, wie die Seitenlängen a und b jeweils zu wählen sind, damit der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß wird. Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

● **16** Eine Holzkugel mit dem Radius 1 dm soll so bearbeitet werden, dass ein Zylinder mit möglichst großem Volumen entsteht. Ermitteln Sie, wie der Radius r des Zylinders und seine Höhe h zu wählen sind.

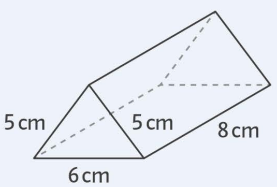


● **17** Einer Kugel mit dem Radius 1 dm wird ein gerades Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche einbeschrieben. Ermitteln Sie das maximale Prismavolumen.

Grundwissen Test — Größen eines Prismas berechnen

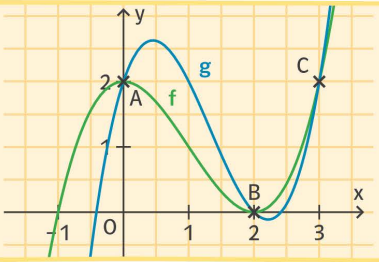
→ **Grundwissen**, Seite 419
Lösungen, Seite 426

G **18**
a) Berechnen Sie den Mantelflächeninhalt M, den Oberflächeninhalt O und das Volumen V des abgebildeten Prismas.
b) Ein zweites Prisma mit derselben Grundfläche hat den doppelten Oberflächeninhalt. Berechnen Sie seine Höhe.



4 Ganzrationale Funktionen bestimmen

Carla und Birol suchen eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph durch die Punkte A, B und C verläuft.
Carla findet: „Beide Funktionen passen!“
Birol antwortet:
„Es kann nur eine passende Funktion geben.“
Nehmen Sie dazu Stellung.



$g(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

Kennt man die Gleichung einer ganzrationalen Funktion, so kann man auf besondere Punkte des Graphen schließen und den Graphen skizzieren. Umgekehrt ist das häufig auch möglich:
Hat man genügend Informationen über den Graphen, so kann man daraus die Gleichung der ganzrationalen Funktion ermitteln. Im Folgenden wird gezeigt, wie man dabei vorgehen kann.

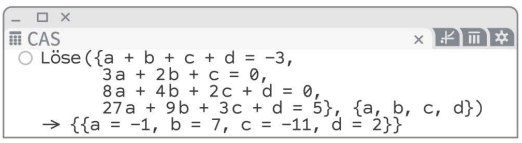
Gesucht ist eine ganzrationale Funktion f dritten Grades, deren Graph
- in $T(1|-3)$ einen Tiefpunkt hat,
- die x-Achse an der Stelle $x_0 = 2$ schneidet und
- durch den Punkt $B(3|5)$ verläuft.

Der Grad 3 der gesuchten Funktion f liefert den Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und damit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$.
Die Tabelle zeigt, wie man aus gegebenen Informationen ein Gleichungssystem aufstellt.

Eigenschaft des Graphen	Bedingung	Gleichung
$T(1\|-3)$ liegt auf dem Graphen.	$f(1) = -3$	$a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = -3$, also $a + b + c + d = -3$
$x = 1$ ist Extremstelle.	$f'(1) = 0$	$3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c = 0$, also $3a + 2b + c = 0$
$x_0 = 2$ ist Nullstelle.	$f(2) = 0$	$a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d = 0$, also $8a + 4b + 2c + d = 0$
$B(3\|5)$ liegt auf dem Graphen.	$f(3) = 5$	$a\cdot 3^3 + b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d = 5$, also $27a + 9b + 3c + d = 5$

Aus den aufgestellten Gleichungen ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

I $\quad a + b + c + d = -3$
II $\quad 3a + 2b + c = 0$
III $\quad 8a + 4b + 2c + d = 0$
IV $\quad 27a + 9b + 3c + d = 5$



Mit einem MMS erhält man für die Parameter $a = -1$, $b = 7$, $c = -11$ und $d = 2$.
Daher muss für die Funktionsgleichung von f gelten: $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 2$
Durch den gewählten Ansatz ist die notwendige Bedingung $f'(1) = 0$ für das Auftreten eines Tiefpunkts an der Stelle $x = 1$ erfüllt, eine hinreichende Bedingung für die Existenz des Tiefpunkts muss jedoch noch geprüft werden.
Es gilt $f'(x) = -3x^2 + 14x - 11$ und $f''(x) = -6x + 14$, also $f''(1) = -6\cdot 1 + 14 = 8 > 0$.
Damit sind alle Bedingungen für die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 2$ erfüllt.

Bestimmen einer ganzrationalen Funktion vorgegebenen Grades
1. Allgemeine Funktionsgleichung in der Form $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots$ notieren und ihre Ableitungen aufstellen
2. Gegebene Bedingungen mit f, f' und f'' formulieren und Gleichungen aufstellen
3. Lineares Gleichungssystem notieren und lösen
4. Funktionsgleichung angeben und kontrollieren

Beispiel **Symmetrie des Graphen zur Bestimmung der Funktionsgleichung verwenden**

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion f dritten Grades, deren Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist und in $H(1|2)$ einen Hochpunkt hat.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f.

Lösung

1. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$
2. Da der Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist, enthält die Funktionsgleichung von f nur ungerade Exponenten. Daher gilt $b = 0$ und $d = 0$, also $f(x) = ax^3 + cx$ und damit $f'(x) = 3ax^2 + c$ und $f''(x) = 6ax$.

Eigenschaften des Graphen	Bedingung	Gleichung
$H(1\|2)$ liegt auf dem Graphen.	$f(1) = 2$	$a \cdot 1^3 + c \cdot 1 = 2$, also $a + c = 2$
$x = 1$ ist Extremstelle.	$f'(1) = 0$	$3a \cdot 1^2 + c = 0$, also $3a + c = 0$

3. *ohne MMS*
Man erhält das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & a + c & = & 2 \quad \vert \cdot(-1) \\ \text{II} & 3a + c & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I}_a & -a - c & = & -2 \\ \text{II} & 3a + c & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I}_a + \text{II} & 2a & = & -2 \quad \vert : 2 \\ & a & = & -1 \end{array}$$

$a = -1$ in I: $-1 + c = 2 \quad \vert + 1$

$c = 3$

Man erhält die Funktionsgleichung $f(x) = -x^3 + 3x$.

mit MMS
Man erhält das Gleichungssystem:

I $a + c = 2$
II $3a + c = 0$

CAS
Löse({a + c = 2, 3a + c = 0}, {a, c})
→ {{a = −1, c = 3}}

Man erhält die Lösung $a = -1$, $c = 3$.

D1 **MMS-Anleitung** Gleichungssysteme

4. *Hinreichende Bedingung für die Existenz des Hochpunkts prüfen*
Für die Ableitungen gilt $f'(x) = -3x^2 + 3$ und $f''(x) = -6x$, also $f''(1) = -6 < 0$.
Die oben bestimmte Funktion f hat also tatsächlich den Hochpunkt $H(1|2)$.
Damit sind alle Bedingungen für die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x$ erfüllt.

Aufgaben

○ **1** Ordnen Sie den Aussagen A bis D die jeweils passenden Bedingungen (1) bis (8) so zu, dass die Situation vollständig beschrieben wird.

A Der Graph von f schneidet die y-Achse im Punkt $P(0|1{,}7)$.

B $x_0 = 1{,}7$ ist eine Nullstelle von f.

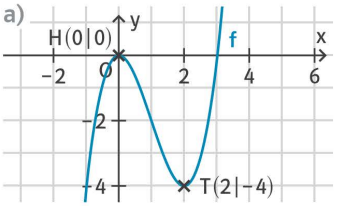
C $T(1|-7)$ ist Tiefpunkt des Graphen von f.

D $W(7|-1)$ ist Wendepunkt des Graphen von f.

(1) $f(7) = -1$ (2) $f'''(7) \neq 0$ (3) $f(1{,}7) = 0$ (4) $f(1) = -7$
(5) $f(0) = 1{,}7$ (6) $f'(1) = 0$ (7) $f''(7) = 0$ (8) $f''(1) > 0$

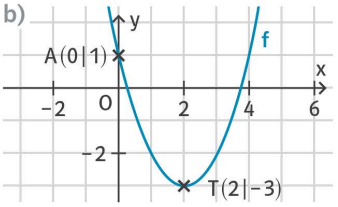
○ **2** Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion f.

a)



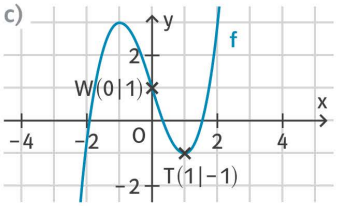
f ist vom Grad 3.

b)



f ist vom Grad 2.

c)



f ist vom Grad 3.

→ **Lerntipp** Seite 21, Beispiel

○ **3** Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion dritten Grades.

a) Der Graph hat im Koordinatenursprung eine waagerechte Tangente. Die Steigung der Tangente im Punkt $Q(-3|0)$ beträgt 6.

b) Der Punkt $P(1|4)$ ist ein Extrempunkt, der Punkt $Q(0|2)$ ein Wendepunkt des Graphen.

○ **4** Bestimmen Sie anhand der gegebenen Bedingungen eine Funktionsgleichung.

a) Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades verläuft durch die Punkte $A(1|-3)$, $B(2|-7)$, $C(3|-7)$ und $D(4|3)$.

b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat in $T(1|-1)$ einen Tiefpunkt und in $H(-1|3)$ einen Hochpunkt.

c) Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades verläuft durch die Punkte $A(-1|-4)$, $B(0|0)$, $C(1|-2)$, $D(2|-22)$ und $E(3|-96)$.

d) Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades hat im Punkt $T(2|-48)$ einen Tiefpunkt und verläuft durch die Punkte $A(0|0)$, $B(1|-31)$ und $C(3|-15)$.

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 426

○ **5** **a)** Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades, deren Graph durch $A(0|3)$, $B(1|1)$ und $C(2|-3)$ verläuft.

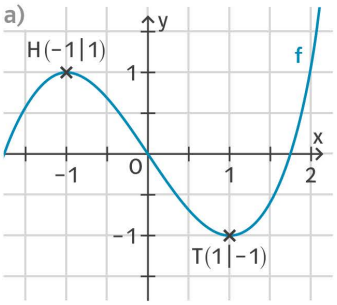
b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, deren Graph den Wendpunkt $W(0|2)$ und im Punkt $T(-1|0)$ einen Tiefpunkt hat.

c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, deren Graph durch die Punkte $A(-1|3)$, $B(0|-1)$, $C(1|-1)$ und $D(2|9)$ verläuft.

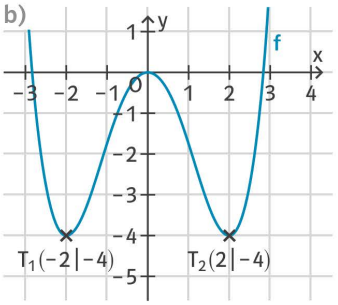
◒ **6** Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung. Überlegen Sie zunächst, welchen Grad die Funktion haben muss und welche Symmetrieeigenschaften Sie ausnutzen können.

→ **Lerntipp** Seite 21, Beispiel

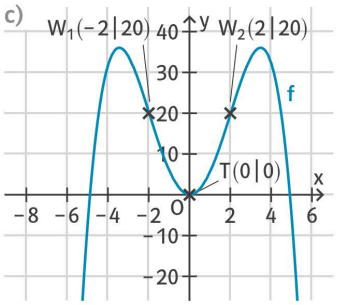
a)



b)



c)



◒ **7** Gesucht ist die Gleichung der ganzrationalen Funktion f dritten Grades anhand der folgenden Informationen: Der Graph von f verläuft durch den Koordinatenursprung und hat den Wendepunkt $W(1|-1)$. Die Gleichung der Wendetangente in W lautet $y = -2x + 1$.
Lynn erklärt ihre Lösungsstrategie: „Damit ich keine Gleichung vergesse, lese ich die Aufgabe dreimal. Beim ersten Lesen schreibe ich alle bekannten Funktionswerte $f(x)$ heraus, beim zweiten Lesen alle bekannten Steigungen $f'(x)$ und beim dritten Lesen die bekannten Krümmungen $f''(x)$." Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f nach Lynns Methode.

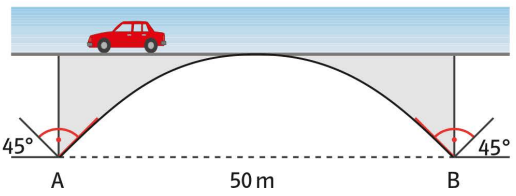
◒ **8** Überprüfen Sie, ob es eine ganzrationale Funktion dritten Grades gibt, deren Graph im Punkt $T(1|2)$ einen Tiefpunkt und im Punkt $W(0|0)$ einen Wendepunkt hat.

◒ **9** Bei einer Zirkusvorführung wird ein Ball unter einem Winkel der Größe 45° aus einer „Kanone" abgeschossen und landet in einem 15 m entfernten Wasserbehälter, der gegenüber der Kanonenöffnung 3,75 m höher steht.

a) Bestimmen Sie eine geeignete Funktion, welche die parabelförmige Flugbahn beschreibt.

b) Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Vorführung in einem 6 m hohen Saal stattfinden kann.

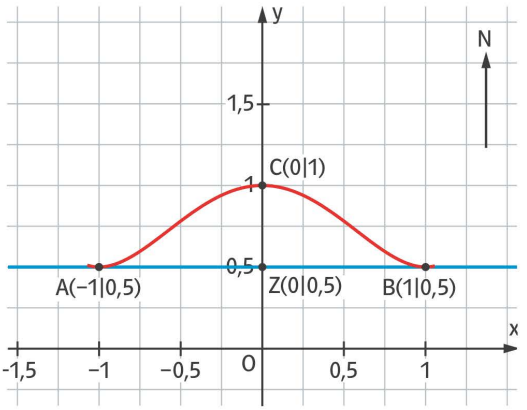
◒ **10** Ein Brückenbogen überspannt einen 50 m breiten Geländeeinschnitt. In A und B setzt der Brückenbogen senkrecht an den Böschungen auf. Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion zweiten Grades und berechnen Sie die Höhe des Brückenbogens.



Test 2

→ **Lösungen**, Seite 427

◒ **11** In der Abbildung ist schematisch der Verlauf einer geplanten Umgehungsstraße dargestellt (eine Längeneinheit entspricht 1 km). Die Hauptstraße verläuft geradlinig durch die Punkte A und B sowie durch das Dorfzentrum Z. Die Umgehungsstraße soll in den Punkten A und B tangential in die Hauptstraße münden und nördlich des Dorfzentrums Z durch den Punkt C verlaufen. Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion vierten Grades, die den Verlauf der Umgehungsstraße für $-1 \le x \le 1$ beschreiben könnte.



● **12** Zeigen Sie, dass es genau zwei ganzrationale Funktionen vierten Grades mit den folgenden Eigenschaften gibt: Der zugehörige Funktionsgraph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, hat in $W(1\,|\,0)$ einen Wendepunkt und die beiden Wendetangenten schneiden sich senkrecht.

● **13** Zwischen zwei geradlinig verlaufenden Teilstücken einer Wasserstoffpipeline soll eine Verbindung gebaut werden. In einem geeigneten Koordinatensystem lassen sich die Teilstücke durch Geraden mit den Gleichungen $y = -\frac{1}{2}x$ für $x \le 2$ bzw. durch $y = 2x - 13$ für $x \ge 7$ darstellen.

a) Ermitteln Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, mit der der Verlauf des Verbindungsstücks modelliert werden kann. Berücksichtigen Sie dabei, dass die Pipelines ohne Knick ineinander übergehen sollen.

b) Bestimmen Sie die Länge des fehlenden Teilstücks näherungsweise, indem Sie den Graphen der berechneten ganzrationalen Funktion durch mehrere Geradenstücke annähern.

● **14** Die Temperatur an der Oberfläche eines Biotops wird im Verlauf eines Tages gemessen. Um 0 Uhr beträgt die Temperatur an der Oberfläche 19 °C. Die niedrigste Tagestemperatur wird um 6 Uhr mit 17,8 °C gemessen, die höchste um 17 Uhr. Auf Grundlage der Messergebnisse soll der Temperaturverlauf mithilfe einer ganzrationalen Modellfunktion f dritten Grades beschrieben werden, wobei die Funktionsvariable $t \in [0; 24]$ die Uhrzeit (in h) angibt.

a) Ermitteln Sie eine mögliche Funktionsgleichung von f. Erläutern Sie Ihren Ansatz.

b) Ermitteln Sie die Temperatur, mit der dem Modell zufolge zur Mittagszeit zu rechnen ist.

c) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Temperatur laut Modell am stärksten steigt.

d) Geben Sie $f'(22)$ an. Beschreiben Sie die Bedeutung des Werts im Sachkontext.

Grundwissen Test **Größen eines Zylinders berechnen**

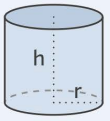
→ **Grundwissen**, Seite 419
Lösungen, Seite 427

G **15** Berechnen Sie das Volumen V, den Mantelflächeninhalt M und den Oberflächeninhalt O des Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h.

a) r = 7 cm; h = 15 cm

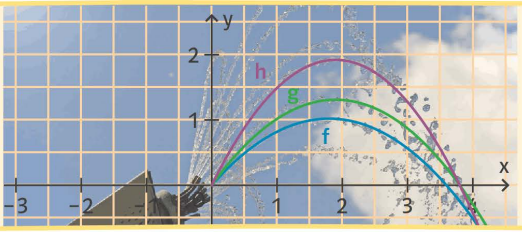
b) r = 2,3 dm; h = 8,6 dm

c) r = 9 cm; h = 2 dm



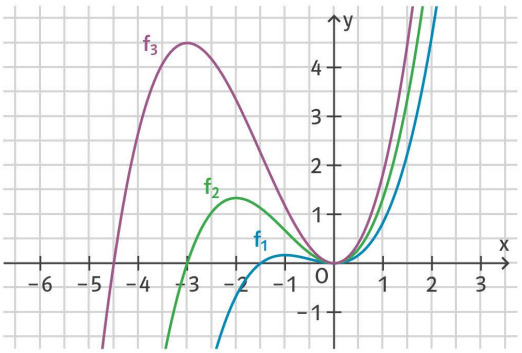
5 Funktionen mit Parametern untersuchen

Die abgebildeten Graphen sollen zur Beschreibung der Wasserfontäne eines Brunnens verwendet werden.
Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen.



Nach der Untersuchung ganzrationaler Funktionen soll nun erforscht werden, wie sich die Graphen von Funktionen verändern, wenn man die Funktionsgleichung variiert.

Die Abbildung zeigt die Graphen mehrerer Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2$ und $a > 0$.
Die zugehörigen Funktionsgleichungen sind:
$f_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$,
$f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$,
$f_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$.
Man spricht von einer **Funktionsschar**, da sich für jeden Wert $a \in \mathbb{R}^{>0}$ eine andere Funktion ergibt. a wird hierbei als **Parameter** bezeichnet.



Eigenschaften der Funktionen f_a untersuchen und vergleichen

- **Grenzverhalten der Funktionen f_a**

  Es gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$

  Das Grenzverhalten der Funktionen f_a ist also für alle $a > 0$ gleich.

- **Nullstellen der Funktionen f_a**

  Es gilt: $f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 = x^2 \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{a}{2}\right)$

  $f_a(x) = 0$

  $x = 0$ oder $\frac{1}{3}x + \frac{a}{2} = 0 \quad \left| -\frac{a}{2} \right.$

  $\frac{1}{3}x = -\frac{a}{2} \quad \left| : \frac{1}{3} \right.$

  $x = -\frac{3a}{2}$

  Die Funktionen f_a haben für $a > 0$ die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{3a}{2}$.

- **Extremstellen der Funktionen f_a**

  Ableitungen: $f_a'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{a}{2} \cdot 2x = x^2 + ax = x(x + a)$; $f_a''(x) = 2x + a$

  Notwendige Bedingung für Extremstellen:
  $f_a'(x) = 0$ liefert $x(x + a) = 0$. Somit sind $x_1 = 0$ und $x_3 = -a$ mögliche Extremstellen.
  Hinreichende Bedingung für Extremstellen prüfen: $f_a''(0) = 2 \cdot 0 + a = a > 0$, da $a > 0$

  $f_a''(-a) = 2 \cdot (-a) + a = -a < 0$, da $a > 0$

  Also ist $x_1 = 0$ eine Minimalstelle und $x_3 = -a$ eine Maximalstelle von f_a.

Funktionen mit Parametern
Enthält eine Funktionsgleichung außer der Variablen x noch einen **Parameter** a, so gehört zu jedem a eine Funktion f_a, die jedem x-Wert den Funktionswert $f_a(x)$ zuordnet. Die Funktionen f_a bilden eine **Funktionsschar**. Beim Ableiten und Rechnen werden die Parameter der Funktionsgleichung wie eine Zahl behandelt.

Beispiel 1 **Eine Funktion mit Parameter untersuchen**

Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = x^2 - 2tx + 8t - 16$ $(t \in \mathbb{R})$.

a) Beschreiben Sie die Funktionsgraphen der Schar anhand der Funktionsgleichung.

b) Zeigen Sie, dass alle Graphen durch den Punkt $P(4\,|\,0)$ verlaufen.

c) Bestimmen Sie die Extremstelle von f_t.

d) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte der Graphen von f_3 und f_4. Skizzieren Sie die Graphen von f_3 und f_4.

Lösung

a) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist f_t eine ganzrationale Funktion. Der Summand mit dem höchsten Exponenten ist x^2. Daher sind alle Graphen der Funktionsschar verschobene Normalparabeln.

b) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $f_t(4) = 4^2 - 2t \cdot 4 + 8t - 16 = 16 - 8t + 8t - 16 = 0$.

c) *Ableitungen:* $f_t'(x) = 2x - 2t = 2(x - t)$; $f_t''(x) = 2$

Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$$f_t'(x) = 0$$
$$2(x - t) = 0 \Rightarrow x = t$$

Hinreichende Bedingung für $x = t$ prüfen: $f_t''(t) = 2 > 0$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $x = t$ eine Minimalstelle von f_t.

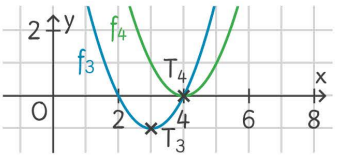
d) Aus Teilaufgabe c) folgt: $T_t(t\,|\,f_t(t))$ ist Tiefpunkt des Graphen von f_t.

$f_3(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 + 8 \cdot 3 - 16 = -1$

$f_4(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 + 8 \cdot 4 - 16 = 0$

Man erhält $T_3(3\,|\,-1)$ und $T_4(4\,|\,0)$.

Skizze:



Beispiel 2 **Eine Funktionsschar mithilfe einer Fallunterscheidung untersuchen**

Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4ax + a$ $(a \in \mathbb{R})$.

Ermitteln Sie die Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a.

Lösung

Ableitungen: $f_a'(x) = x^2 - 4a$; $f_a''(x) = 2x$

Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$$f_a'(x) = 0$$
$$x^2 - 4a = 0 \quad |+4a$$
$$x^2 = 4a$$

$a < 0$: $f_a'(x) = 0$ hat keine Lösung, also hat der Graph von f_a keine Extrempunkte.

$a = 0$: *Notwendige Bedingung für Extremstellen:*
$f_a'(x) = 0$ liefert $x^2 = 4 \cdot 0 = 0$. Somit ist $x_0 = 0$ eine mögliche Extremstelle.
Hinreichende Bedingung für $x_0 = 0$ prüfen:
Da $f_0''(0) = 0$, muss man prüfen, ob f_0' an der Stelle $x_0 = 0$ einen Vorzeichenwechsel hat.
Es gilt zum Beispiel $f_0'(-1) = (-1)^2 > 0$ und $f_0'(1) = 1^2 > 0$.
Also gibt es keinen Vorzeichenwechsel an der Stelle $x_0 = 0$. Somit hat der Graph von f_0 an der Stelle $x_0 = 0$ einen Sattelpunkt und keinen Extrempunkt.

$a > 0$: *Notwendige Bedingung für Extremstellen:* $f_a'(x) = 0$

$$x^2 = 4a \quad |\sqrt{\ }$$
$$x_1 = -\sqrt{4a} = -2\sqrt{a} \text{ und } x_2 = \sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$$

Hinreichende Bedingung für $x_1 = -2\sqrt{a}$ und $x_2 = 2\sqrt{a}$ prüfen:

Es gilt $f''(-2\sqrt{a}) = -4\sqrt{a} < 0$. An der Stelle $x_1 = -2\sqrt{a}$ ist also ein Hochpunkt.

Es gilt $f''(2\sqrt{a}) = 4\sqrt{a} > 0$. An der Stelle $x_2 = 2\sqrt{a}$ ist also ein Tiefpunkt.

Berechnung der Funktionswerte:

$$f_a(-2\sqrt{a}) = \frac{1}{3} \cdot (-2\sqrt{a})^3 - 4a \cdot (-2\sqrt{a}) + a = -\frac{8}{3}a\sqrt{a} + 8a\sqrt{a} + a = \frac{16}{3}a\sqrt{a} + a$$

$$f_a(2\sqrt{a}) = \frac{1}{3} \cdot (2\sqrt{a})^3 - 4a \cdot (2\sqrt{a}) + a = \frac{8}{3}a\sqrt{a} - 8a\sqrt{a} + a = -\frac{16}{3}a\sqrt{a} + a$$

Insgesamt folgt für alle $a > 0$: $H\left(-2\sqrt{a}\,\middle|\,\frac{16}{3}a\sqrt{a} + a\right)$ ist ein Hochpunkt und

$T\left(2\sqrt{a}\,\middle|\,-\frac{16}{3}a\sqrt{a} + a\right)$ ist ein Tiefpunkt des Graphen von f_a.

Hinweis:
Hängt die Anzahl der Lösungen von der speziellen Wahl des Parameters ab, ist eine Fallunterscheidung nötig. Dabei müssen alle für den Parameter möglichen Werte berücksichtigt werden.

Beispiel 3 **Einen Parameter anhand vorgegebener Bedingungen ermitteln**

Gegeben ist die Funktionsschar g_a mit $g_a(x) = ax^4 - 12ax + 1$.
Berechnen Sie den Wert von a so, dass die Tangente an den Graphen von f_a an der Stelle $x = 2$ parallel zu der Geraden mit der Gleichung $y = -x$ verläuft.

Lösung

Es muss $g_a'(2) = -1$ gelten.
Mit einem MMS erhält man $a = -\frac{1}{20}$.

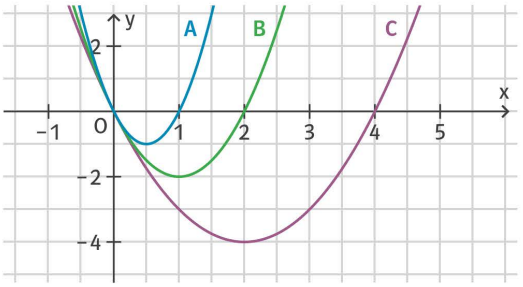
CAS
solve $\left(\left(\frac{d}{dx}\left(a \cdot x^4 - 12 \cdot a \cdot x + 1\right)\middle| x = 2\right) = -1,\ a\right) \rightarrow a = \frac{-1}{20}$

Aufgaben

○ **1** Gegeben sind die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = kx^2 - 4x$ $(k \in \mathbb{R}^{>0})$ sowie drei Graphen der Schar.

a) Geben Sie zu den Graphen A bis C den jeweils zugehörigen Wert von k an. Begründen Sie Ihre Angabe.

SP b) Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede aller Graphen. Die Wortliste auf dem Rand kann helfen.



Wortliste
- die Nullstelle
- der Scheitelpunkt
- die Parabel
- der Streckfaktor
- nach oben/unten geöffnet

○ **2** Auf den Kärtchen sind die Gleichungen der Funktionsscharen f_t, g_t und h_t angegeben.

$f_t(x) = tx + 1$ $\quad g_t(x) = (x + t)^3$ $\quad h_t(x) = x^2 + t$

a) Beschreiben Sie für jede Schar anhand der Funktionsgleichung, wie sich der Funktionsgraph verändert, wenn man t erhöht, und welche Eigenschaften gleich bleiben.

b) Zeichnen Sie jeweils die Graphen der Funktionsscharen für $t = 1; 2; 3; 4$ mit einem MMS und übertragen Sie die Kurvenscharen jeweils in ein eigenes Koordinatensystem. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe a).

○ **3** Zeigen Sie, dass alle Graphen der Funktionsschar f_a durch den Punkt P verlaufen.

Lerntipp Seite 25, Beispiel 1b)

a) $f_a(x) = 2x^4 - ax^2 - 3x + a$; $P(1|-1)$
b) $f_a(x) = -ax^4 + x^3 - 3x^2 + 4ax + 8a$; $P(2|-4)$
c) $f_a(x) = x^3 - ax^2 - 5x + 9a$; $P(3|12)$
d) $f_a(x) = x^4 - ax^3 - 2x - a$; $P(-1|3)$

○ **4** Gegeben sind die Gleichungen der Funktionsscharen f_a, g_a und h_a mit $a > 0$.

$f_a(x) = x^2 - ax - 2$ $\quad g_a(x) = 2ax^3 - 6x$ $\quad h_a(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}ax^2$

a) Berechnen Sie jeweils die Art und Lage der Extremstellen in Abhängigkeit von a.

b) Ermitteln Sie für $a = 1$ jeweils die Schnittpunkte der Graphen mit den Koordinatenachsen sowie die Hoch- und Tiefpunkte. Skizzieren Sie die Graphen von f_1, g_1 und h_1.

Test 1

Lösungen, Seite 427

○ **5** Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = x^3 - 3tx^2 + 3t - 6$ $(t > 0)$.

a) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar durch den Punkt $P(-1|-7)$ verlaufen.

b) Berechnen Sie die Art und Lage der Extremstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

c) Ermitteln Sie für $t = 2$ die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen sowie die Hoch- und Tiefpunkte. Skizzieren Sie den Graphen von f_2.

◒ **6** Gegeben ist die Funktionsschar g_k mit $g_k(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{k}{4}x^2 + \frac{k^2+2}{4} \cdot x - \frac{1}{4}$ $(k \in \mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau eine Wendestelle $x = k$ haben.

b) Zeigen Sie, dass die Wendetangenten aller Graphen der Schar parallel verlaufen.

7 Gegeben ist die Funktionsschar g_b mit $g_b(x) = 2x^3 - 6x^2 + bx + 11$. Ermitteln Sie, für welche Werte von $b \in \mathbb{R}$ die Bedingungen auf den Kärtchen jeweils erfüllt sind.

→ **Lerntipp** Seite 26, Beispiel 3

A Der Graph von g_b verläuft durch den Punkt $P(2|1)$.

B Die Tangente an der Stelle $x = 2$ ist parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = x$.

C $x = -1$ ist eine Maximalstelle von g_b.

D Die Wendetangente des Graphen von g_b hat die Steigung 2.

8 Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = 2x^3 - 3ax^2$ $(a \in \mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass alle Graphen an der Stelle $x = 0$ eine waagerechte Tangente haben.

b) Ermitteln Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass an der Stelle $x = 0$ ein Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt ist.

9 Wird ein Ball von 2 m Höhe in einem Winkel der Größe 45° gegenüber der Horizontalen geworfen, so kann dessen Flugbahn mit dem Graphen der Funktion f_v mit $f_v(x) = 2 + x - 10\frac{x^2}{v^2}$ modelliert werden. Dabei ist $v > 0$ die Abwurfgeschwindigkeit (in $\frac{m}{s}$), x die horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt (in m) und $f_v(x)$ die jeweilige Höhe über dem Boden (in m).

a) Bestätigen Sie rechnerisch, dass der Abwurf des Balls laut Modell in 2 m Höhe und in einem Winkel der Größe 45° gegenüber der Horizontalen erfolgt.

b) Zeichnen Sie die Graphen von f_5, f_{10}, f_{15} und f_{20} und beschreiben Sie, was eine Erhöhung des Parameters v im Kontext bewirkt.

c) Die Flugbahnen zweier Würfe werden durch die Funktionen f_{15} bzw. f_{17} beschrieben. Ermitteln Sie, um wie viele Meter sich die erzielten Wurfweiten laut Modell unterscheiden.

10 Ein Seil für eine Bergbahn soll zwischen zwei Masten gespannt werden. Die Höhe des durchhängenden Seils wird durch die Funktion f_c mit $f_c(x) = \frac{1+c}{1500^2}x^3 - cx + 500$ $(c \geq -1)$ beschrieben, wobei $x \in [0; 1500]$ die horizontale Entfernung in Metern vom Startpunkt und $f_c(x)$ die Höhe des Seils in Metern über dem Meeresspiegel angibt.

a) Zeichnen Sie die Graphen von f_{-1}, $f_{-0,9}$, $f_{-0,8}$ und $f_{-0,7}$ und beschreiben Sie, was eine Erhöhung des Parameters c im Kontext bewirkt.

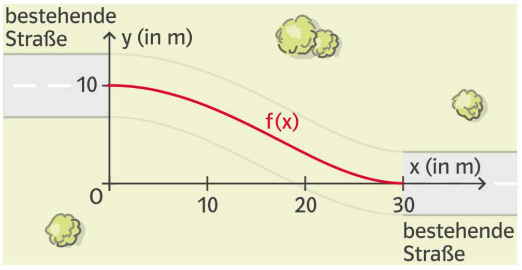
b) Erläutern Sie die Bedeutung der Punkte $P(0|500)$ und $Q(1500|2000)$ im Kontext.

c) Zeigen Sie, dass der Graph von f_{-1} eine Gerade ist.

d) Im Folgenden soll der Verlauf des Seils durch den Graphen der Funktion $f_{-0,9}$ beschrieben werden. Bestimmen Sie, um wie viele Meter das Seil 500 m nach dem Start durchhängt.

Der Durchhang eines Seiles ist die kürzeste Verbindung vom Seil zur Verbindungsgeraden zwischen den Masten.

11 Zwei parallel aufeinander zulaufende Straßen sollen verbunden werden. Die Abbildung zeigt ein Modell der Baumaßnahme. Die erste Straße ist im Modell Teil der Geraden mit der Gleichung $y = 10$, die zweite verläuft im Modell auf der x-Achse. Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{b} \cdot (d - x^2)^2$ soll die neue Straße beschreiben.



a) Bestimmen Sie die Parameter b und d.

b) Prüfen Sie, ob die neue Straße knickfrei in die beiden bestehenden Straßen mündet.

c) Erläutern Sie, welchen der beiden Parameter man verändern müsste, wenn die beiden parallelen Straßen statt 10 m einen anderen Abstand hätten.

12 Bestimmen Sie die Art und Lage der Extrempunkte des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a. Ermitteln Sie, für welchen Wert von a einer der Extrempunkte auf der x-Achse liegt.

→ **Lerntipp** Seite 25, Beispiel 2

a) $f_a(x) = x^2 - ax + 4$ b) $f_a(x) = ax^3 - 3ax + 1$ c) $f_a(x) = x^3 - 3a^2x + 2$

13 Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen von g_a in Abhängigkeit von a.

a) $g_a(x) = x^3 - ax^2$ b) $g_a(x) = x^4 - a^2x^3$ c) $g_a(x) = x^4 - (a+1)x^2$

14 June möchte wissen, ob es Punkte gibt, die auf allen Graphen der Schar g_t mit $g_t(x) = x^3 - tx^2 - 3tx - 1$ liegen.

CAS
Löse $(x^3 - s \cdot x^2 - 3s \cdot x - 1 = x^3 - t \cdot x^2 - 3t \cdot x - 1, x)$
$\rightarrow \{x = -3, x = 0\}$

a) Erläutern Sie Junes Ansatz und geben Sie die gemeinsamen Punkte aller Graphen der Schar an.
b) Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = -x^3 - kx^2 + 6x + 4k$. Untersuchen Sie mit Junes Methode, ob es Punkte gibt, die auf allen Graphen der Schar liegen.

Test 2

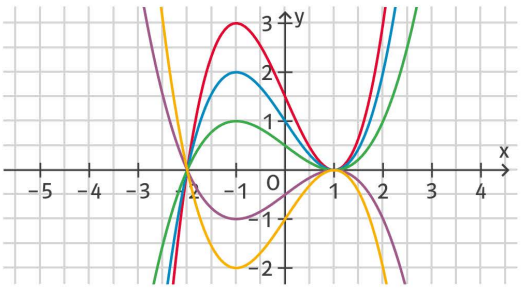
Lösungen, Seite 428

15 Die Funktionsschar f_d mit $f_d(t) = \left(\frac{-d^2 + 500d}{50\,000} + 1\right) \cdot \left(-\frac{t^2}{180} + \frac{t}{6}\right)$ wird zur Beschreibung der Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze verwendet. Dabei gibt d die verwendete Menge eines Spezialdüngers in ml, $t \in [0; 30]$ die Zeit in Tagen seit der Verwendung des Düngers und $f_d(t)$ die Wachstumsgeschwindigkeit in cm pro Tag zum Zeitpunkt t an.

a) Beschreiben Sie anhand der Funktionsgleichung, wodurch sich die Graphen der Schar unterscheiden.
b) Zeichnen Sie die Graphen von f_0, f_{100}, f_{200}, f_{300} und f_{400}. Beschreiben Sie anhand der Graphen, was eine Erhöhung der Düngermenge laut Modell bewirkt.
c) Weisen Sie nach, dass die Lage der globalen Maximalstelle von f_d unabhängig vom Wert von $d \in [0; 500]$ ist. Erklären Sie die Bedeutung der Maximalstelle im Kontext.
d) Zeigen Sie, dass laut Modell für eine Düngermenge von 250 ml die höchste Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze erzielt werden kann.

16 Gegeben sind fünf Graphen einer Schar f_k ganzrationaler Funktionen dritten Grades.

a) Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten aller Graphen.
b) Ermitteln Sie eine mögliche Funktionsgleichung der Schar f_k.
c) Bestimmen Sie den Parameter so, dass der Graph von f_k durch den Punkt $P(2|1)$ verläuft. Geben Sie die Funktionsgleichung an.



17 Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = x^3 - 12t^2x$ $(t \in \mathbb{R}^{>0})$.

a) Bestimmen Sie die Hoch- und Tiefpunkte der Schar in Abhängigkeit von t.
b) Salih behauptet, dass alle Extrempunkte auf dem Graphen einer Potenzfunktion k liegen. Prüfen Sie Salihs Behauptung rechnerisch.

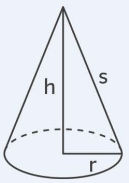
18 Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + (a - 1)^2$ $(a \in \mathbb{R})$.

a) Untersuchen Sie, ob die Graphen von f_a ein einheitliches Symmetrieverhalten aufweisen.
b) Zeigen Sie, dass die Graphen von f_a für $a > 0$ zwei Tiefpunkte haben. Bestätigen Sie mithilfe einer Rechnung, dass diese auf dem Graphen von h mit $h(x) = -2x^2 + 1$ liegen.
c) Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ der Graph von f_a vollständig oberhalb des Graphen von g mit $g(x) = -2x^2$ verläuft.

Grundwissen Test — Größen eines Kegels berechnen

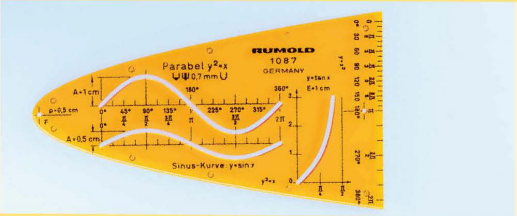
Grundwissen, Seite 419
Lösungen, Seite 428

G **19** Berechnen Sie das Volumen V, den Mantelflächeninhalt M und den Oberflächeninhalt O des Kegels mit dem Radius $r = 3\,\text{cm}$ und der Höhe $h = 7{,}5\,\text{cm}$.



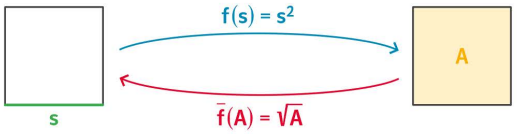
6 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Ilja möchte den Graphen der Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = \sqrt{x}$ und dem Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R}^{\geq 0}$ zeichnen. Er behauptet: „Dafür kann ich die Schablone der Normalparabel benutzen."
Hat Ilja recht? Begründen Sie.

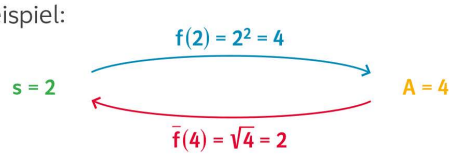


Eine Funktion ordnet jedem Wert einer 1. Größe den passenden Wert einer 2. Größe zu. Wenn man sich dafür interessiert, wie die 1. Größe von der 2. Größe abhängt, kann es hilfreich sein, eine Funktion umzukehren. Im Folgenden wird dies an einem Beispiel erklärt.

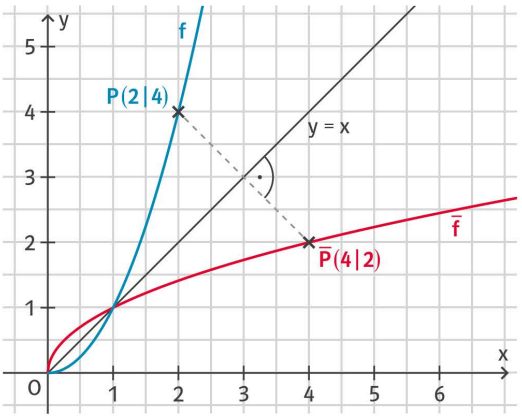
Die Funktion f mit $f(s) = s^2$ ordnet jeder Seitenlänge $s \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ eines Quadrats dessen Flächeninhalt A zu.
Umgekehrt ordnet die Funktion $\bar{f}$ mit $\bar{f}(A) = \sqrt{A}$ jedem Flächeninhalt $A \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ eines Quadrats dessen Seitenlänge s zu.
Die Funktion $\bar{f}$ wird daher als die **Umkehrfunktion** der Funktion f bezeichnet.



Beispiel:



Graph der Umkehrfunktion zeichnen
Wenn man bei den Funktionen f und $\bar{f}$ eine einheitliche Variable verwendet, beispielsweise x, kann man ihre Graphen in dasselbe Koordinatensystem zeichnen.
Der Graph der Umkehrfunktion $\bar{f}$ entsteht aus dem Graphen von f, indem man die Koordinaten der Punkte vertauscht:
Der Graph von f verläuft beispielsweise durch den Punkt $P(2|4)$, der Graph von $\bar{f}$ durch den Punkt $\bar{P}(4|2)$.
Man erkennt: Das Vertauschen der Koordinaten entspricht einer Spiegelung an der Winkelhalbierenden mit der Gleichung $y = x$.



Umkehrbarkeit von Funktionen, Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion
Eine Funktion f ist nur dann umkehrbar, wenn man jedem $y \in W_f$ ein eindeutiges $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ zuordnen kann.
Dies ist bei der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2$ der Fall, wenn man den Definitionsbereich D_f z. B. auf $D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$ einschränkt (Fig. 1). Die Umkehrfunktion $\bar{f}$ hat dann den Definitionsbereich $D_{\bar{f}} = W_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$, den Wertebereich $W_{\bar{f}} = D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$ und die Funktionsgleichung $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$.

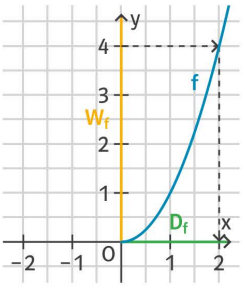


Fig. 1

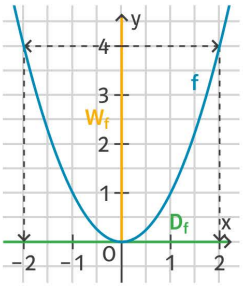


Fig. 2

Lässt man bei der Funktion f mit $f(x) = x^2$ jedoch den maximalen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$ zu, ist f nicht umkehrbar: Beispielsweise gilt $f(2) = 4$ und $f(-2) = 4$, also kann man dem y-Wert 4 keinen eindeutigen x-Wert zuordnen (Fig. 2).

Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Eine Funktion f mit der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f heißt **umkehrbar**, wenn es zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ gibt.

Bei einer umkehrbaren Funktion f bezeichnet man die **Umkehrfunktion** mit $\bar{f}$.

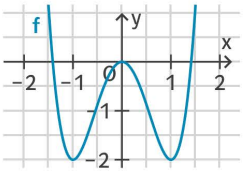
Die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$ mit dem eingeschränkten Definitionsbereich $D_f = R^{\geq 0}$ ist die **Wurzelfunktion** $\bar{f}$ mit $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$. Sie hat den Definitionsbereich $D_{\bar{f}} = R^{\geq 0}$ und den Wertebereich $W_{\bar{f}} = R^{\geq 0}$.

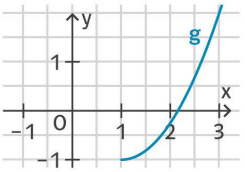
Beispiel 1 **Die Umkehrbarkeit einer Funktion anhand ihres Graphen prüfen**

Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g.

a) Prüfen Sie, ob die Funktionen f und g im abgebildeten Bereich umkehrbar sind.

b) Skizzieren Sie den Graphen der umkehrbaren Funktion aus Teilaufgabe a) sowie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion.

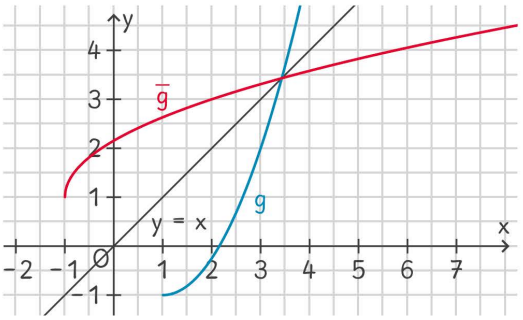




Lösung

a) Die Funktion f ist nicht umkehrbar, weil beispielsweise der Funktionswert −2 an mehreren Stellen angenommen wird. Es gilt $f(-1) = f(1) = -2$.
Da die Funktion g streng monoton zunehmend ist, lässt sich jedem $y \in W_g$ genau eine Stelle $x \in D_g$ mit $y = g(x)$ zuordnen. Also ist g umkehrbar.

b) *Man spiegelt den Graphen von g an der Geraden mit der Gleichung $y = x$.*



Beispiel 2 **Wurzelfunktionen transformieren**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{x - 1}$.

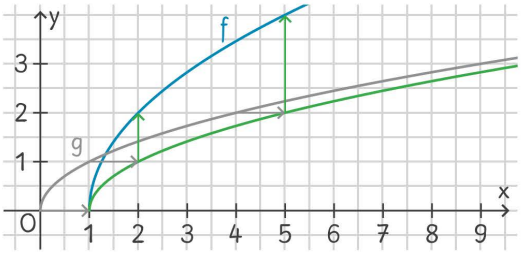
a) Erläutern Sie, wie der Graph von f aus dem Graphen von g mit $g(x) = \sqrt{x}$ entsteht.

b) Skizzieren Sie die Graphen von f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Lösung

a) Der Graph von f entsteht aus dem Graphen von g, indem man ihn um 1 Einheit nach rechts verschiebt und in y-Richtung mit dem Faktor 2 streckt.

b) *Der Graph von f lässt sich durch schrittweises Transformieren skizzieren.*

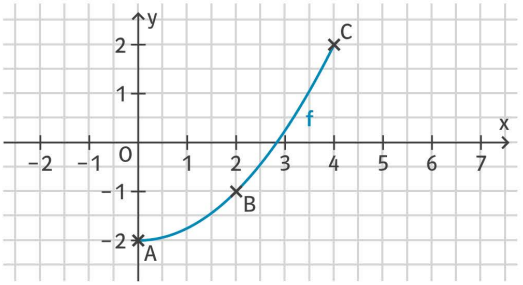


Aufgaben

○ **1** Die Abbildung zeigt den Graphen der umkehrbaren Funktion f.

a) Lesen Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C des Graphen von f ab.
Notieren Sie die Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$ und $\bar{C}$ des Graphen der Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f.

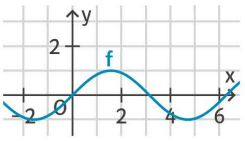
b) Tragen Sie die Punkte A, B, C, $\bar{A}$, $\bar{B}$ und $\bar{C}$ in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie die Graphen von f und $\bar{f}$.

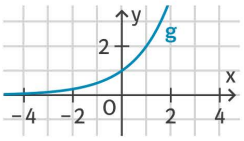


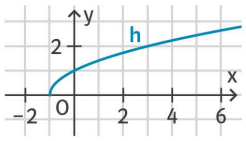
c) Geben Sie jeweils den Definitions- und den Wertebereich der Funktionen f und $\bar{f}$ an.

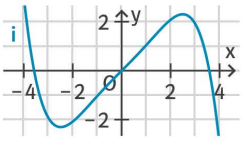
2 a) Prüfen Sie, ob die Funktionen f, g, h und i im abgebildeten Bereich umkehrbar sind.

Lerntipp
Seite 30, Beispiel 1









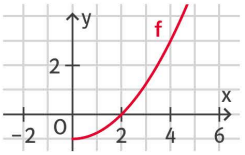
b) Skizzieren Sie die Graphen der umkehrbaren Funktionen aus Teilaufgabe a) jeweils in ein eigenes Koordinatensystem. Ergänzen Sie die Winkelhalbierende mit der Gleichung $y = x$ und den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion in dem Koordinatensystem.

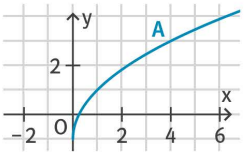
3 Ein Welpenforum beschreibt das Gewicht eines Golden Retrievers im ersten Lebensjahr mithilfe der Modellfunktion g. Dabei gibt $g(t)$ das Gewicht (in kg) zum Zeitpunkt t (in Monaten nach der Geburt) an. g ist umkehrbar mit der Umkehrfunktion $\overline{g}$.

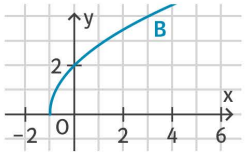
a) Beschreiben Sie die Bedeutung der Umkehrfunktion $\overline{g}$ im Sachkontext.
b) Beschreiben Sie die Bedeutung der Gleichungen im Sachkontext.

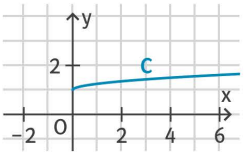
A $g(3) = 11$ B $\overline{g}(20) = 5{,}5$ C $\overline{g}(18) - \overline{g}(15) = 1$

4 Gegeben sind der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und $D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$ sowie die Graphen der Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit $f_1(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x} + 1$, $f_2(x) = 2\sqrt{x} - 1$ und $f_3(x) = 2\sqrt{x+1}$.







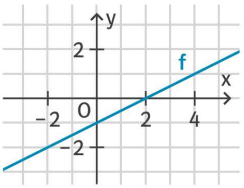


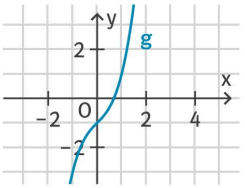
a) Ordnen Sie f_1, f_2 und f_3 jeweils den passenden Graphen A bis C zu. Begründen Sie.
b) Geben Sie jeweils den Definitions- und Wertebereich der Funktionen f_1, f_2 und f_3 an.
c) Begründen Sie, dass f umkehrbar ist. Entscheiden Sie, welche der Funktionen f_1, f_2 oder f_3 die Umkehrfunktion von f ist. Begründen Sie.

Test 1

Lösungen, Seite 428

5 a) Begründen Sie anhand der Graphen, dass die Funktionen f und g im abgebildeten Bereich umkehrbar sind.
b) Skizzieren Sie die Graphen von f und g und ergänzen Sie den Graphen der jeweiligen Umkehrfunktion.





6 Die Funktion f beschreibt den Abkühlungsvorgang eines Heißgetränks (t in min nach der Zubereitung, $f(t)$ in °C). f ist umkehrbar mit der Umkehrfunktion $\overline{f}$.
a) Beschreiben Sie die Bedeutung der Umkehrfunktion $\overline{f}$ im Sachkontext.
b) Beschreiben Sie die Bedeutung der Gleichungen im Sachkontext.

A $f(5) = 78{,}5$ B $\overline{f}(60) = 14{,}5$ C $\overline{f}(30) - \overline{f}(40) = 1{,}5$

7 Gegeben sind die Funktionen g mit $g(x) = 2\sqrt{x}$ und h mit $h(x) = \sqrt{x-1}$.

Lerntipp
Seite 30, Beispiel 2

a) Beschreiben Sie, wie die Graphen der Funktionen g und h aus dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ hervorgehen.
b) Skizzieren Sie die Graphen von f, g und h in ein gemeinsames Koordinatensystem.

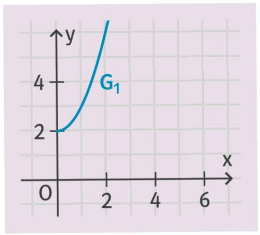
8 a) Ordnen Sie den Funktionen f, g und h mit $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = 2\sqrt{x}$ und $h(x) = \sqrt{x} + 2$ ihre Funktionsgraphen, die Graphen ihrer Umkehrfunktionen $\bar{f}$, $\bar{g}$ und $\bar{h}$ sowie die Gleichungen ihrer Umkehrfunktionen von den Kärtchen zu.

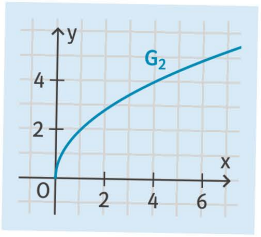
b) Geben Sie die Definitions- und die Wertebereiche der sechs Funktionen an.

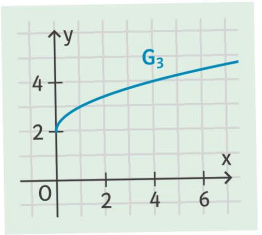
A $y = 0{,}25x^2$

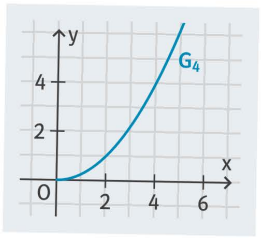
B $y = (x-2)^2$

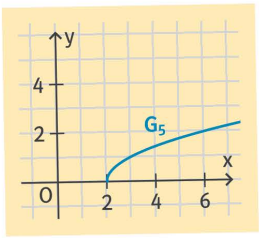
C $y = x^2 + 2$

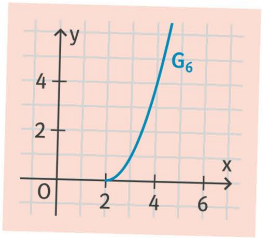












9 Man erhält den Graphen der umkehrbaren Funktion g, indem man den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ um 2 Einheiten nach links und um 1 Einheit nach unten verschiebt.

a) Geben Sie die Funktionsgleichung von g an.

b) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von g und ihrer Umkehrfunktion $\bar{g}$ an.

c) Skizzieren Sie die Graphen von g und $\bar{g}$ in dasselbe Koordinatensystem.

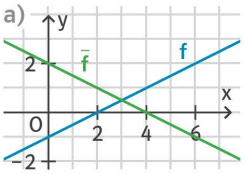
d) Stellen Sie eine begründete Vermutung auf, welche Funktionsgleichung $\bar{g}$ hat.

Die Lösungen zu Aufgabe 9 können mit einem MMS überprüft werden.

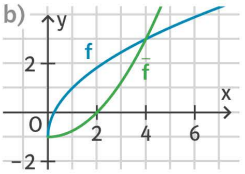
10 **Finden Sie den Fehler!**

Gegeben ist der Graph von f. Der Graph der Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f soll im selben Koordinatensystem gezeichnet werden.
Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und skizzieren Sie die richtige Lösung.

a)



b)



Test 2

→ **Lösungen**, Seite 429

11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{x-3}$ und ihre Umkehrfunktion $\bar{f}$.

a) Bestimmen Sie den Definitions- und den Wertebereich von f und $\bar{f}$.

b) Beschreiben Sie, wie der Graph von f aus dem Graphen von h mit $h(x) = \sqrt{x}$ entsteht.

c) Skizzieren Sie die Graphen von f und $\bar{f}$ in dasselbe Koordinatensystem.

12 Michelle vermutet: „Die Funktion f mit $f(x) = x^2$ müsste auch umkehrbar sein, wenn man den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}^{\leq 0}$ einschränkt. Dann kann allerdings nicht $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$ sein." Begründen Sie, dass Michelle recht hat und ermitteln Sie die Gleichung der Umkehrfunktion.

13 Malik behauptet: „Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ hat sich selbst als Umkehrfunktion."

a) Begründen Sie, dass Malik recht hat.

b) Finden Sie eine weitere Funktion, die sich selbst als Umkehrfunktion hat.

Grundwissen Test — Volumenänderung eines Kegels untersuchen

→ **Grundwissen**, Seite 419
Lösungen, Seite 429

G **14** Untersuchen Sie, wie sich das Volumen eines Kegels verändert, wenn man seine Höhe halbiert und den Radius der Grundfläche verdoppelt.

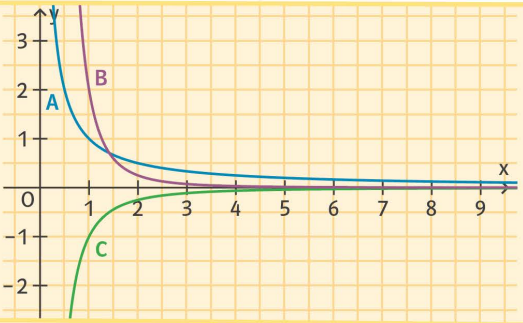
7 Potenzfunktionen ableiten

Die Graphen A, B und C und die Terme 1, 2 und 3 gehören zu einer Funktion f, ihrer ersten Ableitung f' und ihrer zweiten Ableitung f''. Ordnen Sie zu und begründen Sie.

1 $\frac{2}{x^3}$

2 $-\frac{1}{x^2}$

3 $\frac{1}{x}$

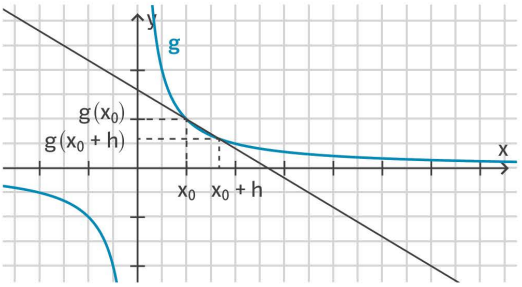


Die Ableitungsregeln für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten sind bekannt. Im Folgenden werden sie auch auf Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten übertragen.

Eine Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$ und natürlichem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ hat nach der Potenzregel die Ableitung $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Auch die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ mit $D_g = \mathbb{R}^{\neq 0}$ ist eine Potenzfunktion, ihr Exponent ist jedoch negativ.

Mithilfe des Differenzenquotienten wird gezeigt, dass die Potenzregel auch für die Funktion g gültig ist.



Für alle $x_0 \in D_g$ ist auch $x_0 + h \in D_g$, wenn h nahe genug an null ist (genauer: wenn $|h| < |x_0|$ ist).

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h} = \left(\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}\right)\cdot\frac{1}{h}$$ | Brüche in der Klammer gleichnamig machen

$$= \left(\frac{x_0}{x_0(x_0+h)}-\frac{x_0+h}{x_0(x_0+h)}\right)\cdot\frac{1}{h}$$ | Zähler auf einen Bruchstrich schreiben,

$$= \frac{x_0-(x_0+h)}{x_0(x_0+h)}\cdot\frac{1}{h}$$ | Zähler vereinfachen

$$= \frac{-h}{x_0(x_0+h)}\cdot\frac{1}{h}$$ | mit h kürzen, Zähler berechnen

$$= -\frac{1}{x_0(x_0+h)}$$

Daher folgt für alle $x_0 \in D_g$: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -\frac{1}{x_0(x_0+h)} = -\frac{1}{x_0^2}$

Also ist g für alle $x \in D_g$ differenzierbar und es gilt: $g'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1 \cdot x^{-2}$

Damit ist die Potenzregel für den negativen Exponenten $n = -1$ bewiesen.

Man kann zeigen, dass die Potenzregel für beliebige reelle Exponenten $r \neq 0$ gültig ist. Üblicherweise werden Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^r$ und $r \notin \mathbb{Z}$ nur auf dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^{>0}$ betrachtet.

Auch die Wurzelfunktion h mit $h(x) = \sqrt{x}$ mit $D_h = \mathbb{R}^{\geq 0}$ ist eine Potenzfunktion, denn es gilt $h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.
Mit der Potenzregel erhält man $h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Die Ableitung der Funktion h mit $h(x) = \sqrt{x}$ wird in Aufgabe 14 graphisch und in Aufgabe 15 rechnerisch ermittelt.

Potenzfunktionen ableiten

Eine Potenzfunktion f mit $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$, hat die Ableitung $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.

Insbesondere gilt:

Die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ und dem Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R}^{\neq 0}$ hat die Ableitung

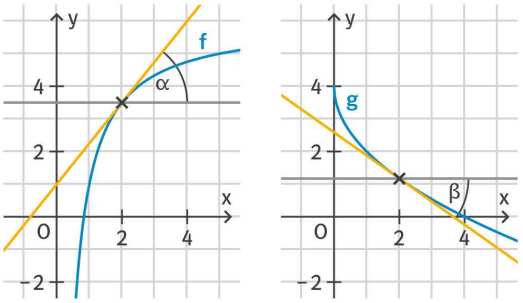
$g'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Die Funktion h mit $h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ und dem Definitionsbereich $D_h = \mathbb{R}^{>0}$ hat die Ableitung

$h'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Beispiel 1 **Potenzregel anwenden und Größe des Steigungswinkels berechnen**

Die Abbildungen zeigen den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 6 - \frac{5}{x}$ und $D_f = \mathbb{R}^{\neq 0}$ sowie den Graphen der Funktion g mit $g(x) = 4 - 2\sqrt{x}$ und $D_g = \mathbb{R}^{>0}$.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von f′ und g′.

b) Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels α bzw. β der Tangenten an den Graphen von f bzw. g an der Stelle $x = 2$.

Lösung

a) Es gilt $f'(x) = -5 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{5}{x^2}$ und $g'(x) = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$.

b) *Tangentensteigungen:* $f'(2) = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$ *und* $g'(2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0{,}71$

Für die Größe des Steigungswinkels α einer Geraden mit der Steigung m gilt:
$\tan(\alpha) = m$ *und damit* $\alpha = \tan^{-1}(m)$

Daraus ergibt sich $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) \approx 51{,}3°$ und $\beta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -35{,}3°$.

Beispiel 2 **Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten ableiten**

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \sqrt[3]{x^2}$ und $D_h = \mathbb{R}^{>0}$. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung h′. Notieren Sie den Ableitungsterm in der Wurzelschreibweise und ohne negativen Exponenten.

Lösung

Es gilt $h(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Mit der Potenzregel erhält man $h'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

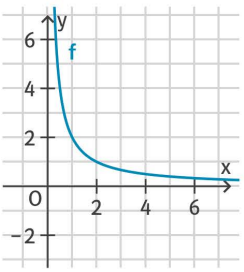
Aufgaben

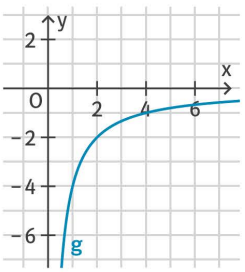
○ **1** Gegeben sind die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = \frac{2}{x}$, g mit $g(x) = -\frac{4}{x}$, h mit $h(x) = 3\sqrt{x}$ und i mit $i(x) = 5 - 2\sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{R}^{>0}$.

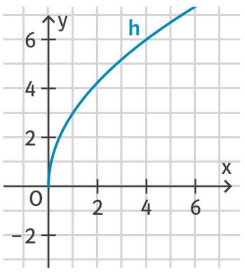
→ **Lerntipp** Seite 34, Beispiel 1a)

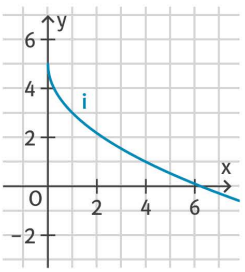
a) Schätzen Sie anhand der Abbildung die Steigung des Graphen an der Stelle $x_0 = 1$.

b) Berechnen Sie $f'(1)$, $g'(1)$, $h'(1)$ und $i'(1)$. Vergleichen Sie die Werte mit Ihren Schätzwerten aus Teilaufgabe a).









2 Gegeben sind die Gleichung und der Definitionsbereich der Funktion f.
Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion f' mithilfe der Ableitungsregeln. Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente an den Graphen von f an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

a) $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^{+0}$ b) $f(x) = \frac{2}{x} - 7$; $D_f = \mathbb{R}^{+0}$ c) $f(x) = 4 - \sqrt{x}$; $D_f = \mathbb{R}^{>0}$

→ **Lerntipp** Seite 34, Beispiel 1b)

3 Gegeben sind die Funktionen f, g und h jeweils mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^{+0}$.

$f(x) = -\frac{1}{x}$ $g(x) = \frac{2}{x}$ $h(x) = \frac{1}{2x}$

a) Skizzieren Sie die Graphen von f, g und h mithilfe von Wertetabellen für $x \in [-2; 2]$ in Schritten von $\frac{1}{2}$. Zeichnen Sie an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = 1$ Tangenten an die Graphen und lesen Sie näherungsweise die jeweilige Steigung ab.

b) Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen von f', g' und h'. Vergleichen Sie die in Teilaufgabe a) bestimmten Tangentensteigungen mit den Werten der entsprechenden Ableitungen.

4 Schreiben Sie die Gleichung der Funktion f in der Form $f(x) = a \cdot x^r$. Geben Sie den Definitionsbereich von f und die Gleichung der Ableitung an. Notieren Sie die Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion ohne negativen Exponenten und falls möglich in der Wurzelschreibweise.

a) $f(x) = \frac{2}{x^3}$ b) $f(x) = -\sqrt{x^3}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{5\sqrt{x}}$ d) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

→ **Lerntipp** Seite 34, Beispiel 2

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 429

5 Gegeben sind die Gleichung und der Definitionsbereich der Funktion f.
Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f' mithilfe der Ableitungsregeln und berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente an den Graphen von f an den Stellen $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

a) $f(x) = 2 - \frac{3}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^{+0}$ **b)** $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$, $D_f = \mathbb{R}^{>0}$ **c)** $f(x) = 5 - \frac{2}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^{+0}$ **d)** $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{2}$, $D_f = \mathbb{R}^{>0}$

6 Gegeben ist die Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}^{>0}$. Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Graph von f Extremstellen hat. Verwenden Sie falls nötig das Vorzeichenwechselkriterium als hinreichendes Kriterium.

a) $f(x) = 3 - 4\sqrt{x}$ b) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$ d) $f(x) = 2x + \frac{8}{x^2}$

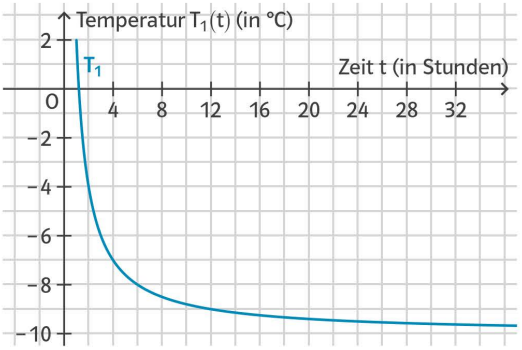
7 Bei einem Kälteeinbruch wird die Temperatur modellhaft durch die Funktion T_1 mit $T_1(t) = \frac{12}{t} - 10$ beschrieben ($t \geq 1$ in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $T_1(t)$ in °C).

a) Berechnen Sie, wann die Temperatur dem Modell zufolge unter 0 °C sinkt.

b) Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Temperatur zum Zeitpunkt $t = 20$.

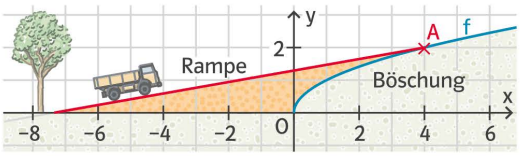
c) Begründen Sie, dass die Temperatur laut Modell ständig sinkt.

d) Die Temperatur soll nach einem Tag durch eine lineare Modellfunktion T_2 so beschrieben werden, dass im Graphen kein Knick entsteht. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von T_2. Ermitteln Sie, wann diesem Modell zufolge eine Temperatur von −10 °C erreicht wird.



Tipp zu Aufgabe 7d):
Der Übergang der beiden Graphen hat keinen Knick, wenn $T_1'(24) = T_2'(24)$ gilt.

8 Die Abbildung zeigt das Modell einer geplanten Rampe. Die Böschung wird dabei mit der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ beschrieben. Die geplante Rampe soll einen Steigungswinkel der Größe 10° haben.



a) Berechnen Sie die Steigung der Rampe in Prozent.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass diese Rampe nicht knickfrei in die Böschung übergehen würde, wenn sie im Modell im Punkt $A(4|2)$ enden würde.

9 Gegeben ist die Gleichung der Funktionsschar f_a. Notieren Sie den Definitionsbereich und bestimmen Sie den Wert des Parameters a jeweils so, dass die angegebene Bedingung erfüllt ist.

a) $f_a(x) = a\sqrt{x} - 5$ mit $a \neq 0$

b) $f_a(x) = 3 - a\sqrt{x^3}$ mit $a \neq 0$

A Der Graph von f_a verläuft durch den Punkt $P(9|1)$.

B Der Graph von f_a hat an der Stelle $x_0 = 4$ die Steigung $m = 3$.

C Der Graph der Umkehrfunktion $\overline{f}_a$ von f_a verläuft durch den Punkt $P(10|25)$.

D Die Tangente an den Graphen von f_a an der Stelle $x = 1$ verläuft parallel zur Geraden mit $y = \frac{1}{2}x$.

E Die Normale an den Graphen von f_a an der Stelle $x = 4$ hat die Steigung $m = \frac{1}{6}$.

10 MK

Lineare Approximation

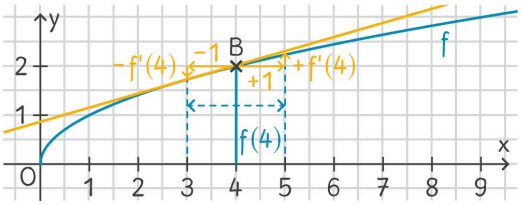
„$\sqrt{4}$ ist 2, $\sqrt{3}$ muss also etwas kleiner als 2 und $\sqrt{5}$ etwas größer als 2 sein," überschlägt Ida. Filip versucht, mithilfe der Wurzelfunktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ genauere Näherungswerte für $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ zu ermitteln: „An der Stelle $x_0 = 4$ kenne ich den Funktionswert von f: Es gilt $f(4) = \sqrt{4} = 2$. In der Nähe von $x_0 = 4$ verläuft die Tangente an den Graphen von f fast genauso wie der Graph von f. Das kann man für eine Überschlagsrechnung benutzen."

Anhand der abgebildeten Skizze kommt er auf folgende Überschlagsrechnungen:

$$m = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{5} = f(5) \approx f(4) + f'(4) = 2 + \frac{1}{4} = 2{,}25$$

$$\sqrt{3} = f(3) \approx f(4) - f'(4) = 2 - \frac{1}{4} = 1{,}75$$



a) Erläutern Sie Filips Vorgehen anhand seiner Notizen und seiner Skizze.

b) Vergleichen Sie Filips Näherungswerte mit den Näherungswerten Ihres Taschenrechners.

Ida ist überzeugt: „Die Methode lässt sich auch für weitere Wurzeln benutzen." Sie überschlägt:

$\sqrt{6} = f(6) \approx f(4) + 2 \cdot f'(4) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5$ und $\sqrt{7} = f(7) \approx f(4) + 3 \cdot f'(4) = 2 + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}75$

c) Erklären Sie Idas Rechnungen mithilfe geeigneter Steigungsdreiecke.

d) Filip hat Bedenken: „Wenn der Abstand zur Stelle $x = 4$ größer wird, ist die Methode nicht so genau." Er behauptet: „Für $\sqrt{7}$ bekommt man einen besseren Näherungswert mit der Tangente an der Stelle $x = 9$." Erläutern Sie Filips Bedenken und überprüfen Sie seine Behauptung.

Hinweis:
Da die Tangente der Graph einer linearen Funktion ist, wird dieses Näherungsverfahren als **lineare Approximation** bezeichnet.
(lat. approximare = annähern)

11 **Die Ableitungsfunktion transformierter Wurzelfunktionen ermitteln**

a) Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x - 3} + 2$ aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \sqrt{x}$ hervorgeht. Geben Sie den Definitionsbereich von f und g an. Skizzieren Sie die Graphen von f und g in dasselbe Koordinatensystem.

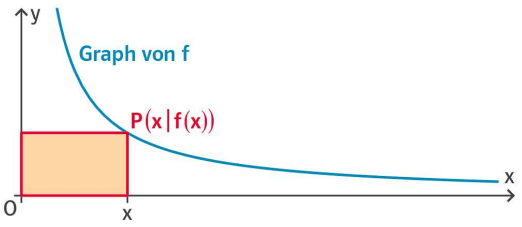
b) Stellen Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse aus Teilaufgabe a) eine Vermutung auf, wie die Gleichung der Ableitung von f lauten könnte. Erläutern Sie Ihre Vermutung.

c) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe b) mit einem MMS.

12 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, g mit $g(x) = \frac{1}{x}$ und h mit $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Sie haben alle den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^{>0}$ und den Wertebereich $W = \mathbb{R}^{>0}$. Für jede Stelle x mit $x > 0$ kann ein Rechteck festgelegt werden, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

a) Geben Sie für f, g und h jeweils die Gleichung einer Funktion an, die den Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit von x beschreibt.

b) Begründen Sie, dass es für keine der Funktionen einen Wert $x_0 > 0$ gibt, für den der Flächeninhalt des Rechtecks maximal ist.



Test 2

→ **Lösungen**, Seite 429

13 Die Rampe einer Wasserbahn wird für $x \in [-30; 1]$ durch die Funktion f mit $f(x) = -x + 5$ beschrieben (x und f(x) in m). Sie geht ohne Knick in ein Teilstück über, dass sich für $x \in [1; 5]$ mit einer Funktion g mit $g(x) = \frac{a}{x} + b$ beschreiben lässt. Bestimmen Sie a und b.

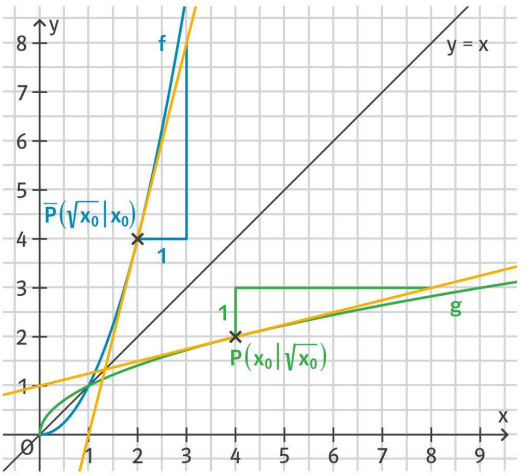
14 **Die Ableitungsfunktion der Umkehrfunktion grafisch ermitteln**

Gegeben sind der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ und $D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$ und der Graph ihrer Umkehrfunktion g mit $g(x) = \sqrt{x}$.

Zeichnet man im Punkt $P(\sqrt{x_0} \,|\, x_0)$ die Tangente an den Graphen von f, so erhält man durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden die Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(x_0 \,|\, \sqrt{x_0})$. Die Streckenlängen im Steigungsdreieck bleiben beim Spiegeln gleich.

a) Zeigen Sie anhand der Abbildung, dass für alle $x_0 > 0$ $g'(x_0) = \frac{1}{f'(\sqrt{x_0})}$ gilt.

b) Bestätigen Sie mithilfe der Formel aus Teilaufgabe a) die Ableitungsregel für die Wurzelfunktion g.



15 MK **Die Ableitung der Wurzelfunktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ rechnerisch ermitteln**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$.

Abdul möchte die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ rechnerisch nachweisen. Nach dem Aufstellen des Differenzenquotienten kommt er jedoch nicht weiter.

Für alle $x_0 > 0$ und h mit $0 < |h| < |x_0|$ gilt: $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}$

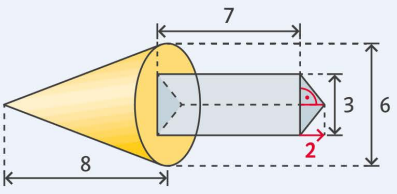
Seine Lehrerin gibt ihm den Tipp, den Differenzenquotienten mit $(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})$ zu erweitern und dann im Zähler des Bruches die dritte binomische Formel anzuwenden. Notieren Sie Abduls Ansatz und setzen Sie ihn fort. Geben Sie zu jedem Schritt eine kurze Erläuterung.

Grundwissen Test

Größen in zusammengesetzten Körpern berechnen

→ **Grundwissen**, Seite 419
Lösungen, Seite 430

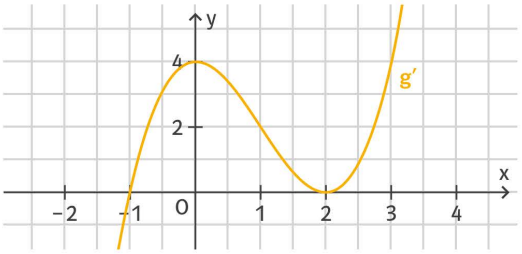
G **16** Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des abgebildeten Körpers (alle Angaben in cm).



Wiederholung: Funktionen untersuchen

Lösungen, Seite 430

1 Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion g' einer Funktion g. Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.



a) g hat ein Extremum bei $x = 0$.
b) g hat eine Wendestelle bei $x = 2$.
c) g ist für $-1 < x < 3$ monoton zunehmend.
d) Der Graph von g hat im Intervall $[-2; 3]$ einen Hoch- und einen Tiefpunkt.

2 Bestimmen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von f.

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$
b) $f(x) = 3x^3 + 4{,}5x^2 + 1{,}5$
c) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{6}{5}x^2 - 3x + 1$

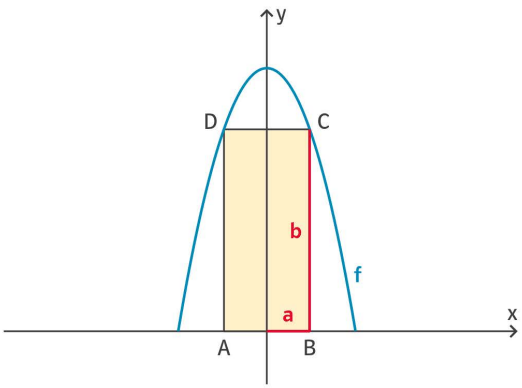
Substitution

3 Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung.

a) $x^4 + 6x^2 - 7 = 0$
b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
c) $-2x^5 + 8x^3 - 6x = 0$
d) $\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3 = 0$
e) $x^2(x^4 + 0{,}5x^2 + 4) = 0$
f) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

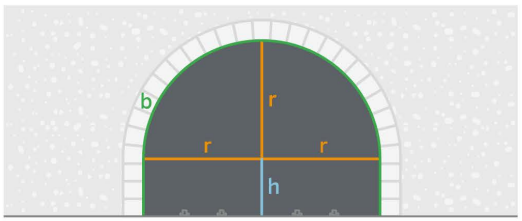
Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 16$. Die Punkte $A(-a\,|\,0)$, $B(a\,|\,0)$, $C(a\,|\,f(a))$ und $D(-a\,|\,f(-a))$ bilden ein Rechteck.



a) Ermitteln Sie eine Zielfunktion A für den Flächeninhalt des Rechtecks, die nur von der Variablen a abhängt. Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_A.
b) Berechnen Sie, für welchen Wert von a der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird. Geben Sie den maximalen Flächeninhalt, die Koordinaten der Eckpunkte und die Seitenlängen des Rechtecks an.

5 Der Querschnitt eines Eisenbahntunnels hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Ermitteln Sie, wie der Radius r des Halbkreises und die Höhe h des Rechtecks gewählt werden müssen, damit bei einer vorgegebenen Querschnittsfläche von $45\,m^2$ die Linie b möglichst kurz ist.



Ganzrationale Funktionen bestimmen

6 Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, deren Graph

a) im Koordinatenursprung einen Hochpunkt hat und durch die Punkte $A(1\,|\,0)$ und $B(2\,|\,4)$ verläuft,
b) punktsymmetrisch zu $O(0\,|\,0)$ ist und in $P(3\,|\,54)$ eine waagerechte Tangente hat.

7 a) Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, deren Graph in $W(1\,|\,-1)$ einen Wendepunkt hat und durch die Punkte $A(0\,|\,1)$ und $B(3\,|\,1)$ verläuft.
b) Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion vierten Grades, deren Graph symmetrisch zur y-Achse ist und durch den Tiefpunkt $T(2\,|\,-14)$ sowie den Punkt $A(1\,|\,-5)$ verläuft.

D4 Check-out

Funktionen mit Parametern untersuchen

→ **Lösungen**, Seite 433

8 Die Temperatur im Heizkessel einer Zentralheizung (in °C) in Abhängigkeit von der Außentemperatur $x \in [-30; 20]$ (in °C) lässt sich näherungsweise durch die Modellfunktion H_s mit $H_s(x) = s \cdot (-0{,}001x^2 - 0{,}09x + 2{,}2) + 25$ beschreiben, wobei $s \in [0; 20]$ durch einen Regler verändert werden kann. In der Werkseinstellung ist $s = 14$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von H_{14} mit einem MMS und skizzieren Sie ihn.

b) Beschreiben Sie, wie sich eine Erhöhung von s auf die Temperatur des Heizkessels auswirkt.

c) Berechnen Sie, welche Temperatur der Heizkessel in der Werkseinstellung bei einer Außentemperatur von 0 °C bzw. −15 °C hat.

d) Bei einer Außentemperatur von −10 °C soll die Kesseltemperatur 60 °C betragen. Bestimmen Sie, für welchen Wert von s dies der Fall ist.

9 Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = -x^2 + 3ax - 6a + 4$.

a) Zeigen Sie, dass alle Graphen von f_a durch den Punkt $P(2|0)$ verlaufen.

b) Bestimmen Sie die Extremstellen von f_a.

c) Ermitteln Sie, für welchen Wert von a der Extrempunkt der Funktionsschar f_a auf der x-Achse bzw. auf der y-Achse liegt.

d) Skizzieren Sie den Graphen für $a = 1$ und $a = 2$.

Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

10 Gegeben sind die Funktionen g mit $g(x) = -3\sqrt{x}$ und h mit $h(x) = \sqrt{x + 2}$ sowie ihre Umkehrfunktionen $\bar{g}$ und $\bar{h}$.

a) Beschreiben Sie, wie die Graphen der Funktionen g und h aus dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ hervorgehen. Skizzieren Sie die Graphen von f und g sowie die Graphen von f und h jeweils in dasselbe Koordinatensystem.

b) Ergänzen Sie die Graphen von $\bar{g}$ und $\bar{h}$ in denselben Koordinatensystemen.

c) Notieren Sie jeweils den Definitions- und den Wertebereich der Funktionen g, h, $\bar{g}$ und $\bar{h}$.

11 **Wahr oder falsch?**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{x + 2} - 3$. Die Umkehrfunktion von f ist $\bar{f}$.

Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

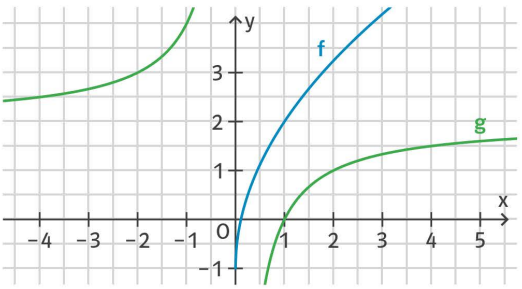
a) Die Funktion f hat die Nullstelle $x_0 = \frac{1}{4}$.

b) Der Graph von $\bar{f}$ verläuft durch den Punkt $A(1|7)$.

c) Die Graphen von f und $\bar{f}$ schneiden sich im Punkt $B(-1|-1)$.

Potenzfunktionen ableiten

12 Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = 3\sqrt{x} - 1$ und $D_f = \mathbb{R}^{>0}$ sowie g mit $g(x) = 2 - \frac{2}{x}$ und $D_g = \mathbb{R}^{*0}$.



a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Ableitungen von f und g.

b) Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangenten an den Graphen von f und g an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

13 Gegeben ist die Funktion f. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f an und untersuchen Sie rechnerisch, ob der Graph von f Extremstellen hat. Verwenden Sie, falls nötig, das Vorzeichenwechselkriterium als hinreichendes Kriterium.

a) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ **b)** $f(x) = x^3 + 6\sqrt{x}$ **c)** $f(x) = x + \frac{1}{x}$ **d)** $f(x) = -2x + \frac{2}{3x^3}$

Weiterführende Aufgaben

Lösungen, Seite 435

14 Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(t) = -2at^3 + 3at^2 + 20t$ $(a > 0)$.

a) Zeigen Sie, dass sich alle Graphen der Schar an der Stelle $t_0 = \frac{3}{2}$ schneiden.

b) Bestimmen Sie die Wendestelle von f_a.

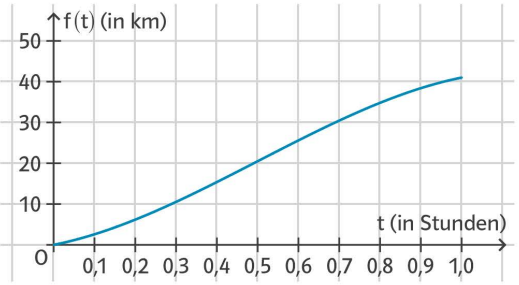
Die Funktion f mit $f(t) = -42t^3 + 63t^2 + 20t$ beschreibt näherungsweise die Strecke in km, die ein Radprofi bis zum Zeitpunkt t (in Stunden) zurückgelegt hat.

c) Zeigen Sie, dass f ein Vertreter der Schar f_a ist und bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a.

d) Geben Sie den Wendepunkt des Graphen von f an und beschreiben Sie die Bedeutung seiner Koordinaten im Sachkontext.

e) Bestimmen Sie $f'(0{,}25)$ sowie $f'(0{,}5)$ und erläutern Sie die Bedeutung im Kontext.

f) Geben Sie verschiedene Möglichkeiten an, Unterschiede zwischen den Werten von $f'(0{,}25)$ und $f'(0{,}5)$ im Sachkontext zu erklären.



g) Die Ursprungsgerade g mit der Gleichung $g(t) = 41t$ kann ebenfalls verwendet werden, um die bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Strecke näherungsweise zu bestimmen. Begründen Sie, warum die Funktion g besser geeignet ist als f, um die Strecke näherungsweise zu bestimmen, die der Radprofi im weiteren Rennverlauf nach t Stunden zurückgelegt hat.

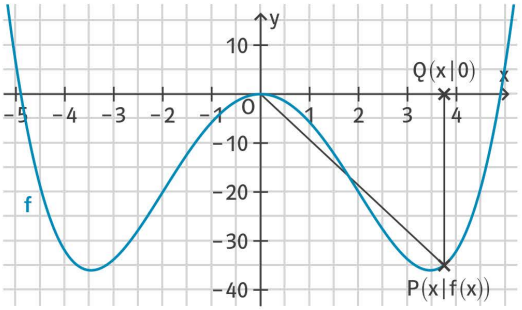
15 **a)** Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, durch den Koordinatenursprung verläuft und den Wendepunkt $W(2\,|\,-20)$ hat.

[Kontrollergebnis: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2$]

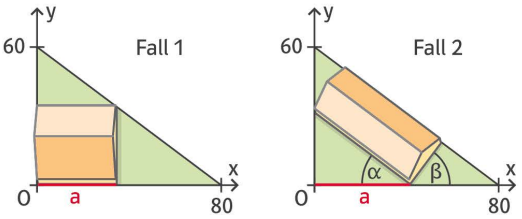
b) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

c) Ermitteln Sie, für welches $x \in [0; 2\sqrt{6}]$ der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten O, P und Q maximal ist.

d) Betrachtet wird die Geradenschar g_m mit $g_m(x) = mx$, $m \in \mathbb{R}$. Prüfen Sie, für welche Werte von m der Graph von g_m eine Tangente an den Graphen von f ist.



16 Auf einem dreieckigen Grundstück soll eine Halle mit einer möglichst großen rechteckigen Grundfläche gebaut werden. Die Abbildung zeigt modellhaft den Teil des Grundstücks, der bebaut werden darf, sowie zwei mögliche Fälle für die Lage der Halle (eine Längeneinheit entspricht 1 m).



a) (1) Zeigen Sie, dass im Fall 1 für den Inhalt A der Grundfläche $A = -0{,}75a^2 + 60a$ gilt.

(2) Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die Grundfläche der Halle im Fall 1 am größten wird. Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an. Berechnen Sie, wie viel Prozent der bebaubaren Fläche in diesem Fall von der Lagerhalle eingenommen werden würde.

b) (1) Zeigen Sie, dass im Fall 2 für den Inhalt A der Grundfläche $A = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \cdot a(80 - a)$ gilt.

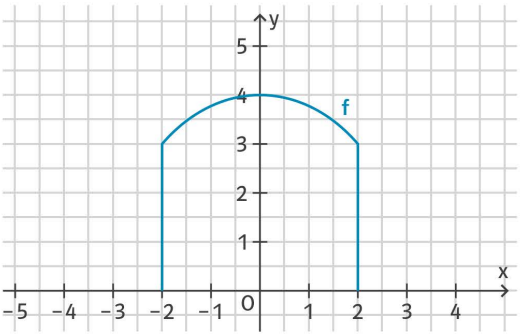
(2) Berechnen Sie die Größe der Winkel α und β.

[Kontrollergebnis: $\alpha \approx 36{,}87°$ und $\beta \approx 53{,}13°$]

(3) Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die Grundfläche der Halle im Fall 2 am größten wird. Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an und berechnen Sie, wie lang die Seiten der Lagerhalle in diesem Fall sind.

→ **Lösungen**, Seite 437

17 Die Abbildung zeigt das Modell eines Torbogens einer Burg. Eine Längeneinheit entspricht 1 m. Das Tor ist 4 m breit und an der höchsten Stelle 4 m hoch.
Der obere Rand des Torbogens wird im Modell ab einer Höhe von 3 m durch eine Funktion f mit $f(x) = \sqrt{b - ax^2}$ mit $D_f = [-2; 2]$ beschrieben.



a) Bestimmen Sie a und b.
[Kontrollergebnis: $b = 16$ und $a = \frac{7}{4}$]

b) Bestimmen Sie die Größe des Steigungswinkels des Funktionsgraphen von f an der Stelle $x_0 = -2$.

c) Das Tor soll mit einer Holzwand geschlossen werden, in die eine rechteckige Tür eingearbeitet wird. Ermitteln Sie, wie hoch eine 2,60 m breite Tür laut Modell maximal sein darf, damit sie in den Torbogen passt.

18 Gegeben sind f_a und g_a mit $f_a(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{a^2}{4}x^2$ und $g_a(x) = -\frac{1}{a}x^2 + \frac{3a}{2}x$ $(a > 0)$.

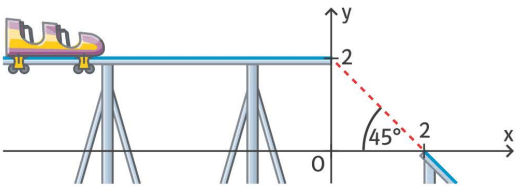
a) Weisen Sie nach, dass die Nullstellen von f_a und g_a für alle $a > 0$ übereinstimmen.

b) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar f_a einen Hoch- und einen Tiefpunkt haben.

c) Zeigen Sie, dass die Tiefpunkte der Graphen von f_a auf dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = -\frac{1}{12}x^3$ liegen.

d) Ermitteln Sie, für welche Werte von a der Hochpunkt der Graphen von g_a oberhalb der Geraden g mit $g(x) = 4{,}5$ liegt.

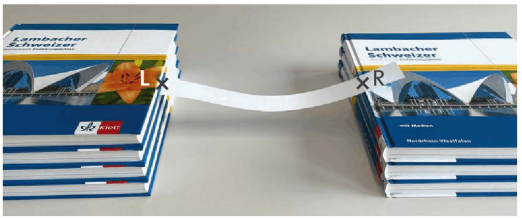
19 Die beiden schematisch abgebildeten Stücke einer Achterbahntrasse (eine Längeneinheit entspricht 1 m) sollen so miteinander verbunden werden, dass die Übergänge zum Verbindungsstück ohne Knick verlaufen. Das Verbindungsstück soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades beschrieben werden.



a) Bestimmen Sie eine mögliche Gleichung der Funktion g und geben Sie an, in welchem Definitionsbereich D_g die Funktion g im Sachkontext als Modellfunktion dient.
[Kontrollergebnis: $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 2$]

b) Ermitteln Sie das globale Minimum von g' und deuten Sie das Ergebnis im Sachkontext.

20 Wird ein Papierstreifen wie in der Abbildung im Punkt L waagerecht eingeklemmt und im gleich hohen Punkt R lose aufgelegt, biegt er sich etwas durch. Bei einem Abstand der Bücher von 20 cm zwischen L und R ergibt sich für einen Streifen in der Mitte zwischen L und R eine Durchbiegung von 1,5 cm.



Der Verlauf des Papierstreifens soll im Profil durch eine ganzrationale Funktion f beschrieben werden, wobei der Punkt L im Modell im Ursprung des Koordinatensystems liegen soll. Eine Längeneinheit soll 1 cm entsprechen.

a) Begründen Sie, weshalb der Graph von f im Punkt R einen Wendepunkt hat.

b) Geben Sie an, welchen Grad f mindestens haben muss. Begründen Sie Ihre Angabe.

c) Bestimmen Sie eine mögliche Gleichung der Funktion f.
[Kontrollergebnis: $f(x) = -0{,}000\,075x^4 + 0{,}003\,75x^3 - 0{,}045x^2$]

d) Berechnen Sie die größte Durchbiegung des Papierstreifens, wenn Sie Ihr Modell aus Teilaufgabe c) verwenden.

Extremwertprobleme lösen

1. Zu untersuchende Größe durch eine **Formel** beschreiben. Diese kann mehrere Variablen enthalten.
2. **Nebenbedingung** ermitteln, die eine Beziehung zwischen den Variablen beschreibt.
3. Zielfunktion ermitteln, die nur von einer Variablen abhängt. Definitionsbereich der Zielfunktion angeben.
4. Globales Minimum bzw. Maximum der Zielfunktion bestimmen. Dabei auf den Definitionsbereich und mögliche Randextrema achten.

Gesucht ist das maximale Produkt zweier Zahlen x und y mit der Summe 16.
Formel für das Produkt: $P = x \cdot y$
Nebenbedingung: $x + y = 16$, *also* $y = 16 - x$
Zielfunktion: $P(x) = x \cdot (16 - x) = 16x - x^2$
Es gilt $P'(x) = 16 - 2x$ *und damit* $P'(8) = 0$.
Da der Graph von P eine nach unten geöffnete Parabel ist, ist $x = 8$ *die globale Maximalstelle.*
Es folgt $y = 16 - 8 = 8$ *und* $P = 8 \cdot 8 = 64$.

Ganzrationale Funktionen bestimmen

1. Den Grad der Funktion festlegen und die entsprechende Funktionsgleichung mit allgemeinen Parametern notieren.
2. Geeignete Bedingungen mithilfe von f, f' und f'' aufstellen.
   Zur Bestimmung einer Funktion n-ten Grades benötigt man mindestens $n + 1$ Bedingungen, aus denen man $n + 1$ lineare Gleichungen erhält.
3. Das lineare Gleichungssystem lösen.
4. Berechnete Parameter in die Funktionsgleichung einsetzen und das Ergebnis überprüfen.

Der Graph einer quadratischen Funktion hat in $x = 2$ *eine waagerechte Tangente und verläuft durch* $P(1|1)$ *und* $Q(2|3)$.
Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 2ax + b$

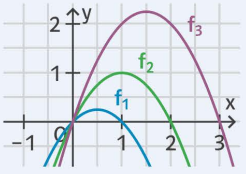
Waagerechte Tangente in $x = 1$	$f'(1) = 0$, *also* $\text{I} \quad 2a + b = 0$
Graph verläuft durch $P(1|1)$	$f(1) = 1$, *also* $\text{II} \quad a + b + c = 1$
Graph verläuft durch $Q(2|3)$	$f(2) = 3$, *also* $\text{III} \quad 4a + 2b + c = 3$

Aus I bis III folgt $a = 2$, $b = -4$ *und* $c = 3$.
Damit erhält man $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

Funktionen mit Parametern untersuchen

Enthält ein Funktionsterm außer der Variablen x noch einen Parameter a, so gehört zu jedem a eine Funktion f_a, die jedem x den Funktionswert $f_a(x)$ zuordnet. Die Funktionen f_a bilden eine **Funktionsschar**.
Beim Ableiten werden die Parameter des Funktionsterms wie eine Zahl behandelt.
Bei einer Funktionsschar kann z.B. der Hochpunkt $H_a(x_a|y_a)$ eines Graphen der Schar vom Parameter a abhängen.

$f_a(x) = -x^2 + ax$
$f_a'(x) = -2x + a$
$f_a''(x) = -2$
Hochpunkt ermitteln:
$f_a'(x) = 0$, *also* $x = \frac{a}{2}$

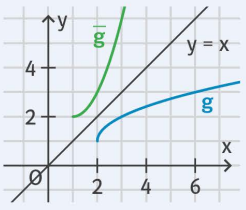


Mit $f_a''\left(\frac{a}{2}\right) = -2 < 0$ *und* $f_a\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$
folgt, dass $H_a\left(\frac{a}{2}\left|\frac{a^2}{4}\right.\right)$ *ein Hochpunkt ist.*

Umkehrfunktionen

Eine Funktion f mit der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f heißt **umkehrbar**, wenn es zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ gibt. Bei einer umkehrbaren Funktion f bezeichnet man die **Umkehrfunktion** mit $\bar{f}$. Der Graph der Umkehrfunktion $\bar{f}$ entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden mit der Gleichung $y = x$. Es gilt $D_{\bar{f}} = W_f$ und $W_{\bar{f}} = D_f$.

Die Funktion g mit $D_g = \mathbb{R}^{>2}$, $W_g = \mathbb{R}^{>1}$ *ist umkehrbar, weil g streng monoton zunehmend ist. Es gilt:* $D_{\bar{g}} = \mathbb{R}^{>1}$, $W_{\bar{g}} = \mathbb{R}^{>2}$



Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$ ist die **Wurzelfunktion** $\bar{f}$ mit $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$. Sie hat den Definitionsbereich $D_{\bar{f}} = \mathbb{R}^{\geq 0}$ und den Wertebereich $W_{\bar{f}} = \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Die Ableitung von Potenzfunktionen

Eine Potenzfunktion f mit $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$, hat die Ableitung $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.

Die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $D_g = \mathbb{R}^{\neq 0}$ hat die Ableitung $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Die Funktion h mit $h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $D_h = \mathbb{R}^{>0}$ hat die Ableitung $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Für f mit $f(x) = \frac{1}{2x}$ *mit* $D_f = \mathbb{R}^{\neq 0}$ *gilt:*
$f(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$ *und* $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}$
Für g mit $g(x) = -2\sqrt{x} + 3$ *mit* $D_g = \mathbb{R}^{>0}$ *gilt:*
$g'(x) = -\left(2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$.

D5 Lösungen
Probeklausur
Kapitel I

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 1

30 min

1 Der Graph der ganzrationalen Funktion f vierten Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Er schneidet die y-Achse an der Stelle $y = 9$, verläuft durch $P(-1|16)$ und hat die Extremstelle $x_0 = 2$.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f.
[Kontrollergebnis: $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$]

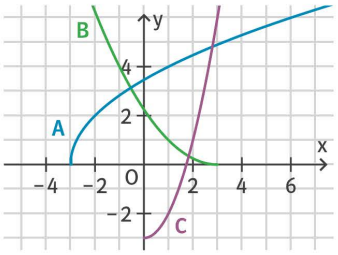
b) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

2 Gegeben ist die umkehrbare Funktion f mit $f(x) = -2\sqrt{x} + 3$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich D_f an.

b) Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen A, B oder C zur Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f gehört. Begründen Sie.

c) Die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 4$ schließt mit den beiden Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck ein. Berechnen Sie seinen Inhalt.

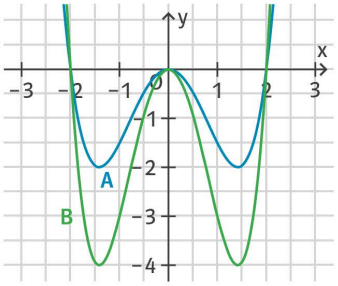


3 Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = x^4 - tx^2$ $(t > 0)$.
Die Abbildung zeigt für einen bestimmten Wert t_0 den Graphen von f_{t_0} sowie den Graphen einer Funktion g mit $g(x) = a \cdot f_{t_0}(x)$ mit $a \in \mathbb{R}^{+0}$.

a) Ermitteln Sie den Wert t_0 anhand der Abbildung.

b) Ordnen Sie die beiden Funktionen jeweils einem Graphen zu und bestimmen Sie a.

c) Zeigen Sie, dass der Graph von f_t für alle $t > 0$ zwei Tiefpunkte hat.



Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 2

40 min

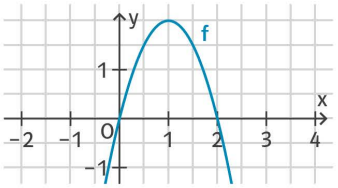
1 Die Abbildung zeigt den Graphen einer quadratischen Funktion f.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung von f.
[Kontrollergebnis: $f(x) = -2x^2 + 4x$]

Für jedes a mit $0 < a < 2$ wird durch die Punkte $A(0|0)$, $B(a|0)$ und $C(a|f(a))$ ein rechtwinkliges Dreieck festgelegt.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks für $a = 1$.

c) Ermitteln Sie, für welchen Wert von a der Inhalt des Dreiecks maximal wird.



2 Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = (x - k)^2 - 4 = x^2 - 2kx + k^2 - 4$.

a) Begründen Sie, dass der minimale Wert von f_k von k unabhängig ist.

b) Ermitteln Sie, für welche $k \in \mathbb{R}$ der Graph keinen gemeinsamen Punkt mit der Geraden g_k mit $g_k(x) = -2kx$ hat.

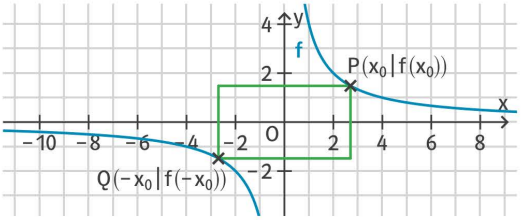
3 Gegeben ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^{+0}$.

a) Begründen Sie anhand der Abbildung, dass die Ableitung für alle $x \in D_f$ negativ ist.

b) Bestimmen Sie alle Stellen x, für die die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -x$ verläuft.

c) Für jedes $x_0 > 0$ ist durch die Eckpunkte $P(x_0|f(x_0))$ und $Q(-x_0|f(-x_0))$ ein achsenparalleles Rechteck festgelegt.

Zeigen Sie, dass diese Rechtecke für alle $x_0 > 0$ gleich groß sind und geben Sie die Größe des Flächeninhalts an.



Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 1

70 min

D5 Lösungen
Probeklausur
Kapitel I

1 Fig. 1 zeigt den Graphen der Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{9}{2}x$.

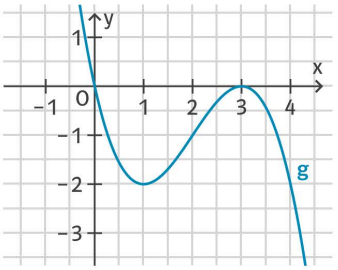


Fig. 1

a) Berechnen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen.

Die Funktion g ist Teil einer Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = -\frac{1}{8}x(6 - kx)^2$ $(k \neq 0)$.

b) Bestimmen Sie rechnerisch, für welchen Wert von k die Funktionen g und f_k übereinstimmen.

c) Notieren Sie die Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k. Geben Sie den Abstand der beiden Nullstellen der Funktion f_1 an.

d) Betrachtet werden die beiden Funktionen f_1 und f_4 der Schar (Fig. 2). Es gibt eine Stelle x_0 zwischen den beiden Schnittstellen der Funktionen, für welche der Abstand zwischen $f_1(x_0)$ und $f_4(x_0)$ maximal wird. Ermitteln Sie x_0.

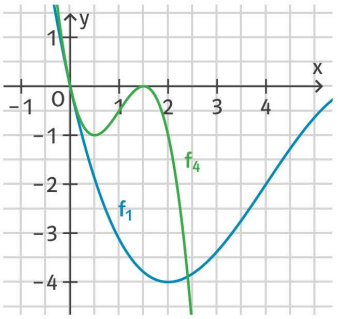
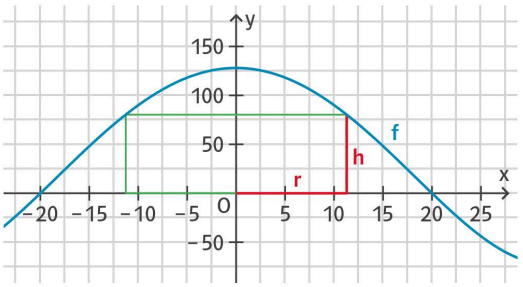


Fig. 2

e) Die Stellen $x_1 = \frac{2}{k}$ und $x_2 = \frac{6}{k}$ sind für alle $k \neq 0$ Extremstellen von f_k. Ermitteln Sie rechnerisch, in welchen Fällen es sich jeweils um eine Minimal- bzw. Maximalstelle handelt.

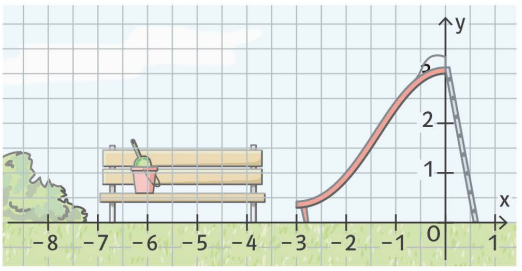
2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 20$ und hat dort die Steigung $m = -9{,}6$. Die y-Achse wird bei $y = 128$ geschnitten.



a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von f.
[Kontrollergebnis: $f(x) = 0{,}0002x^4 - 0{,}4x^2 + 128$]

b) Für x mit $-20 \leq x \leq 20$ beschreibt der Graph die Profillinie eines drehsymmetrischen Werkstücks (eine Längeneinheit entspricht 1 cm). Die y-Achse ist die Drehachse. Aus dem Werkstück soll ein Zylinder mit möglichst großem Volumen ausgeschnitten werden. Ermitteln Sie, wie man den Radius r und die Höhe h des Zylinders wählen muss, damit das Volumen des Zylinders maximal wird.

3 Das seitliche Profil einer Rutsche wird durch eine ganzrationale Funktion g dritten Grades mit $D_g = [-3; 0]$ beschrieben. Der zugehörige Graph hat in $A(0\,|\,3)$ seinen höchsten und in $B(-3\,|\,0{,}3)$ seinen tiefsten Punkt. In beiden Punkten beträgt die Größe des Steigungswinkels 0°.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g.
[Kontrollergebnis: $g(x) = -0{,}2x^3 - 0{,}9x^2 + 3$]

Laut Norm für Spielplatzgeräte darf die maximale Größe des Steigungswinkels höchstens 60° betragen, die durchschnittliche Größe des Steigungswinkels 40°.

b) Zeigen Sie, dass die Rutsche der Norm für Spielplatzgeräte nicht genügt.

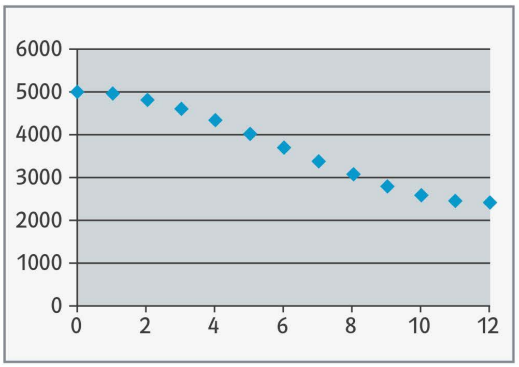
c) Der Hersteller möchte das Modell der Rutsche der Norm anpassen. Bestimmen Sie den minimalen Faktor a, mit dem g in x-Richtung gestreckt werden muss, damit die Rutsche der Norm laut Modell entspricht. Notieren Sie die entsprechende Gleichung und den Definitionsbereich der neuen Modellfunktion f.

D5 Lösungen
Probeklausur
Kapitel I

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 2

70 min

1 Die Abbildung dokumentiert die Anzahl der Autos, die ein Hersteller innerhalb eines Monats jeweils verkauft hat. Im Dezember 2022 ($t = 0$) erreichte das Unternehmen mit 5000 verkauften Autos die bisher höchste Anzahl. Zum Zeitpunkt $t = 12$ (Dezember 2023) ist die Anzahl der verkauften Autos auf den bisher tiefsten Wert von 2408 verkauften Autos gesunken.
Mithilfe einer Werbemaßnahme soll die Zahl der verkauften Autos in den Folgemonaten wieder ansteigen.



a) Bestimmen Sie mithilfe der angegebenen Extrempunkte eine ganzrationale Modellfunktion dritten Grades, die den Sachverhalt beschreibt.
[Kontrollergebnis: $f(t) = 3t^3 - 54t^2 + 5000$]

b) Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt innerhalb des betrachteten Zeitraums der Rückgang der Verkaufszahlen am stärksten ist.

c) Ein Mitarbeiter modelliert den Sachverhalt durch die Modellfunktion g mit $g(t) = -0{,}16t^4 + 6{,}84t^3 - 77{,}04t^2 + 5000$. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Extrempunkte des Graphen von g zu den oben angegebenen Verkaufszahlen passen.

d) Aufgrund einer Marktanalyse geht man davon aus, dass die Anzahl der verkauften Autos im nächsten Jahr, d.h. für $12 < t \leq 24$ bis etwa August leicht steigt. Der Höchstwert von 5000 verkauften Autos wird voraussichtlich jedoch nicht wieder erreicht. Untersuchen Sie, welche der beiden Funktionen dies angemessen berücksichtigt und somit für eine Prognose der verkauften Autos für $12 < t \leq 24$ besser geeignet ist.

2 Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 3x - 8$ $(a > 0)$ sowie die lineare Funktion g mit $g(x) = -3x + \frac{11}{2}$.

a) In Fig. 1 ist der Graph der Funktion f_a für ein $a \in \mathbb{N}$ abgebildet. Ermitteln Sie den Wert von a rechnerisch.

b) Berechnen Sie die Wendestelle von f_a in Abhängigkeit von a.

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass es ein $a > 0$ gibt, sodass der Graph von g die Tangente an den Graphen von f_a an der Stelle $x_0 = 3$ ist. Geben Sie a an.

d) Durch die Eckpunkte $O(0\,|\,0)$ und $P(c\,|\,g(c))$ wird für jedes $c \in \left]0; \frac{11}{6}\right[$ ein achsenparalleles Rechteck festgelegt. Ermitteln Sie $c \in \left]0; \frac{11}{6}\right[$ so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird (Fig. 2). Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

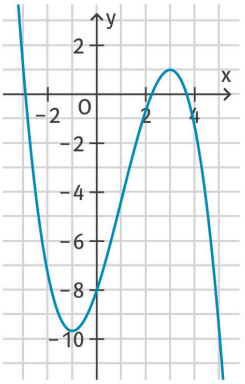


Fig. 1

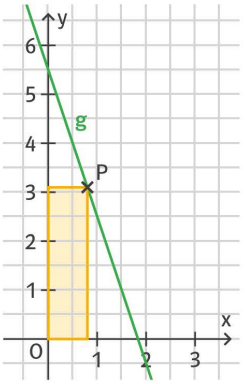


Fig. 2

Betrachtet wird nun die Schar h_b mit $h_b(x) = bx^3 + 7x - 9$ $(b \neq 0)$.

e) Bestimmen Sie rechnerisch den Wert von b, für den die Tangenten an die Graphen von f_2 und h_b an der Stelle $x = -1$ parallel verlaufen.

f) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt $W(0\,|\,-9)$ für alle $b \neq 0$ ein Wendepunkt des Graphen von h_b ist.

g) Zeigen Sie, dass der Graph von h_b keine Extrempunkte hat, wenn $b > 0$ ist.

h) Ermitteln Sie, für welche Werte $a > 0$ und $b \neq 0$ die Graphen von f_a und h_b keine gemeinsamen Punkte haben.

Ortskurven

Auftrag 1: Lage von Extrempunkten mit einem MMS erforschen

1 Gegeben sind die Gleichungen der Funktionsscharen f_k, g_k und h_k mit $k \in \mathbb{R}$.

$f_k(x) = x^2 - 2kx + 2$ $\quad$ $g_k(x) = kx^2 - 2x + 3$ $\quad$ $h_k(x) = -x^2 + 4kx - 1$

Beschreiben Sie für jede Schar, welche Gemeinsamkeiten der Graphen sich jeweils am Funktionsterm ablesen lassen. Prüfen Sie Ihre Angaben mit einem MMS.

2 Mithilfe eines MMS wurde die Spur der Extrempunkte der Graphen von f_k gezeichnet (Fig. 1). Die dabei erzeugten Punkte scheinen alle auf dem Funktionsgraphen einer quadratischen Funktion zu liegen.
Stellen Sie anhand der Spurpunkte in Fig. 1 die Gleichung einer Funktion f auf, die zu diesem Graphen gehören könnte.

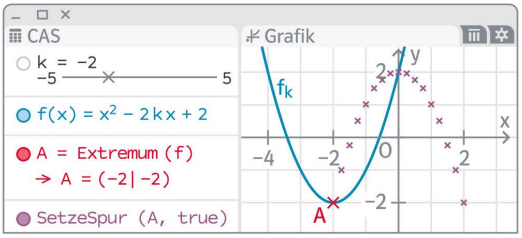


Fig. 1

3 Untersuchen Sie mit einem MMS, ob es auch für die Funktionsscharen g_k (Fig. 2) und h_k (Fig. 3) eine Funktion g bzw. h gibt, auf deren Graphen alle Extrempunkte der Schar liegen. Notieren Sie gegebenenfalls jeweils eine mögliche Funktionsgleichung.

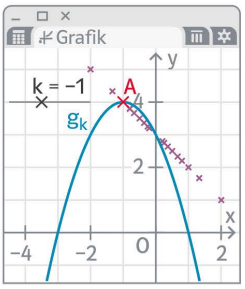


Fig. 2

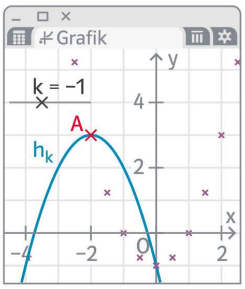


Fig. 3

Auftrag 2: Ergebnisse rechnerisch prüfen

1 Ermitteln Sie jeweils die Art und Lage der Extrempunkte der Funktionsgraphen von f_k, g_k und h_k in Abhängigkeit von k.

2 Prüfen Sie, ob die Extrempunkte alle auf den in Auftrag 1 ermittelten Graphen liegen. Korrigieren Sie gegebenenfalls die in Auftrag 1 angegebenen Funktionsgleichungen.

Auftrag 3: Die Lage von Extrempunkten weiterer Funktionsscharen untersuchen

Gegeben sind die Funktionsscharen g_t mit $g_t(x) = tx^2 + x$ und h_t mit $h_t(x) = tx^2 - 2x + 1$ mit $t > 0$.

1 Berechnen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte der Graphen von g_t und h_t in Abhängigkeit von t.

2 Weisen Sie nach, dass die Extrempunkte der Graphen von g_t bzw. h_t jeweils auf einer Geraden liegen. Geben Sie jeweils die Gleichung der Geraden an.

Auftrag 4: Gleichungen beliebiger Ortskurven rechnerisch ermitteln

Für die Tiefpunkte der Graphen von f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{3a}x^3 - x^2$ $(a > 0)$ gilt $T_a\left(2a \,\middle|\, -\frac{4}{3}a^2\right)$.

Durchläuft der Parameter a alle zugelassenen Werte, so liegen alle Tiefpunkte auf einer Kurve (vgl. Fig. 1). Diese Kurve heißt **Ortskurve** oder **Ortslinie** der Tiefpunkte T_a.
Eine Gleichung hierzu erhält man wie folgt:
1. Schritt: x-Koordinate des Tiefpunktes nach dem Parameter umformen:

Mit $x = 2a$ erhält man $a = \frac{x}{2}$.

2. Schritt: Einsetzen des Terms in die y-Koordinate des Tiefpunktes:

$a = \frac{x}{2}$ in $y = -\frac{4}{3}a^2$ ergibt

$y = -\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{4} = -\frac{1}{3}x^2$

Alle Tiefpunkte liegen auf dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{3}x^2$.

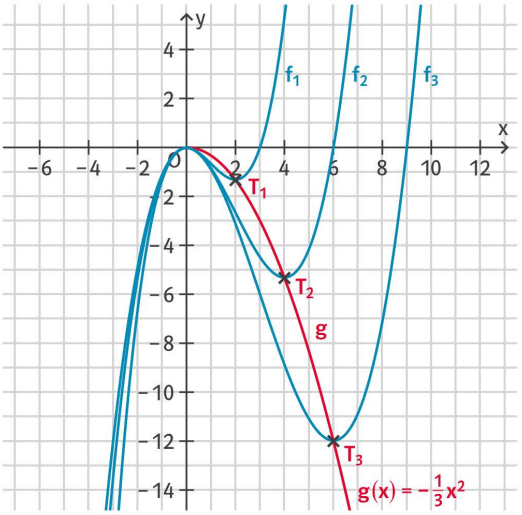


Fig. 1

1 Gegeben ist die Funktionsschar g_a mit $g_a(x) = x^2 - ax^3 + 1$ $(a \neq 0)$.
Zeigen Sie, dass alle Graphen von g_a einen Wendepunkt haben.
Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve aller Wendepunkte.

2 Gegeben ist die Funktionsschar h_a mit $h_a(x) = x^4 - ax^2$ $(a > 0)$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve
a) der Tiefpunkte des Graphen von h_a,
b) der Wendepunkte des Graphen von h_a.

Auftrag 5: Ortskurven durch gezieltes Probieren ermitteln

Merlin erklärt an einem Beispiel, wie er ohne Umformungen die Gleichung einer Ortskurve durch die Punkte $P_a\left(\frac{1}{2}a \,\middle|\, \frac{3}{4}a^3\right)$, $a \in \mathbb{R}$ erhält:

„An den Exponenten erkenne ich, dass ich die x-Koordinaten hoch 3 nehmen muss.
Mit x^3 komme ich aber noch nicht auf den gewünschten Term für y. Ich muss ihn noch leicht verändern."

Merlins Notizen:

Gesucht: Ortskurve durch $P_a\left(\frac{1}{2}a \,\middle|\, \frac{3}{4}a^3\right)$

$x^3 = \left(\frac{1}{2}a\right)^3 = \frac{1}{8}a^3$

$y = \frac{3}{4}a^3 = \frac{6}{8}a^3$

Ortskurve: $y = 6x^3$

1 Erläutern Sie Merlins Vorgehen anhand seiner Notizen.

2 Wenden Sie Merlins Methode zum Aufstellen der gesuchten Ortskurven an.

A $f_b(x) = -bx^2 + b^2x$ $(b > 0)$
gesucht: Ortskurve aller Hochpunkte

B $g_b(x) = \frac{1}{b}x^3 - 6x^2$ $(b > 0)$
gesucht: Ortskurve aller Tiefpunkte

II Integralrechnung

Das können Sie bald

- Gesamtbestände von Größen anhand von Änderungsraten rekonstruieren
- Stammfunktionen bestimmen
- mithilfe der Integralrechnung Flächeninhalte bestimmen
- mithilfe der Integralrechnung Rauminhalte von Rotationskörpern ermitteln

Check-in

Schätzen Sie sich ein:

	☺	😐	☹
1. Ich kann mittlere und momentane Änderungsraten bestimmen.	☐	☐	☐
2. Ich kann den Graphen einer Ableitungsfunktion skizzieren.	☐	☐	☐
3. Ich kann anhand des Graphen einer Ableitungsfunktion f′ auf die Eigenschaften des Graphen von f schließen.	☐	☐	☐
4. Ich kann Nullstellen einer ganzrationalen Funktion sowie die Schnittpunkte von zwei Funktionsgraphen bestimmen.	☐	☐	☐
5. Ich kann die Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f bestimmen.	☐	☐	☐

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen**, Seite 414
zu 2. **Grundwissen**, Seite 414
zu 3. **Grundwissen**, Seite 414
zu 4. **Grundwissen**, Seite 411
zu 5. **Grundwissen**, Seite 414

Test

Lösungen, Seite 439

1 **Mittlere und momentane Änderungsraten bestimmen**

Ein Stein wird fallengelassen. Die Funktion s mit $s(t) = 5t^2$ soll verwendet werden, um die Strecke (in Metern) zu bestimmen, die der Stein innerhalb von t Sekunden zurücklegt.

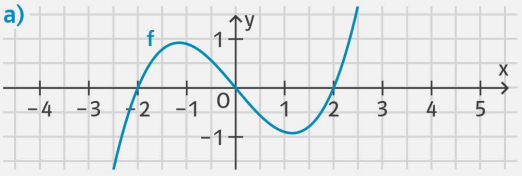
a) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Steins in den ersten zwei Sekunden.

b) Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit zwei Sekunden nach dem Loslassen.

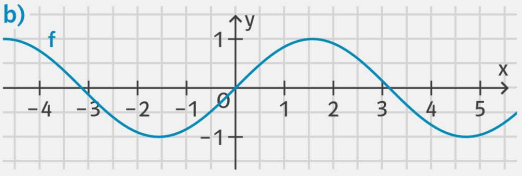
2 **Den Graphen einer Ableitungsfunktion skizzieren**

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f′ zu dem gegebenen Graphen von f.

a)



b)



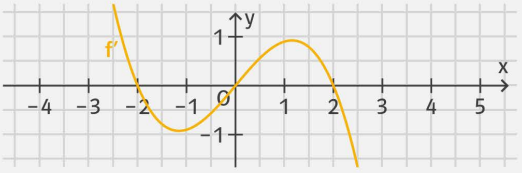
3 **Zusammenhänge zwischen dem Graphen einer Ableitungsfunktion f′ und f erkennen**

Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f. Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Der Graph von f hat an der Stelle $x = 0$ einen Hochpunkt.

b) Der Graph von f hat genau einen Hochpunkt.

c) Der Graph von f hat zwei Wendepunkte.



4 **Nullstellen einer Funktion und Schnittpunkte zweier Graphen bestimmen**

a) Bestimmen Sie jeweils die Nullstellen der Funktion f.

(1) $f(x) = x^2 + 5x + 4$ (2) $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ (3) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 2x$

b) Bestimmen Sie jeweils die Schnittpunkte der Graphen von f und g.

(1) $f(x) = x;\ g(x) = x^2 - 2x + 2$ (2) $f(x) = x^3 - x;\ g(x) = -x^2 + 5x$

5 **Ableitungsfunktion bestimmen**

Geben Sie die Funktionsgleichung der ersten Ableitung von f an.

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x$ b) $f(x) = 4\sqrt{x}$ c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

D6 Check-in

Bedeutung von Flächeninhalten

Lerneinheit 1
Seite 52

1 Bei einem Handballspiel werden die Zuschauer 1,5 h vor Spielbeginn in die Halle gelassen.

2 Ein Auto wird über 4 m mit einer sich verändernden Kraft angeschoben.

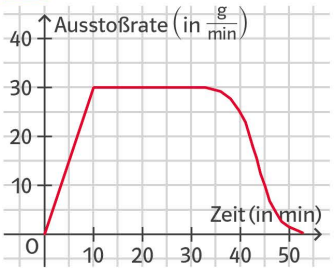
3 In einer Messstelle einer Wasserleitung wird zu jedem Zeitpunkt die durchfließende Wassermenge gemessen.

4 Die Abflussmenge eines Flusses pro Minute wird an einer Messstelle gemessen.

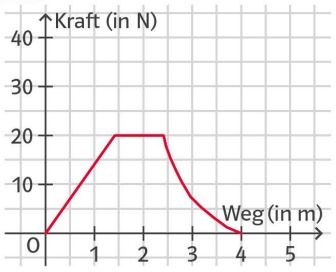
5 Ein Auto fährt ca. 30 Minuten lang auf einer wenig befahrenen Autobahnstrecke.

6 Im Kamin eines Kraftwerks wird ständig die in der Abluft enthaltene Menge eines Schadstoffs gemessen.

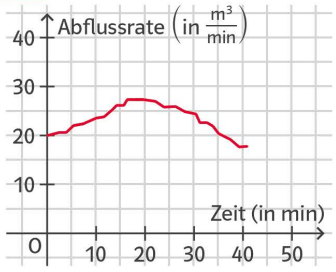
A



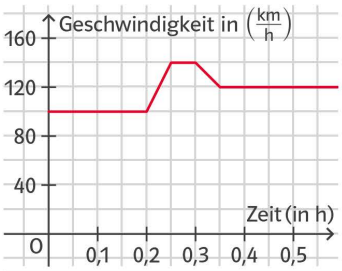
B



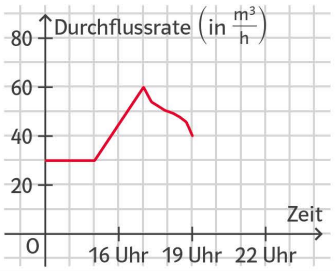
C



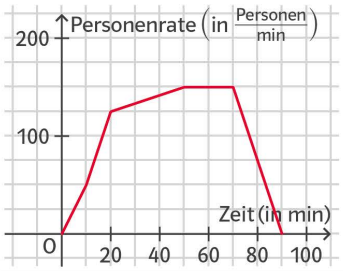
D



E



F



Ergebnis 1 ca. 950 m³

Ergebnis 2 ca. 9750 Personen

Ergebnis 3 ca. 251 m³

Ergebnis 4 ca. 47 Nm

Ergebnis 5 ca. 57,5 km

Ergebnis 6 ca. 1110 g

Aufträge

1. Ordnen Sie jeweils einer Situation 1 bis 6 einen Graphen A bis D und ein Ergebnis zu. Formulieren Sie zu den Ergebnissen jeweils eine passende Aufgabenstellung sowie einen Antwortsatz.

2. Kontrollieren Sie, ob die Werte bei den Ergebnissen stimmen können. Erläutern Sie, wie Sie dabei vorgehen. Notieren Sie Ihre Rechnungen.

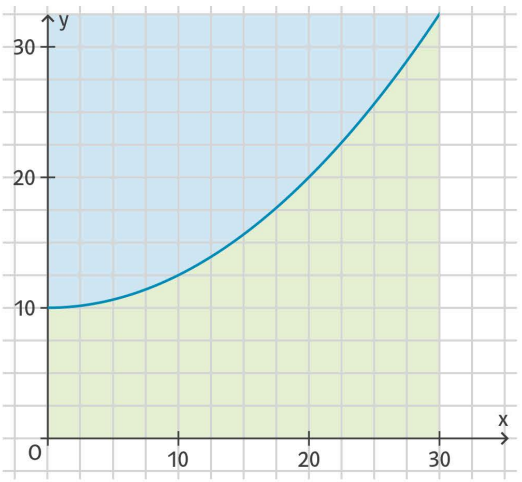
3. Erläutern Sie, wie die Einheiten der beiden Achsen mit der Bedeutung des Flächeninhalts zwischen der ersten Achse und dem Graphen zusammenhängen.

Weiterführender Auftrag

Erstellen Sie eine Übersicht (z. B. Tabelle oder Mindmap), welche Bedeutung die Inhalte der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse in den einzelnen Situationen haben.
Geben Sie mindestens eine weitere Situation an, bei der man den Flächeninhalt im Sachzusammenhang deuten kann. Erstellen Sie hierzu eine passende Skizze und erläutern Sie die Bedeutung des Flächeninhalts.

Flächeninhalte näherungsweise bestimmen

Herr Sell möchte das in der Abbildung grün dargestellte Grundstück für 200 € pro Quadratmeter verkaufen (eine Einheit entspricht einem Meter). Das Grundstück wird an einem Ende von einem parabelförmigen Wassergraben begrenzt. Er möchte einen fairen Preis anbieten, aber nicht zu wenig Geld erhalten. Frau Buy ist an dem Grundstück interessiert. Sie möchte einen gerechten Preis zahlen, aber keinesfalls zu viel. Bestimmen Sie mithilfe von Näherungswerten für den Inhalt der Grundstücksfläche passende Preise aus Sicht von Herrn Sell und Frau Buy.
Auf welchen Preis könnte man sich einigen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Lerneinheit 2
Seite 56

Sie können die Klasse auch in Verkäufer und Käufer aufteilen und sich dann über die Ergebnisse austauschen bzw. in Form eines Rollenspiels den Preis verhandeln.

Flächeninhalte – Funktionsterme finden

Lerneinheit 3
Seite 62

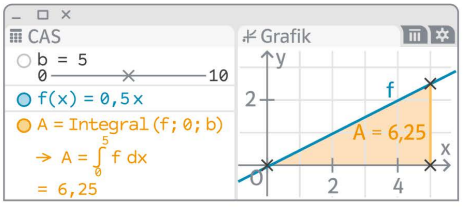
Forschungsauftrag 1: Flächen unterhalb von Ursprungsgeraden

1. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f, g und h mit $f(x) = \frac{1}{2}x$, $g(x) = 2x$ und $h(x) = 3x$.

2. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die die Graphen mit der x-Achse im Intervall $[0; b]$ für die Grenzen $b = 1$, $b = 2$, …, $b = 5$ einschließen. Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.

3. Bestimmen Sie jeweils eine Formel für eine beliebige obere Grenze b.

4. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse der Aufgaben 2 und 3 mit einem MMS.

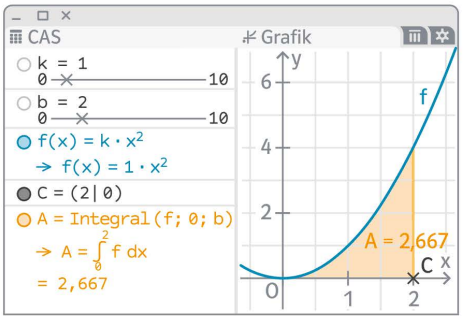


	[0; 1]	[0; 2]	[0; 3]	[0; 4]	[0; 5]	[0; b]
$f(x) = \frac{1}{2}x$					$\frac{25}{4}$	
$g(x) = 2x$						
$h(x) = 3x$						

Tipp:
Um eine Formel zu finden, ist es hilfreich, Kommazahlen als Bruch darzustellen.
Statt 6,25 notiert man $\frac{25}{4}$ in der Tabelle, denn $6{,}25 = 6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$.
Man sollte dann innerhalb einer Zeile stets denselben Nenner verwenden und auch ganze Zahlen mit diesem Nenner notieren.

Forschungsauftrag 2: Flächen unterhalb der Graphen von Potenzfunktionen

Untersuchen Sie die Inhalte der Flächen, die von den Graphen von Potenzfunktionen und der x-Achse im Intervall $[0; b]$ eingeschlossen werden. Notieren Sie die Ergebnisse in einer Tabelle. Stellen Sie jeweils eine Vermutung für eine Formel für eine beliebige obere Grenze b auf.



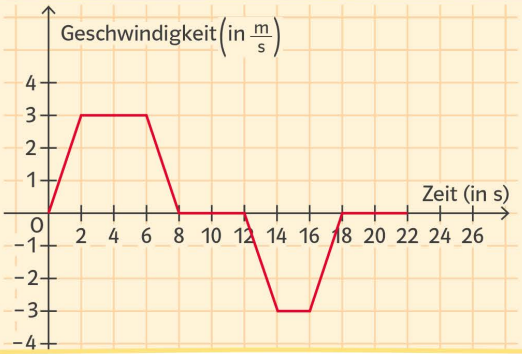
f(x)	[0; 1]	[0; 2]	[0; 3]	…	[0; b]
x^2		$\frac{8}{3}$			
$2x^2$					
…					
x^3					
$2x^3$					
…					

Auch hier ist es hilfreich, Kommazahlen in der Tabelle als Bruch einzutragen, um Zusammenhänge zu erkennen.
Es gilt z. B. $2{,}\overline{6} = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

Welche Formel erhält man für eine beliebige Potenzfunktion $f(x) = kx^n$? Stellen Sie eine Vermutung auf und überprüfen Sie anhand von Beispielen, ob diese stimmen kann.

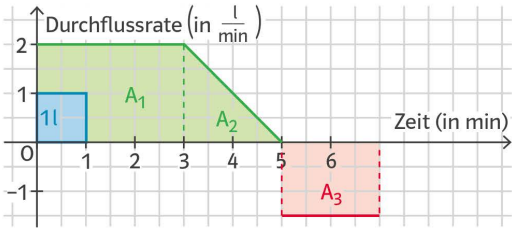
1 Rekonstruktion einer Größe

Der Graph wird als Modell zur Beschreibung der Geschwindigkeit eines Aufzugs während einer Fahrt in einem Hochhaus verwendet. Fährt der Aufzug nach oben, ist die Geschwindigkeit positiv.
Welche Informationen über die Fahrt bezüglich Dauer, Höhenunterschiede, Stockwerkshöhen usw. können Sie dem Graphen entnehmen?



In der Analysis war bisher die Ableitung der zentrale Begriff. Bei einer gegebenen Größe entspricht sie der momentanen Änderungsrate. Liegt umgekehrt nur die momentane Änderungsrate einer Größe vor, kann man daraus die Größe rekonstruieren.

In einem Tank befinden sich zu Beginn 15 l Wasser. Er wird durch dieselbe Leitung befüllt und entleert. Die Abbildung zeigt den Graphen ihrer momentanen Durchflussrate. Mithilfe der Durchflussrate lässt sich das Wasservolumen bestimmen, das in einem bestimmten Zeitraum durch die Leitung zu- oder abfließt.



In den ersten drei Minuten fließen $2\frac{\text{l}}{\text{min}} \cdot 3\,\text{min} = 6\,\text{l}$ in den Tank. Im Intervall $[3; 5]$ beträgt die mittlere Zuflussrate $1\frac{\text{l}}{\text{min}}$. Es fließen somit innerhalb von zwei Minuten $1\frac{\text{l}}{\text{min}} \cdot 2\,\text{min} = 2\,\text{l}$ in den Tank. In den letzten beiden Minuten fließen $1{,}5\frac{\text{l}}{\text{min}} \cdot 2\,\text{min} = 3\,\text{l}$ ab.
Die Maßzahlen des berechneten zu- und abgeflossenen Wasservolumens entsprechen jeweils den Maßzahlen der Flächeninhalte A_1, A_2 und A_3. Die Tabelle fasst diesen Zusammenhang sowie die Auswirkung des Zu- und Abflusses auf die Wassermenge zusammen.

Intervall	Durchflussrate	geometrische Betrachtung	kontextbezogene Betrachtung	Menge im Tank
$[0; 3]$	positiv	Fläche A_1 oberhalb der x-Achse mit Inhalt 6 FE	Zufluss einer Menge von 6 l	15 l + 6 l = 21 l
$[3; 5]$	positiv	Fläche A_2 oberhalb der x-Achse mit Inhalt 2 FE	Zufluss einer Menge von 2 l	21 l + 2 l = 23 l
$[5; 7]$	negativ	Fläche A_3 unterhalb der x-Achse mit Inhalt 3 FE	Abfluss einer Menge von 3 l	23 l − 3 l = 20 l

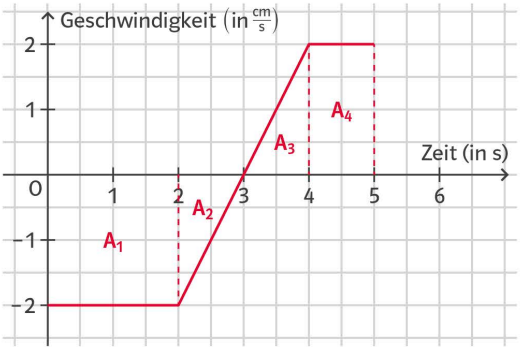
Man erkennt: Ist die Änderungsrate einer Größe durch einen Graphen gegeben, lässt sich die Gesamtänderung der Größe durch den Inhalt der Fläche bestimmen, die der Graph der Änderungsrate mit der x-Achse einschließt. Man spricht von **orientierten Flächeninhalten**, da es entscheidend ist, ob die Flächen oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen. Man zählt die Flächeninhalte oberhalb der x-Achse positiv. Die Flächeninhalte unterhalb der x-Achse zählen negativ, da diese eine Abnahme darstellen.

Rekonstruktion von Größen mithilfe der momentanen Änderungsrate
Ist der Graph einer momentanen Änderungsrate gegeben, so kann man die **Gesamtänderung** der zugehörigen Größe rekonstruieren, indem man den **orientierten Flächeninhalt** zwischen dem Graphen und der x-Achse bestimmt.

Zur Berechnung des Bestandes am Ende eines betrachteten Zeitraums, muss man auch den Bestand zu Beginn des Zeitraums berücksichtigen.

Beispiel 1 **Zurückgelegte Strecken mithilfe gegebener Geschwindigkeiten rekonstruieren**

Bei einem Experiment wird die Geschwindigkeit v (in $\frac{cm}{s}$) einer kleinen Kugel in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) aufgezeichnet. Bei der Bewegung der Kugel nach rechts wird die Geschwindigkeit mit einem positiven Vorzeichen versehen, bei der Bewegung nach links mit einem negativen. Bestimmen Sie mithilfe des orientierten Flächeninhalts zwischen dem Graphen von v und der Zeitachse, wo sich die Kugel 5 Sekunden nach dem Start (bei $t = 0$) befindet.



Um den orientierten Flächeninhalt zu bestimmen, achtet man auf die Skalierung und die Beschriftung der Achsen. Hier entsprechen 4 Kästchen einem Zentimeter.

Lösung

Eine Flächeneinheit entspricht einem zurückgelegten Weg von $1\frac{cm}{s} \cdot 1s = 1cm$.

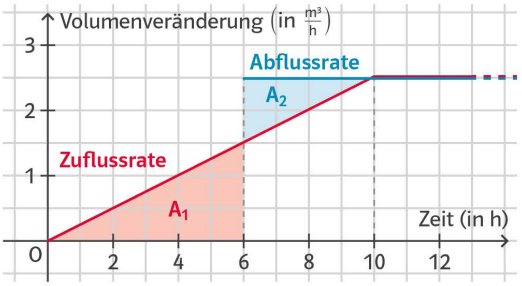
Zur weiteren Berechnung unterteilt man die Fläche in Rechtecke und Dreiecke.

A_1	A_2	A_3	A_4
4 FE	1 FE	1 FE	2 FE
links	*links*	*rechts*	*rechts*

Es gilt $-A_1 - A_2 + A_3 + A_4 = -2\,FE$, also befindet sich die Kugel 2 cm links vom Startort.

Beispiel 2 **Volumen anhand von Zufluss- und Abflussraten rekonstruieren**

In einer Chemiefabrik wird die Produktion einer Chemikalie bis zum Ausstoß von $2{,}5\frac{m^3}{h}$ hochgefahren. Die Chemikalie fließt in einen leeren Tank, aus dem nach sechs Stunden konstant $2{,}5\frac{m^3}{h}$ entnommen werden. Die Zu- und Abflussrate dieses modellhaft betrachteten Vorgangs sind grafisch dargestellt. Beschreiben Sie für $0 \leq t \leq 12$ die Volumenänderung der Chemikalie im Tank.



Erfolgen der Zufluss und der Abfluss in getrennten Leitungen, kann man sie beide positiv darstellen.

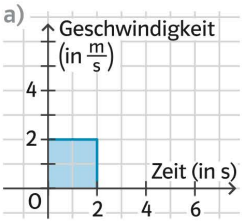
Lösung

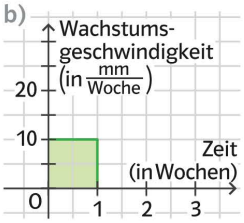
Ein Kästchen entspricht einem Volumen von $1h \cdot 0{,}5\frac{m^3}{h} = 0{,}5\,m^3$.

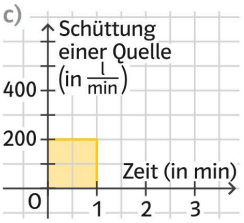
0 bis 6 Stunden: *A_1 = 9 Kästchen* $9 \cdot 0{,}5\,m^3 = 4{,}5\,m^3$ Es gibt nur einen Zufluss. Nach 6 Stunden sind also $4{,}5\,m^3$ im Tank.	6 bis 10 Stunden: *A_2 = 20 − 16 = 4 Kästchen* Das Volumen nimmt um $2\,m^3$ ab. Nach 10 Stunden sind $2{,}5\,m^3$ im Tank.	Ab 10 Stunden: *Zu- und Abflussrate sind gleich groß.* Die Menge im Tank bleibt konstant bei $2{,}5\,m^3$.

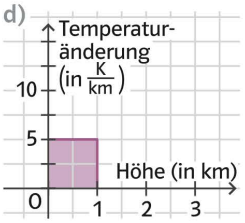
Aufgaben

○ **1** Geben Sie an, welcher Maßangabe vier Kästchen entsprechen.

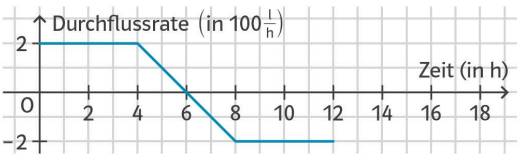
a)


b)


c)


d)


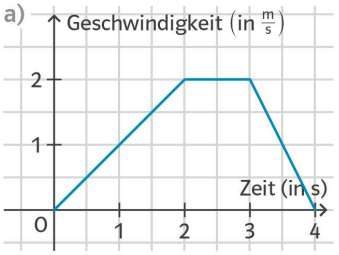
○ **2** Ein zu Beginn leerer Tank wird durch eine Leitung befüllt bzw. geleert. Berechnen Sie die Wassermenge im Tank nach 6 und nach 12 Stunden.



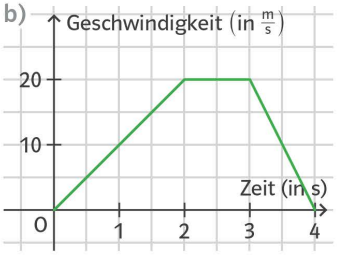
○ **3** Zur Beschreibung der Geschwindigkeit eines Körpers wird der abgebildete Graph genutzt. Berechnen Sie, welchen Weg der Körper dem Modell zufolge in vier Sekunden zurücklegt.

→ **Lerntipp** Seite 53, Beispiel 1

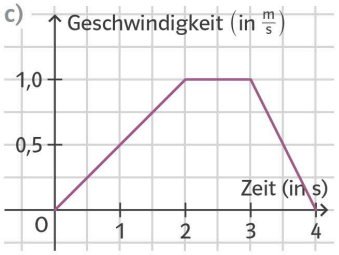
a)



b)



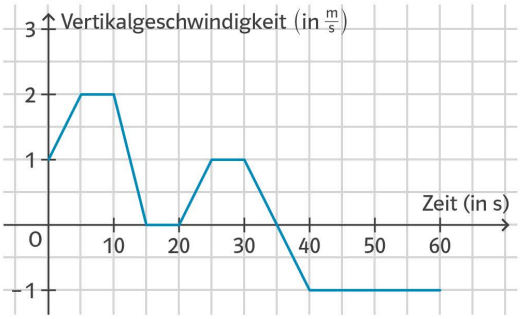
c)



○ **4** Der Graph in der Abbildung stellt für einen Zeitraum von 60 Sekunden in vereinfachter Form die Vertikalgeschwindigkeit v eines Heißluftballons dar (t in s, v(t) in $\frac{m}{s}$).

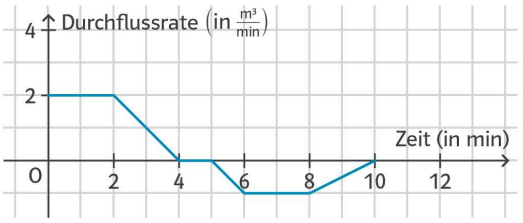
a) Beschreiben Sie anhand des Graphen die vertikale Bewegung des Ballons.

b) Beurteilen Sie, ob der Ballon nach 60 Sekunden höher über dem Boden ist als zu Beginn. Ermitteln Sie die Höhendifferenz zwischen diesen Zeitpunkten.



○ **5** Ein Behälter mit Salzsäurelösung wird über eine Leitung befüllt und entleert. Zu Beginn befinden sich 17 m^3 Lösung im Behälter. Der Graph gibt modellhaft die Durchflussrate der Salzsäurelösung in der Leitung an.

a) Berechnen Sie, wie viele m^3 Lösung der Behälter nach 5 min bzw. 10 min enthält.



b) Nach 10 Minuten wird der Behälter mit einer Abflussrate von 0,5 $\frac{m^3}{min}$ geleert. Ermitteln Sie den Zeitpunkt, ab dem der Behälter leer ist.

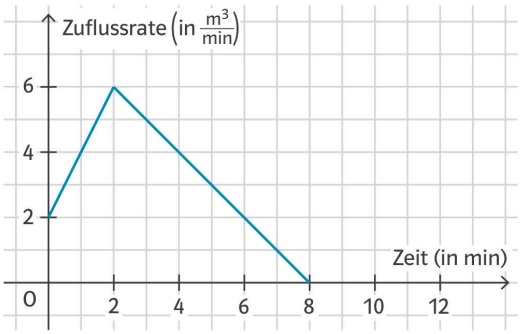
Test 1

→ **Lösungen**, Seite 439

○ **6** In einem Tank befinden sich 10 m^3 einer Flüssigkeit. Die Abbildung zeigt näherungsweise, wie der Tank befüllt wird.

a) Bestimmen Sie die Menge der Flüssigkeit, die am Ende des Füllprozesses in dem Tank enthalten ist.

b) Danach wird die Flüssigkeit mit einer konstanten Abflussrate von 3 $\frac{m^3}{min}$ aus dem Tank geleitet. Ermitteln Sie, wie lange es dauert, bis der Tank leer ist.



◒ **7** Cinja behauptet: „Welche Bedeutung der orientierte Flächeninhalt hat, kann man ganz leicht herausfinden. Man muss nur die Einheiten für die Größen auf der x-Achse und der y-Achse miteinander multiplizieren."

a) Erläutern Sie, was Cinja meint.

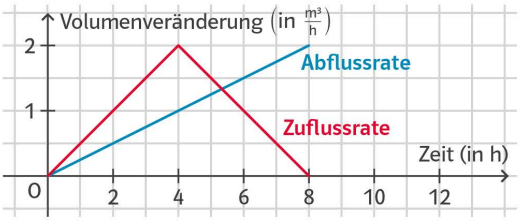
b) Vervollständigen und ergänzen Sie die Tabelle. Notieren Sie zu jeder Zeile auch einen passenden Sachzusammenhang.

x-Achse	y-Achse	orientierte Fläche
Zeit (in s)	Zufluss (in $\frac{l}{s}$)	
Zeit (in h)	Geschwindigkeit (in $\frac{km}{h}$)	
…		

8 Skizzieren Sie die Graphen von drei stückweise linearen Funktionen so, dass der orientierte Flächeninhalt im Intervall $[0; 6]$ zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse 6 FE beträgt.

Der Graph einer stückweise linearen Funktion setzt sich aus geradlinigen Abschnitten zusammen.

9 Ein Tank besitzt eine Zufluss- und eine Abflussleitung. In der Figur sind die dazugehörigen momentanen Durchflussraten dargestellt.
Zu Beginn sind 2 Liter Wasser im Tank.
Bestimmen Sie, wie viele Liter Wasser sich nach 2, 4, 6 und 8 Stunden im Tank befinden.

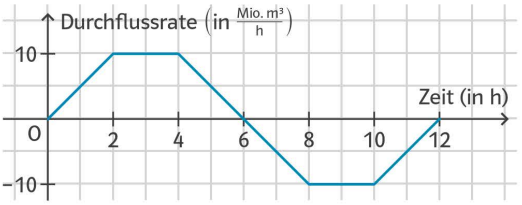


Lerntipp
Seite 53, Beispiel 2

10 In einem Gezeitenkraftwerk strömt bei Flut das Wasser in einen Speicher und bei Ebbe wieder heraus. Das durchfließende Wasser treibt dabei Turbinen zur Stromerzeugung an. Der Graph zeigt vereinfacht die Durchflussrate vom Meer in den Speicher.

a) Erläutern Sie, wie man den Flächeninhalt eines Kästchens im Sachkontext deuten kann.

b) Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Wassermenge im Speicher am schnellsten zunimmt, und die Zeitpunkte, an denen die Wassermenge maximal bzw. minimal ist.



Das erste Gezeitenkraftwerk wurde 1966 in der Bucht von Saint-Malo in Frankreich in Betrieb genommen.
Dort beträgt der Tidenhub 12 m.
Das Speicherbecken des Kraftwerks fasst ca. 180 Millionen Kubikmeter.

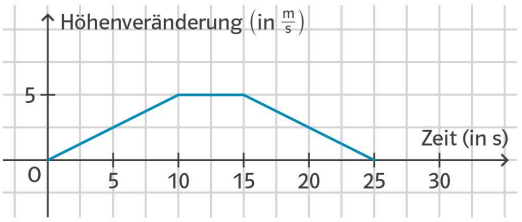
Test 2

Lösungen, Seite 440

11 **Wahr oder falsch?**
Der Graph zeigt modellhaft die Änderungsrate der Höhe eines Aufzugs. Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Der Aufzug ist nach 25 Sekunden wieder auf der gleichen Höhe wie am Anfang.

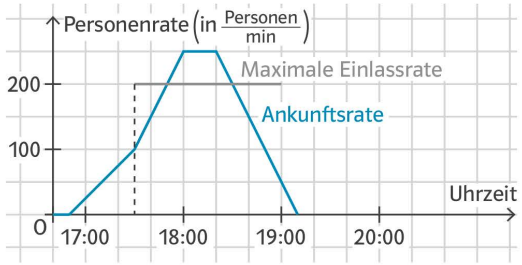
b) Der Aufzug erreicht eine maximale Höhe von 5 Metern.



12 Ein Fußballspiel beginnt um 19:00 Uhr. Die Eingänge wurden 90 Minuten vor Spielbeginn geöffnet. Es können dann 200 Personen pro Minute das Stadion betreten. Der Graph beschreibt modellhaft die Ankunftsrate der vor dem Stadion eintreffenden Menschen.

a) Bestimmen Sie näherungsweise die Anzahl der Personen, die 90 Minuten bzw. 70 Minuten vor Spielbeginn auf ihren Einlass warten.

b) Bestimmen Sie die maximale Anzahl der Wartenden.



Grundwissen Test — Zinsen und Zinseszinsen berechnen

Grundwissen, Seite 410
Lösungen, Seite 440

G **13** a) Frau Uyar legt 10 000 € für 5 Jahre bei der Bank an. Sie erhält einen Jahreszinssatz von 2,5 %. Berechnen Sie das Guthaben nach 5 Jahren.

b) Frieda behauptet, dass man doppelt so viele Zinsen innerhalb der 5 Jahre erhält, wenn sich der Zinssatz verdoppelt. Untersuchen Sie, ob Frieda recht hat.

2 Das Integral

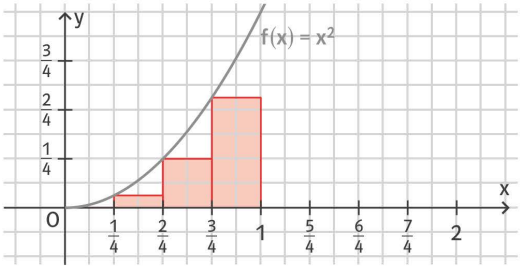
Auf einer kreisrunden Fläche mit einem Durchmesser von 10 Metern soll Rollrasen verlegt werden. Eine Rolle ist ausgerollt jeweils 40 cm breit und 250 cm lang. Ermitteln Sie, wie viele Rollen man benötigt und mit wie viel Prozent Verschnitt man rechnen muss.

Auch bei Funktionen, deren Graphen nicht gradlinig verlaufen, kann man den orientierten Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse bestimmen. Im Folgenden wird erläutert, wie man solche Flächeninhalte näherungsweise berechnen kann, wenn man eine Funktionsgleichung kennt.

Der Inhalt der Fläche A zwischen dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2$ und der x-Achse soll im Intervall $[0; 1]$ bestimmt werden. Mit den bisherigen Methoden der Rechtecks- und Dreiecksflächenberechnung kommt man zu keinem genauen Ergebnis.

Eine Möglichkeit, den gesuchten Flächeninhalt zu bestimmen, ist die Annäherung durch Rechtecke, die man schrittweise verbessert. Dies führt zu einer Grenzwertbetrachtung. Hierbei kann man gleich breite Rechtecke betrachten, deren Höhe jeweils durch den kleinsten oder größten Funktionswert in einem Intervall angegeben wird. Dieses Verfahren wird im Folgenden für eine Zerlegung des Intervalls $[0; 1]$ in vier Teilintervalle durchgeführt.

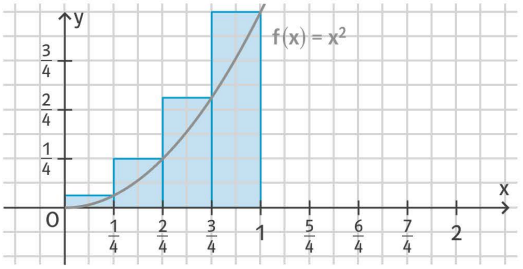
Untersumme (Abschätzung von unten)



Für die Untersumme U_4 erhält man:

$$U_4 = \frac{1}{4}\cdot f(0) + \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\left[f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\left[0^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = 0{,}218\,75$$

Obersumme (Abschätzung von oben)



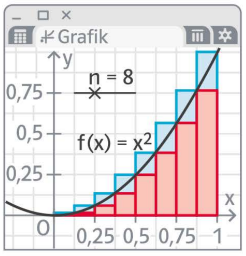
Für die Obersumme O_4 erhält man:

$$O_4 = \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot f(1)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2\right] = 0{,}468\,75$$

Der gesuchte Flächeninhalt A muss größer als die Untersumme und kleiner als die Obersumme sein. Eine bessere Abschätzung erhält man durch eine Verkleinerung der Teilintervalle. Verdoppelt man z. B. jeweils die Anzahl der Teilintervalle, ergeben sich folgende Unter- und Obersummen:

Anzahl n der Teilintervalle	4	8	16	32	64	128	256	512
Untersumme U_n	≈ 0,2188	≈ 0,2734	≈ 0,3027	≈ 0,3179	≈ 0,3256	≈ 0,3294	≈ 0,3314	≈ 0,3324
Obersumme O_n	≈ 0,4688	≈ 0,3984	≈ 0,3652	≈ 0,3491	≈ 0,3412	≈ 0,3372	≈ 0,3353	≈ 0,3343

Beim Vergleich der beiden Zeilen sieht man, dass sich die Werte für die Unter- und Obersummen einander annähern. Es gilt z. B. $U_{512} \approx O_{512} \approx 0{,}33$.
Man kann zeigen, dass für $n \to +\infty$ die Grenzwerte von U_n und O_n übereinstimmen.



Je größer n ist, desto kleiner wird die Differenz zwischen Ober- und Untersumme.

I1 **interaktive Anwendung** Ober- und Untersumme

Wenn bei einer Einteilung des Intervalls $[a; b]$ in n Teilintervalle $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} O_n$ gilt, dann entspricht dieser Grenzwert dem orientierten Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt. Man bezeichnet den Grenzwert als **Integral** der Funktion f im Intervall $[a; b]$.

Bestimmtes Integral

Eine Funktion heißt **integrierbar** im Intervall $[a; b]$, wenn der Grenzwert der Untersumme U_n mit dem Grenzwert der Obersumme O_n in diesem Intervall übereinstimmt. Diesen Grenzwert nennt man **bestimmtes Integral** von f im Intervall $[a; b]$ und schreibt hierfür

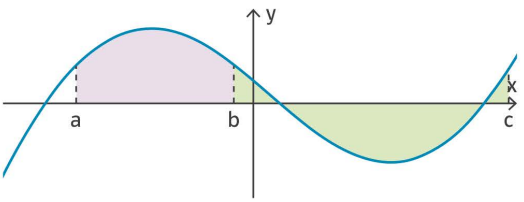
$$\int_a^b f(x)\,dx$$ (gesprochen „Integral von f(x) von a bis b").

Das Integral entspricht der Summe der orientierten Inhalte der Flächen, die der Graph von f mit der x-Achse zwischen der unteren Grenze a und der oberen Grenze b einschließt.

obere Grenze
Integrationsvariable
$\int_a^b f(x)\,dx$
Integrand
untere Grenze

Aus der Definition ergibt sich, dass zur Bestimmung von Integralen Intervalle aufgeteilt oder zusammengefasst werden können. Man nennt dies **Intervalladditivität**:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



Damit man auch Integrale berechnen kann, bei denen die untere Grenze größer als die obere Grenze ist, setzt man für $a < b$: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

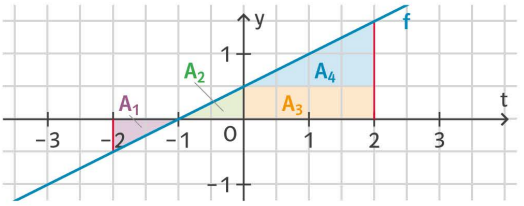
Aufgrund dieser Definition und der Intervalladditivität gilt: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

Die Schreibweise des Integrals geht auf den Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) zurück. Das Zeichen ∫ erinnert an ein langgezogenes S für „Summe", dx steht symbolisch für die immer kleiner werdende Breite Δx.

Beispiel 1 **Integrale durch Zerlegung in Teilflächen bestimmen**

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f. Geben Sie an, wie man mithilfe der markierten Flächeninhalte das Integral berechnen kann und berechnen Sie es.

a) $\int_0^2 f(t)\,dt$ b) $\int_{-2}^0 f(t)\,dt$



Lösung

a) $\int_0^2 f(t)\,dt = A_3 + A_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 + 1 = 2$

b) *Man nutzt die Intervalladditivität und beachtet die Vorzeichen der Integrale.*

$$\int_{-2}^0 f(t)\,dt = \int_{-2}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^0 f(t)\,dt = -A_1 + A_2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

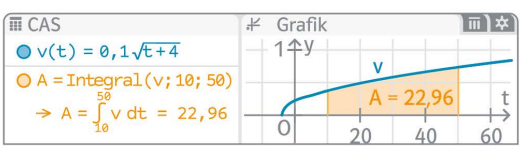
Beispiel 2 **Integrale im Sachzusammenhang mit einem MMS bestimmen**

Die Funktion v mit $v(t) = 0{,}1\sqrt{t+4}$ soll verwendet werden, um die Wachstumsgeschwindigkeit v(t) eines Baumes im Alter t von 10 bis 50 Jahren zu modellieren (t in Jahren, v(t) in $\frac{m}{Jahr}$). Ermitteln Sie die Höhenzunahme des Baumes zwischen dem 10. und 50. Jahr.

Lösung

Es gilt $\int_{10}^{50} f(t)\,dt \approx 22{,}96$.

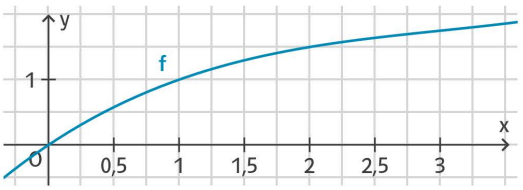
Also wächst der Baum dem Modell zufolge zwischen dem 10. und 50. Jahr um ca. 23 m.



D1 MMS-Anleitung Integrale berechnen

Beispiel 3 **Flächeninhaltsfunktion skizzieren**

Gegeben ist der Graph der Funktion f.



a) Ermitteln Sie näherungsweise $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_0^2 f(x)\,dx$ und $\int_0^3 f(x)\,dx$.

b) Skizzieren Sie für $0 \le x \le 3$ den Graphen der Funktion F, die einem beliebigen Wert für x den orientierten Flächeninhalt zuordnet, der im Intervall $[0; x]$ vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

Lösung

a) *Man betrachtet Dreiecke und Rechtecke unterhalb des Graphen (siehe Fig. 1).*

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$A_2 = 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} = 1{,}25$

$A_3 = 1 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8} = 1{,}625$

$\int_0^1 f(x)\,dx \approx A_1 = 0{,}5$

$\int_0^2 f(x)\,dx \approx A_1 + A_2 = 1{,}75$

$\int_0^3 f(x)\,dx \approx A_1 + A_2 + A_3 = 3{,}375$

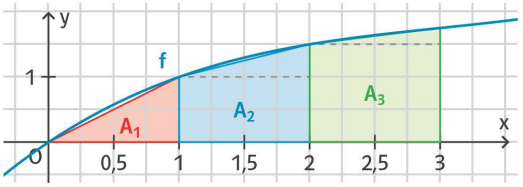


Fig. 1

b) Aus Teilaufgabe a) folgt $F(1) \approx 0{,}5$, $F(2) \approx 1{,}75$ und $F(3) \approx 3{,}375$. Außerdem gilt $F(0) = 0$. *Mithilfe der zugehörigen Wertepaare lässt sich der Graph von F skizzieren (Fig. 2).*

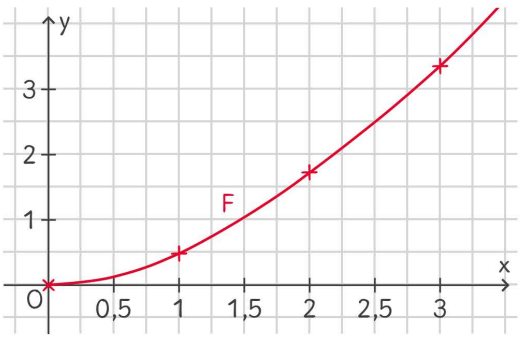
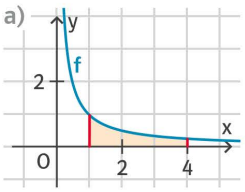
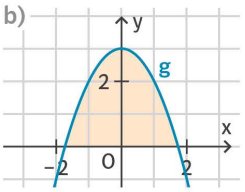


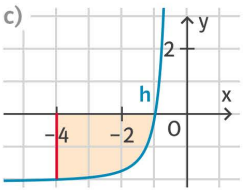
Fig. 2

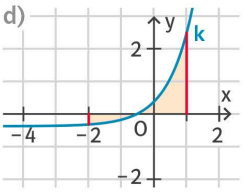
Aufgaben

○ **1** Geben Sie den orientierten Flächeninhalt in Integralschreibweise an.

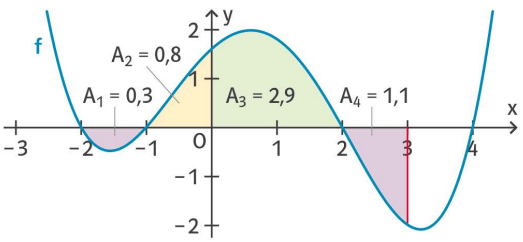
a)


b)


c)


d)


○ **2** Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f. Gegeben sind die Inhalte von Teilflächen. Bestimmen Sie damit das Integral.



a) $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ b) $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

c) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$ d) $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

→ **Lerntipp** Seite 57, Beispiel 1

○ **3** Skizzieren Sie den Graphen von f und berechnen Sie das Integral mithilfe von Dreiecks- und Rechtecksflächen.

a) $\int_{-3}^{4} 3\,dx$ b) $\int_{-1}^{1} (2x + 1)\,dx$ c) $\int_{-3}^{3} \left(-\frac{1}{2}x\right) dx$ d) $\int_{2}^{5} (-x)\,dx$

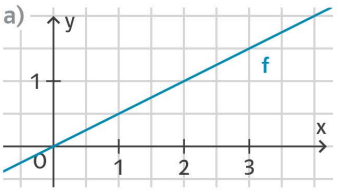
→ **Lerntipp** Seite 58, Beispiel 3

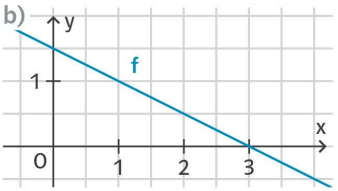
○ **4** Die Funktion f mit $f(t) = 0{,}01t \cdot 2^{-0{,}1t}$ soll für $0 \le t \le 100$ verwendet werden, um die Wachstumsgeschwindigkeit einer Sonnenblume zu beschreiben (t in Tagen nach dem Keimen, f(t) in m pro Tag).
Berechnen Sie $\int_0^{100} f(t)\,dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

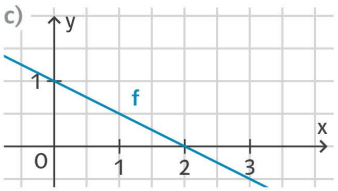
Lerntipp
Seite 57, Beispiel 2

○ **5** Gegeben ist der Graph der Funktion f.
Ermitteln Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_0^2 f(x)\,dx$ und $\int_0^3 f(x)\,dx$. Skizzieren Sie für $0 \le x \le 3$ den Graphen der Funktion F, die einem beliebigen Wert für x den orientierten Flächeninhalt zuordnet, der im Intervall $[0; x]$ vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

Lerntipp
Seite 58, Beispiel 3

a)


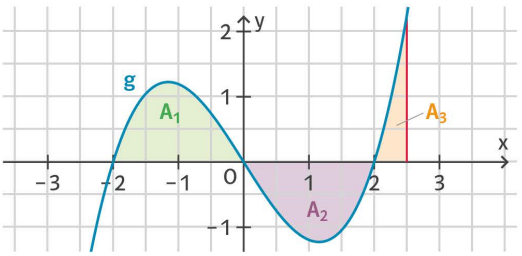
b)


c)


Test 1

Lösungen, Seite 440

○ **6** Geben Sie den orientierten Inhalt der Flächen A_1, A_2 und A_3 in Integralschreibweise an.

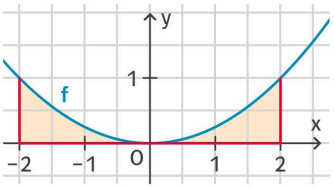


○ **7** Skizzieren Sie den Graphen von f und berechnen Sie das Integral mithilfe von Dreiecks- und Rechtecksflächen.

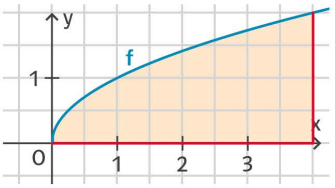
a) $\int_0^6 \frac{1}{2}x\,dx$ **b)** $\int_{-1}^2 (2x - 1)\,dx$ **c)** $\int_{-10}^0 (-0{,}5)\,dx$

◒ **8** Schätzen Sie mithilfe der Zeichnung den Wert des Integrals.

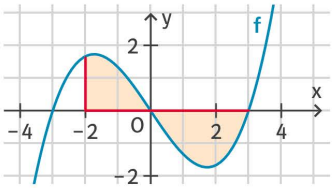
a) $\int_{-2}^2 0{,}25x^2\,dx$



b) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$



c) $\int_{-2}^3 \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x\right)dx$



Die Lösungen zu den Aufgaben 8 und 9 können mit einem MMS überprüft werden.

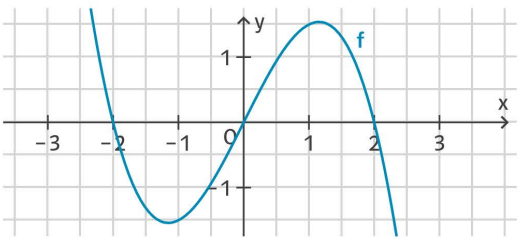
◒ **9** Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob das Integral positiv, negativ oder null ist.

a) $\int_{10}^{80} x^2\,dx$ **b)** $\int_{10}^{11} -x^4\,dx$ **c)** $\int_{-4}^{2} x^3\,dx$ **d)** $\int_1^3 (x - 2)^2\,dx$ **e)** $\int_1^5 \sqrt{x - 1}\,dx$

◒ **10** **Wahr oder falsch?**
Beurteilen Sie, ob die Aussage für den abgebildeten Graphen von f wahr oder falsch ist.

a) $\int_0^2 f(x) > 0$ **b)** $\int_{-2}^2 f(x) = 0$

c) $\int_{-2}^0 f(x) \approx 2$ **d)** $\int_{-1}^2 f(x) > 0$



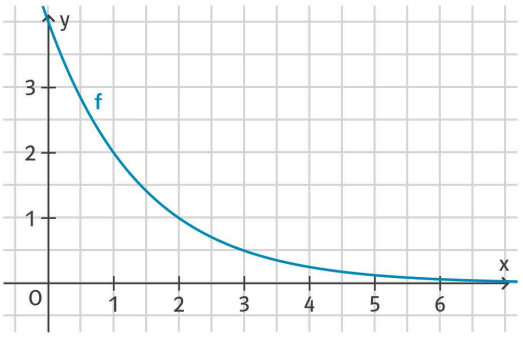
11 Geben Sie mögliche Integrationsgrenzen a und b $(a < b)$ an, sodass $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ gilt.

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = 2x - 2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ d) $f(x) = (x + 2)^3$

12 a) Gegeben ist der Graph der Funktion f.

Ermitteln Sie näherungsweise $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_0^2 f(x)\,dx$ und $\int_0^3 f(x)\,dx$.

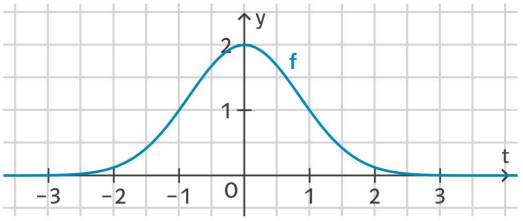
b) Skizzieren Sie für $0 \le x \le 3$ den Graphen der Funktion F, die einem beliebigen Wert für x den Inhalt der Fläche zuordnet, die im Intervall $[0; x]$ vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.



Lerntipp
Seite 58, Beispiel 3

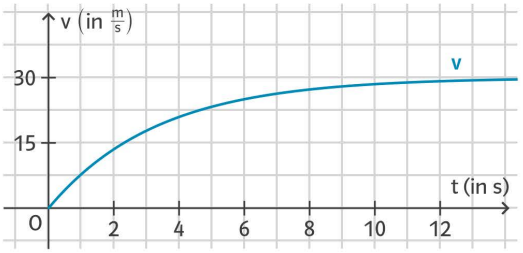
13 Abgebildet ist der Graph der Funktion f. Für die Funktion F soll $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ gelten.

a) Bestimmen Sie mithilfe der Zeichnung Näherungswerte für $F(2)$ und $F(-1)$.
b) Begründen Sie anschaulich, dass $F(a) = -F(-a)$ gilt.
c) Begründen Sie, warum der Graph von F die x-Achse bei $x = 0$ schneidet.
d) Skizzieren Sie den Graphen von F.



14 Die Abbildung zeigt modellhaft die Geschwindigkeit eines Autos in den ersten Sekunden nach dem Start (t in s, v(t) in $\frac{m}{s}$).

a) Ermitteln Sie näherungsweise $\int_0^2 v(t)\,dt$, $\int_0^4 v(t)\,dt$ sowie $\int_0^8 v(t)\,dt$ und deuten Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.



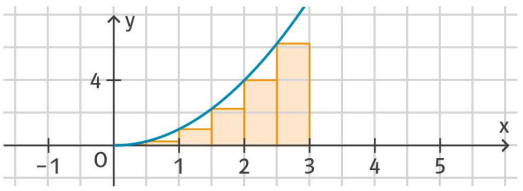
b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion V, die beschreibt, wie weit das Auto in den ersten t Sekunden nach dem Start gefahren ist.

15 Ein anfangs leerer Gartenpool wird mit einem Wasserschlauch befüllt. Die Steiggeschwindigkeit v des Wassers kann im Intervall $[0; 10]$ näherungsweise durch die Funktion v mit $v(t) = 0{,}01t^2 - \frac{1}{10t^3 + 10} + 4$ beschrieben werden, dabei ist t die Zeit in Minuten, $v(t)$ in $\frac{mm}{min}$.

a) Drücken Sie die Füllhöhe des Pools durch ein Integral aus und bestimmen Sie die Höhe des Wasserstands nach 10 Minuten.
b) Der Pool hat eine Grundfläche von $3{,}6\,m^2$. Bestimmen Sie das Wasservolumen nach 10 Minuten in Litern.

16 Rechts ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ sowie die Untersumme U_6 für das Intervall $[0; 3]$ abgebildet.

a) Berechnen Sie U_6 sowie O_6 und geben Sie einen Schätzwert für $\int_0^3 f(x)\,dx$ an.



b) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe a).

17 **Unter- und Obersummen mit einer Tabellenkalkulation bestimmen**

MK Mit einer Tabellenkalkulation werden die Unter- und die Obersumme U_5 bzw. O_5 der Funktion f mit $f(x) = x^2$ im Intervall $[1; 2]$ bestimmt.

a) Erläutern Sie mithilfe einer Skizze, welche Flächeninhalte in den Spalten C bzw. G berechnet werden.

b) Erläutern Sie, was man mit der für die Zelle C5 angegebenen Formel berechnet.

c) Begründen Sie, warum in der Formel für C5 Dollarzeichen verwendet wurden und was passiert, wenn man die Formel kopiert.

C5 | = | =C1*B5

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Intervalllänge**		0,2				
2							
3	**Untersumme**				**Obersumme**		
4	x	f (x)	A_n		x	f (x)	A_n
5	1	1	0,2		1,2	1,44	0,288
6	1,2	1,44	0,288		1,4	1,96	0,392
7	1,4	1,96	0,392		1,6	2,56	0,512
8	1,6	2,56	0,512		1,8	3,24	0,648
9	1,8	3,24	0,648		2	4	0,8
10		Summe	2,04			Summe	2,64
11							

d) Franzi behauptet, dass es gereicht hätte, nur ein Dollarzeichen in der Formel für C5 zu verwenden. Beurteilen Sie, ob sie recht hat.

e) Berechnen Sie mithilfe einer Tabellenkalkulation U_{10} bzw. O_{10}.

I2 **interaktive Anwendung** Berechnung der Ober- und Untersumme

18 Ermitteln Sie zwei verschiedene Werte für a und b so, dass $\int_a^b f(x)\,dx = 8$ gilt.

a) $f(x) = 2$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = -x$ d) $f(x) = x - 2$

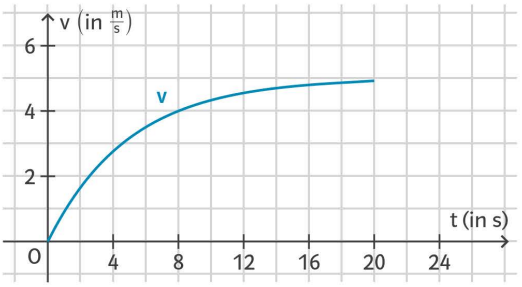
Test 2

Lösungen, Seite 440

19 Der Graph wird verwendet, um die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs zu beschreiben.

a) Geben Sie die Länge des Weges, den das Fahrzeug in den ersten zwölf Sekunden zurücklegt, in Integralschreibweise an und bestimmen Sie diese näherungsweise.

b) Ermitteln Sie näherungsweise einen Vier-Sekunden-Zeitraum, in dem das Fahrzeug etwa 14 Meter zurücklegt.



20 Bei den folgenden Integralen ist die untere Grenze 0. Die obere Grenze ist variabel und wird mit t bezeichnet $(t > 0)$. Bestimmen Sie den Wert des Integrals in Abhängigkeit von t.

a) $\int_0^t 3\,dx$ b) $\int_0^t \frac{3}{2}x\,dx$ c) $\int_0^t (x + 1)\,dx$

21 Bestimmen Sie die Variable t so, dass das Integral den angegebenen Wert hat.

a) $\int_0^t 2x\,dx = 16$ b) $\int_4^t \left(\frac{1}{2}x - 2\right)dx = 9$ c) $\int_{-2}^t -x\,dx = -6$

22 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1$, falls $x \in \mathbb{Q}$, und $f(x) = 0$, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, x also irrational ist. Erläutern Sie, warum die Funktion f über dem Intervall $[0; 1]$ nicht integrierbar ist.

Grundwissen Test **Exponentielle Abnahme berechnen**

Grundwissen, Seite 413
Lösungen, Seite 440

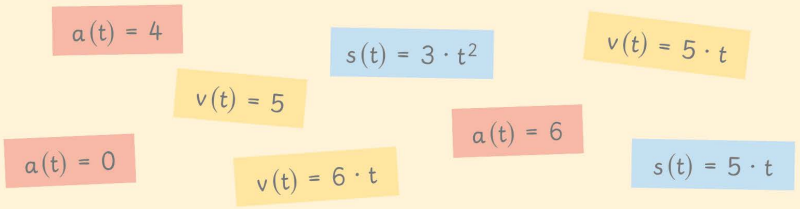
G **23** Es soll davon ausgegangen werden, dass der Wert eines gebrauchten Autos pro Jahr um 6% abnimmt. Ein Gutachter schätzt den Wert eines 5 Jahre alten Kleinwagens auf 7000 €.

a) Berechnen Sie den erwarteten Wert des Wagens in 5 Jahren.

b) Untersuchen Sie, wann das Auto voraussichtlich weniger als 2000 € wert sein wird.

3 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

In der Physik unterscheidet man zwischen Bewegungen mit der Beschleunigung 0 und Bewegungen mit konstanter Beschleunigung. Ordnen Sie den Formeln für den Weg s die passenden Formeln für die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a zu. Notieren Sie zu den Kärtchen, die übrig bleiben, die fehlenden Formeln.



(s(t) in m; v(t) in $\frac{m}{s}$; a(t) in $\frac{m}{s^2}$)

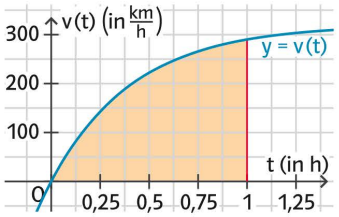
Mithilfe von Integralen kann man einen Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse darstellen. Wenn eine Funktion f die Änderungsrate einer Größe beschreibt, entspricht das Integral der Gesamtänderung der Größe in dem betrachteten Zeitraum. Diese Überlegungen können genutzt werden, um einen der wichtigsten Sätze der Analysis, den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechung, zu erklären.

Wenn eine Funktion v die Geschwindigkeit eines Zuges nach dem Start beschreibt, dann kann man mithilfe der Funktion v seine zurückgelegte Strecke s in einem Zeitintervall rekonstruieren. Da die Geschwindigkeit v des Zuges seiner momentanen Änderungsrate entspricht, ist v die Ableitung der Funktion s, die der Zeit t nach dem Start den zurückgelegten Weg zuordnet. Es gilt also $s'(t) = v(t)$. Die innerhalb der ersten Stunde zurückgelegte Wegstrecke entspricht dem orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen von v und der x-Achse und somit dem Integral $\int_0^1 v(t)\,dt = \int_0^1 s'(t)\,dt$.

Kennt man mit die Wegfunktion s, so kann man die Wegstrecke auch als Differenz der Funktionswerte $s(1)$ und $s(0)$ berechnen.

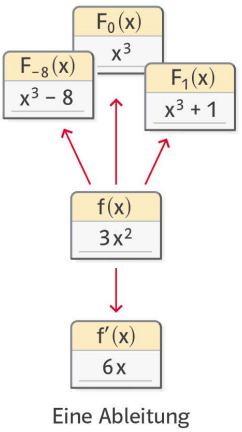
Es gilt also $\int_0^1 v(t)\,dt = s(1) - s(0)$.

Da $s'(t) = v(t)$ gilt, folgt $\int_0^1 s'(t)\,dt = s(1) - s(0)$.



Allgemein gilt: Wenn man eine Funktion F kennt, für die $F'(x) = f(x)$ gilt, kann man mithilfe von F das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnen. Eine Funktion F mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ heißt **Stammfunktion** von f. Zu einer Funktion f kann es verschiedene Stammfunktionen geben, die sich nur durch einen konstanten Summanden c unterscheiden. Dies kann man wie folgt beweisen:
Wenn F und G Stammfunktionen von f im Intervall I sind, dann gilt $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = f(x)$ und somit $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Damit die Ableitung von $F - G$ null ist, muss $F - G$ im Intervall I konstant sein, d.h. $F(x) - G(x) = c$, also $F(x) = G(x) + c$.

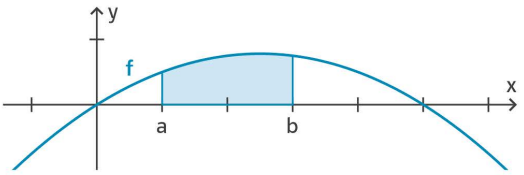
Viele Stammfunktionen



Eine Ableitung

Stammfunktionen
Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** von f im Intervall I, wenn für alle x aus dem Intervall I gilt:
$$\mathbf{F'(x) = f(x)}$$
Sind F und G zwei Stammfunktionen von f im Intervall I, so unterscheiden sich $F(x)$ und $G(x)$ nur durch eine Konstante c, d.h. $F(x) = G(x) + c$ für alle $x \in I$.

Wenn man eine Stammfunktion F zu einer Funktion f kennt, kann man hiermit Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ für beliebige Grenzen berechnen.



Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung
Ist eine Funktion f im Intervall $[a; b]$ integrierbar und ist F eine Stammfunktion von f im Intervall $[a; b]$, dann gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Der Beweis des Hauptsatzes wird in Aufgabe 14 auf Seite 67 geführt.

Die Berechnung eines Integrals notiert man in der folgenden Form:

Stammfunktion von f in eckigen Klammern

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

obere und untere Grenze

Beispiel 1 **Stammfunktionen nachweisen**

Prüfen Sie, welche der Funktionen F mit $F(x) = 0{,}3x^2$, G mit $G(x) = 0{,}2x^3$ und H mit $H(x) = 0{,}2(x^3 - 10)$ Stammfunktionen von f mit $f(x) = 0{,}6x^2$ sind.

Lösung

$F'(x) = 0{,}6x \neq f(x)$; $G'(x) = 0{,}6x^2 = f(x)$; $H'(x) = 0{,}6x^2 = f(x)$,
G und H sind Stammfunktionen von f, F ist keine Stammfunktion von f.

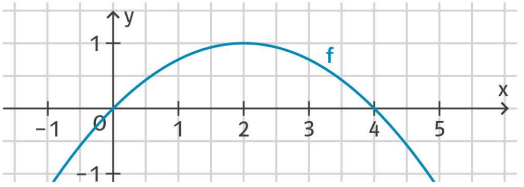
Beispiel 2 **Den Graphen einer Stammfunktion skizzieren**

Der Graph einer Funktion f ist abgebildet.

a) Begründen Sie, dass jede Stammfunktion von f im Intervall $[-1; 5]$ zwei Extremstellen hat.

b) Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Stammfunktion F, deren Graph durch den Koordinatenursprung verläuft.



Lösung

a) Der Graph von f schneidet die x-Achse zweimal. Da $F'(x) = f(x)$ gilt, beschreibt f das Monotonieverhalten von F. Das Monotonieverhalten von F ändert sich somit zweimal: an den Stellen, an denen F' das Vorzeichen wechselt (vgl. Fig. 1). F hat im abgebildeten Bereich zwei Extremstellen.

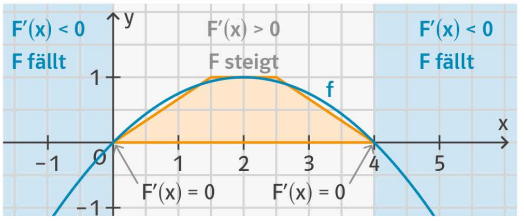


Fig. 1

b) Für den Flächeninhalt A des in Fig. 1 eingezeichneten Trapezes gilt $A = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{4+1}{2} \cdot 1 = 2{,}5\,\text{FE}$. Der gesuchte Flächeninhalt ist etwas größer.

c) *Aus den Teilaufgaben a) und b) sowie $F(0) = 0$ folgt, dass der Graph von F den Tiefpunkt $T(0\,|\,0)$ und bei $x = 4$ einen Hochpunkt hat. Das zugehörige lokale Maximum ist etwas größer als 2,5 (vgl. Fig. 2).*

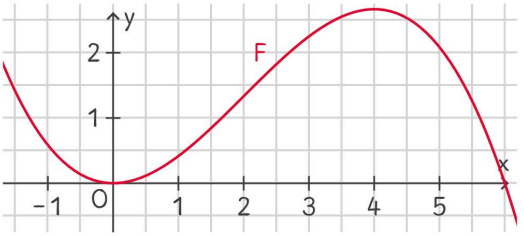
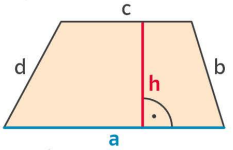


Fig. 2

Erinnerung: Flächeninhalt von Trapezen



$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

Beispiel 3 **Stammfunktionen und Integral mit dem Hauptsatz berechnen**

a) Begründen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = x^3$ eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = 3x^2$ ist.

b) Berechnen Sie $\int_1^3 f(x)\,dx$ mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

c) Überprüfen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe b) mit einem MMS.

Lösung

a) Es gilt $F'(x) = 3x^2 = f(x)$. Also ist F eine Stammfunktion von f.

b) $\int_1^3 f(x)\,dx = [x^3]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26$

c) Ein MMS liefert dieselbe Lösung wie in Teilaufgabe b).

Aufgaben

○ **1** Ordnen Sie jeder Stammfunktion F eine zugehörige Ausgangsfunktion f zu.

Lerntipp Seite 63, Beispiel 1

1 $F(x) = \frac{1}{2}x^3$ | 2 $F(x) = \frac{3}{2}x^2$ | C $f(x) = \frac{2}{3}x$ | 4 $F(x) = \frac{3}{4}x^3$ | 5 $F(x) = \frac{3}{2}x^3$

A $f(x) = \frac{9}{4}x^2$ | B $f(x) = 3x$ | 3 $F(x) = \frac{1}{3}x^2$ | D $f(x) = 4{,}5x^2$ | E $f(x) = \frac{3}{2}x^2$

○ **2** Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist, und berechnen Sie $\int_1^2 f(x)\,dx$ mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

Lerntipp Seite 64, Beispiel 3

a) $f(x) = 6x^2$; $F(x) = 2x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x$; $F(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2$

c) $f(x) = -x^5 + \frac{2}{3}x^2$; $F(x) = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{9}x^3$

d) $f(x) = \frac{x^3}{4} - 1$; $F(x) = \frac{x^4}{16} - x - 1$

e) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; $F(x) = \frac{1}{x}$

f) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$; $F(x) = 3\sqrt{x}$

■ g) $f(x) = -\frac{21}{x^4}$; $F(x) = \frac{7}{x^3}$

■ h) $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} + 1$; $F(x) = \sqrt[3]{x^4} + x$

○ **3** Untersuchen Sie, für welche Werte von a, die Funktion F eine Stammfunktion von f ist.

a) $f(x) = 3x^2$; $F(x) = x^a$

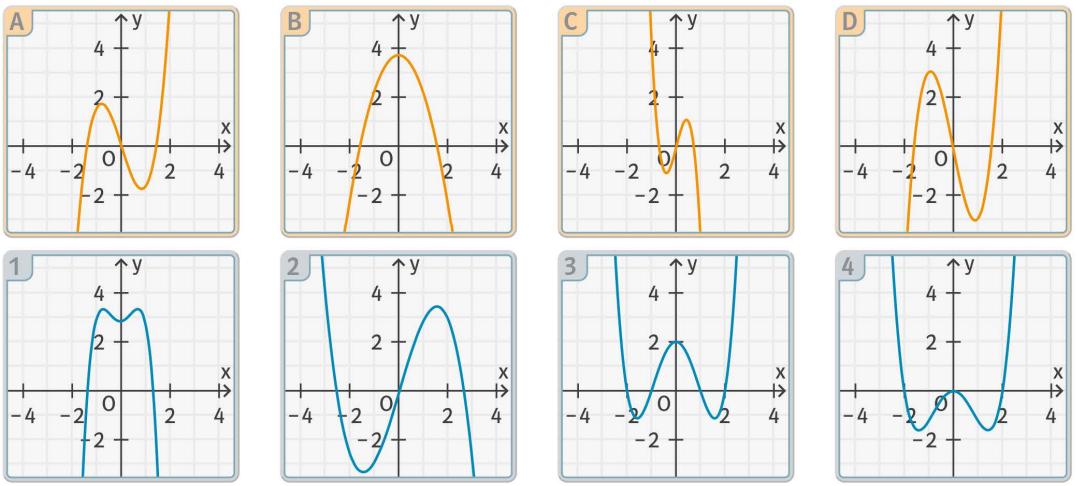
b) $f(x) = 2x$; $F(x) = x^2 - a$

c) $f(x) = 2x^3$; $F(x) = ax^4$

d) $f(x) = (a + 1) \cdot x$; $F(x) = x^{a+1}$

○ **4** SP Ordnen Sie jedem Graphen einer Funktion aus der ersten Zeile den Graphen einer zugehörigen Stammfunktion aus der zweiten Zeile zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

Lerntipp Seite 63, Beispiel 2

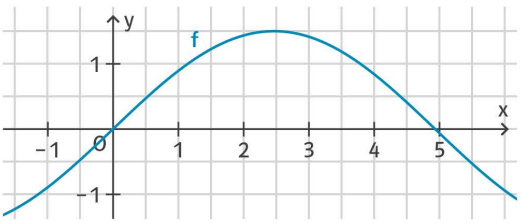


5 Rechts ist der Graph einer Funktion f abgebildet.

a) Begründen Sie, dass jede Stammfunktion von f im abgebildeten Bereich zwei Extremstellen haben muss.

b) Bestimmen Sie näherungsweise den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

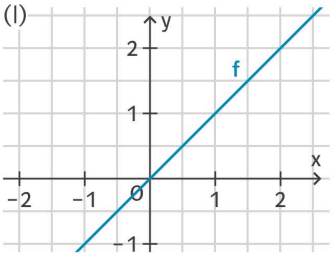
c) Skizzieren Sie den Graphen der Stammfunktion F, deren Graph durch den Koordinatenursprung verläuft.



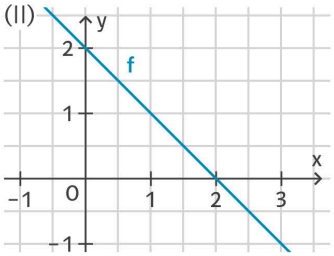
Lerntipp
Seite 63, Beispiel 2

6 a) Skizzieren Sie mithilfe des Graphen der Funktion f den Graphen einer möglichen Stammfunktion F und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

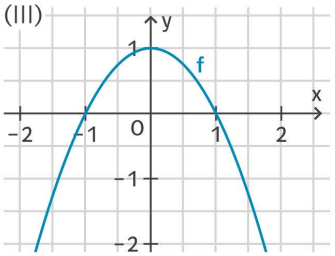
(I)



(II)



(III)



b) Vergleichen Sie Ihre Lösungen miteinander. Notieren Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Korrigieren Sie Fehler, die Ihnen auffallen.

Test 1

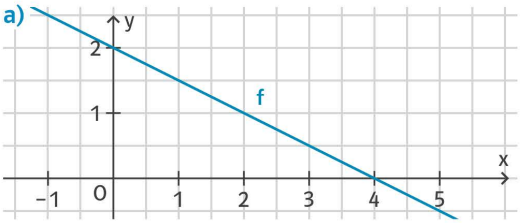
Lösungen, Seite 440

7 a) Prüfen Sie, ob die Funktion F mit $F(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}1$ bzw. die Funktion G mit $G(x) = \frac{2}{20}x^4$ eine Stammfunktion von h mit $h(x) = \frac{2}{5}x^3$ ist.

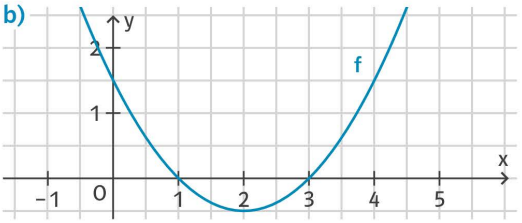
b) Berechnen Sie $\int_0^{10} \frac{2}{5}x^3\,dx$ mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

8 Skizzieren Sie einen möglichen Graphen der Stammfunktion von f.

a)



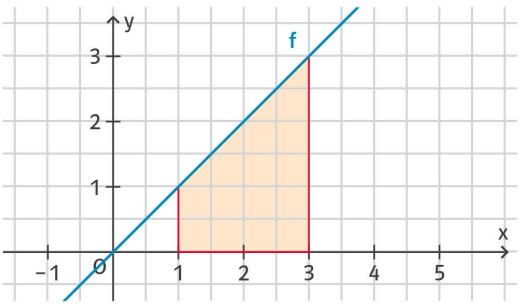
b)



9 a) Erläutern Sie mithilfe der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks, dass sich der Inhalt der markierten Fläche wie folgt berechnen lässt: $A = \frac{1}{2}\cdot 3^2 - \frac{1}{2}\cdot 1^2$

b) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche mit der Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes.

c) Der dargestellte Graph ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = x$.



(1) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ eine Stammfunktion von f ist.

(2) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung und vergleichen Sie mit den Lösungen aus den Teilaufgaben a) und b).

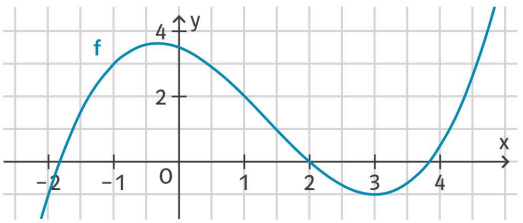
10 Gegeben ist der Graph einer Funktion f. F ist eine Stammfunktion von f.

a) Geben Sie an, wo f Extremstellen hat.

b) Geben Sie an, wo F Extremstellen hat.

c) Bestimmen Sie näherungsweise den Wert $F(4) - F(0)$.

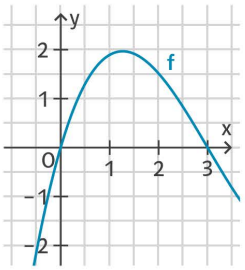
d) Bestimmen Sie näherungsweise $f'(1)$.

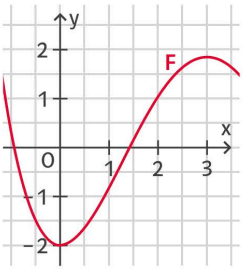


11 Die Abbildungen zeigen die Graphen von f sowie von einer Stammfunktion F von f.

a) Ermitteln Sie mithilfe des Graphen von f Näherungswerte für $\int_0^2 f(x)\,dx$ und $\int_2^3 f(x)\,dx$.

b) Berechnen Sie mithilfe des Graphen von F die Integrale $\int_0^2 f(x)\,dx$ und $\int_2^3 f(x)\,dx$.





12 **Finden Sie den Fehler!**

Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie die richtige Lösung.

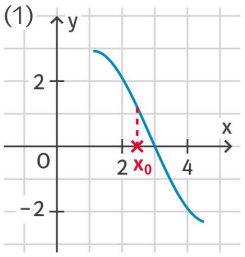
a) $F(x) = x^3$ ist die Stammfunktion von $f(x) = 3x^2$.

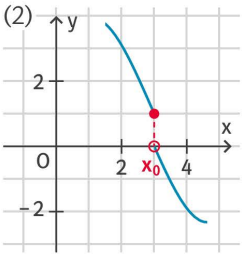
b) $\int_1^2 3x^2\,dx = [6x]_1^2$
$= 12 - 6 = 6$

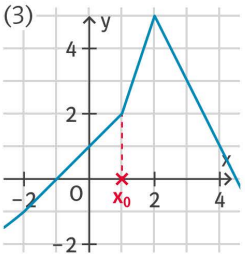
c) $\int_{-1}^2 2x\,dx = [x^2]_{-1}^2$
$= 2^2 - (-1)^2 = 5$

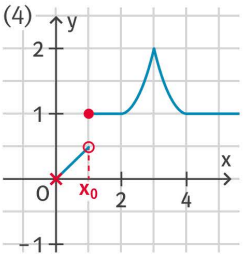
13 **Stetigkeit und Existenz von Stammfunktionen**

a) Eine Funktion heißt stetig an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt. Beurteilen Sie jeweils, ob die Funktion, deren Graph abgebildet ist, an der Stelle x_0 stetig ist.

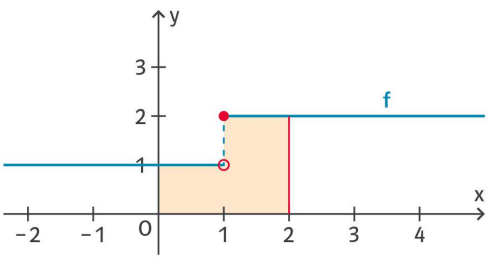
(1)


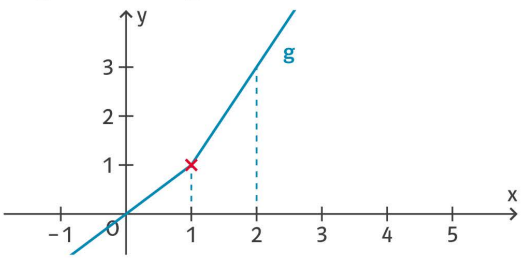
(2)


(3)


(4)


b) Für die Anwendung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung muss es eine Stammfunktion zu der zu integrierenden Funktion geben. Diese gibt es aber nicht immer.





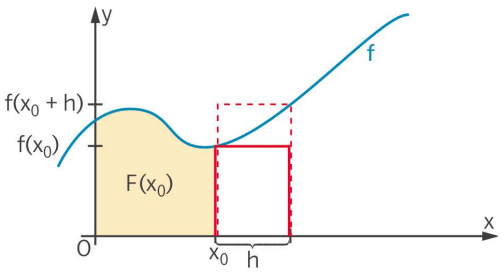
(1) Begründen Sie, dass die Funktion g verwendet werden kann, um den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse zu bestimmen.

(2) Zeigen Sie, dass g keine Stammfunktion von f ist. Untersuchen Sie hierfür g auf Differenzierbarkeit.

Eine Funktion ist differenzierbar an einer Stelle x_0, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert.

14 **Beweis des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung**

Man kann den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung beweisen, indem man den Differenzenquotienten für eine Flächenfunktion F untersucht. Hierfür nimmt man an, dass F eine Funktion ist, die jeder Stelle x_0 die Maßzahl der orientierten Fläche zwischen dem Graphen einer stetigen Funktion f und der x-Achse zuordnet. Es folgt, dass F eine Stammfunktion von f ist. Sortieren Sie die Karten A bis H.



Ergänzen Sie gegebenenfalls Erläuterungen und Rechenschritte. In dem Beweis soll zunächst davon ausgegangen werden, dass die Funktion f im Intervall $[x_0; x_0 + h]$ monoton steigend ist.

Annahme: Die Maßzahl der orientierten Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[x_0; x_0 + h]$ beträgt $F(x_0 + h) - F(x_0)$.

B Gemäß der Definition des Integrals gilt: $\int_{x_0}^{x_0 + h} f(x)\,dx = F(x_0 + h) - F(x_0)$

G Für $h \to 0$ gilt: $f(x_0) \leq F'(x_0) \leq f(x_0)$

H Das Rechteck mit dem Flächeninhalt $A_1 = h \cdot f(x_0)$ schätzt den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse nach unten ab.

A $h \cdot f(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0 + h} f(x)\,dx \leq h \cdot f(x_0 + h)$

E Weil f stetig an der Stelle x_0 ist, gilt $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) \to f(x_0)$. F ist somit differenzierbar. Es gilt $\lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}\right) = F'(x_0)$.

D $h \cdot f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \cdot f(x_0 + h)$

C $f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$

I Das Rechteck mit dem Flächeninhalt $A_2 = h \cdot f(x_0 + h)$ schätzt den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse nach oben ab.

F Es gilt: $F'(x_0) = f(x_0)$

F ist eine Stammfunktion von f (was zu zeigen war).

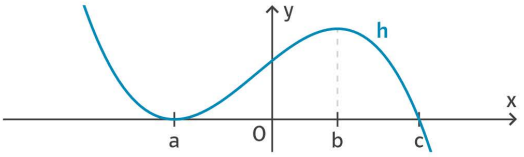
Eine Funktion heißt stetig an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt.
Anschaulich bedeutet die Stetigkeit einer Funktion f auf einem Intervall I, dass der Graph auf I definiert ist und keine Sprünge aufweist (vgl. Aufgabe 13).

Der Beweis für monoton fallende Funktionen kann in gleicher Weise geführt werden.

Test 2

Lösungen, Seite 441

15 Gegeben ist der Graph der Funktion h. H ist eine Stammfunktion von h mit $H(a) = 5$. Untersuchen Sie, ob die Funktionswerte von H, h und h' an den Stellen a, b und c positiv, negativ oder null sind.



16 Ermitteln Sie drei verschiedene Funktionen f, für die $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ gilt.

17 Gegeben ist eine Funktion f, zu der es eine Stammfunktion gibt. Zeigen Sie mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, dass $\int_{b}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ gilt.

Grundwissen Test **Exponentialgleichungen lösen**

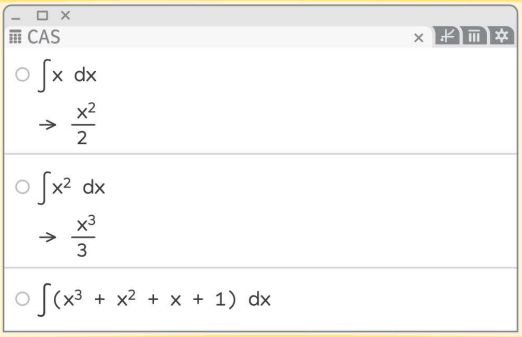
Grundwissen, Seite 413
Lösungen, Seite 441

G **18** Notieren Sie die Lösung mithilfe des Logarithmus und geben Sie einen Näherungswert an.

a) $3^x = 20$ **b)** $2 \cdot 4^x = 11$ **c)** $-2 \cdot 0{,}5^x = -10$ **d)** $3 \cdot 2^x + 1 = 3$

4 Regeln zur Bestimmung von Stammfunktionen

Charlotte: „Schau mal! Man kann auch Integrale ohne Grenzen berechnen."
Sophia: „Das sind doch Stammfunktionen."
Untersuchen Sie, ob Sophia recht hat, und überlegen Sie, was das MMS als Ergebnis der letzten Zeile angeben müsste. Überprüfen Sie Ihre Vermutung.
Untersuchen Sie dann weitere Beispiele.



Um Integrale mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung zu berechnen, benötigt man Stammfunktionen zu gegebenen Funktionen. Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen lassen sich schnell mithilfe von Regeln ermitteln, die sich aus den Ableitungsregeln ergeben.

Wenn man eine Stammfunktion einer Potenzfunktion sucht, kann man die bekannten Ableitungsregeln für Potenzfunktionen nutzen und „rückwärts" anwenden.
Man kann mithilfe der Ableitungsregeln zum Beispiel zeigen,

- dass G mit $G(x) = \frac{1}{2}x^2$ eine Stammfunktion von g mit $g(x) = x$ ist, denn $G'(x) = x$,
- dass H mit $H(x) = \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion von h mit $h(x) = x^2$ ist, denn $H'(x) = x^2$,
- dass I mit $I(x) = \frac{1}{4}x^4$ eine Stammfunktion von i mit $i(x) = x^3$ ist, denn $I'(x) = x^3$.

Allgemein gilt für beliebige rationale Exponenten $r \neq -1$, dass F mit $F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1}$ eine Stammfunktion von f mit $f(x) = x^r$ ist. Dies lässt sich mit der Potenz- und Faktorregel für Ableitungen zeigen. Es gilt $F'(x) = \frac{1}{r+1} \cdot (r+1) \cdot x^{r+1-1} = x^r$.

Mithilfe der bekannten Faktor- und Summenregel für Ableitungen kann man ebenfalls entsprechende Regeln für das Bestimmen von Stammfunktionen herleiten.

Eine Stammfunktion für f mit $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ kann nicht mit der Formel $F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1}$ bestimmt werden. Man müsste bei Anwendung der Formel durch null teilen.

Regeln zum Bestimmen von Stammfunktionen
Wenn G und H Stammfunktionen von g und h sind, dann gilt:

	Funktion	Stammfunktion
Summenregel	$f(x) = g(x) + h(x)$	$F(x) = G(x) + H(x)$
Faktorregel $(c \in \mathbb{R})$	$f(x) = c \cdot g(x)$	$F(x) = c \cdot G(x)$
Potenzregel $(r \neq -1)$	$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1}$

Die Regeln zur Bestimmung von Stammfunktionen kann man für die Berechnung von Integralen verwenden. Es gilt:

(1) $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ (2) $\int_a^b (g(x) + h(x))\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx$

Diese Regeln beschreiben die Linearität des Integrals. Sie lassen sich mithilfe der Regeln für das Bestimmen von Stammfunktionen beweisen.

Nachweis von (1): $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = [c \cdot F(x)]_a^b = c \cdot F(b) - c \cdot F(a) = c \cdot (F(b) - F(a)) = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

Nachweis von (2): $\int_a^b (g(x) + h(x))\,dx = [G(x) + H(x)]_a^b = G(b) + H(b) - (G(a) + H(a))$

$= G(b) + H(b) - G(a) - H(a) = G(b) - G(a) + H(b) - H(a) = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx$

Beispiel 1 **Stammfunktionen bestimmen**

a) Bestimmen Sie jeweils zwei verschiedene Stammfunktionen von f.

(1) $f(x) = 2x^3 + 2x^2$ (2) $f(x) = 6x + 2$ (3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) Kontrollieren Sie Ihre Lösung mithilfe eines MMS.

Lösung

a) (1) $F_1(x) = 2 \cdot \frac{1}{4}x^4 + 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3$

$F_2(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$

(2) $F_1(x) = 6 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 2x = 3x^2 + 2x$

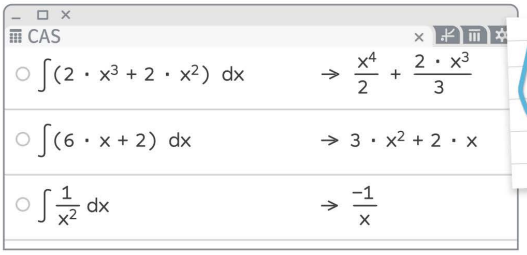
$F_2(x) = 3x^2 + 2x + 11$

(3) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$F_1(x) = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = \frac{1}{-1}x^{-1} = -\frac{1}{x}$

$F_2(x) = -\frac{1}{x} + 2$

b) Die Lösungen des MMS stimmen jeweils mit F_1 überein.



Falls man auf Anhieb keine Stammfunktion findet, kann man zunächst gezielt raten, dann diese Funktion ableiten und daraufhin überlegen, wie die vermutete Stammfunktion korrigiert werden muss.

Erinnerung:
$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
und
$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

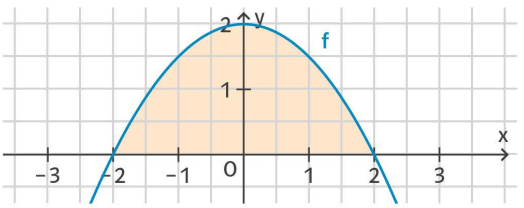
D1 **MMS-Anleitung**
Stammfunktion

Beispiel 2 **Stammfunktionen bestimmen und den Hauptsatz anwenden**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ und ihr zugehöriger Graph.

a) Geben Sie eine Stammfunktion von f an.

b) Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.



Lösung

a) $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x$

b) $A = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_{-2}^{2} = \left(-\frac{1}{6} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{6} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)\right)$

$= -\frac{8}{6} + 4 - \left(\frac{8}{6} - 4\right) = -\frac{4}{3} + 4 - \frac{4}{3} + 4 = 8 - \frac{8}{3} = 8 - 2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3} \Rightarrow A = 5\frac{1}{3}\,FE$

Beispiel 3 **Funktionen im Sachzusammenhang untersuchen**

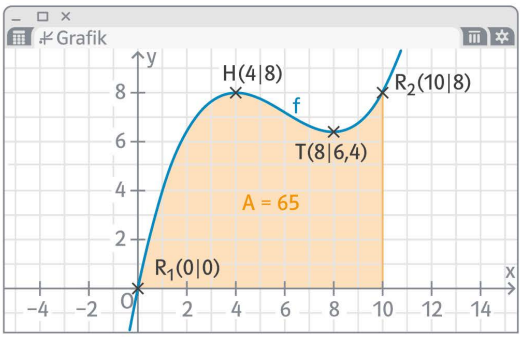
Bei einem Sportfest wird der Lauf einer Teilnehmerin analysiert. Man stellt fest, dass die Geschwindigkeit der Läuferin in den ersten 10 Sekunden näherungsweise durch die Funktion f mit $f(t) = 0{,}05t^3 - 0{,}9t^2 + 4{,}8t$ beschrieben werden kann (t in Sekunden, f(t) in $\frac{m}{s}$).

a) Ermitteln Sie die höchste Geschwindigkeit der Läuferin in dem untersuchten Zeitabschnitt und geben Sie an, wann diese erreicht wird.

b) Berechnen Sie mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung $\int_0^{10} f(t)\,dt$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Lösung

a) Gesucht ist das globale Maximum von f im Intervall $[0; 10]$. Ein MMS liefert den Hochpunkt $H(4|8)$. Bei der Untersuchung der Randwerte stellt man fest, dass $f(4) = f(10) = 8$ ist. Die maximale Geschwindigkeit wird somit nach 4 Sekunden und nach 10 Sekunden erreicht.
Sie beträgt $8\frac{m}{s} \approx 28{,}8\frac{km}{h}$.



Die Extremstellen können hier auch mithilfe der ersten beiden Ableitungen ohne ein MMS berechnet werden.

$1\frac{m}{s} = 3{,}6\frac{km}{h}$

b) $\int_0^{10} f(t)\,dt = [0{,}0125t^4 - 0{,}3t^3 + 2{,}4t^2]_0^{10}$

$= 0{,}0125 \cdot 10^4 - 0{,}3 \cdot 10^3 + 2{,}4 \cdot 10^2 - 0$

$= 65$

Die Läuferin legt innerhalb von 10 Sekunden 65 Meter zurück.

Aufgaben

1 Geben Sie zwei verschiedene Stammfunktionen von f an.

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = 2x$ c) $f(x) = x^2$ d) $f(x) = 3x^2$
e) $f(x) = x^3$ f) $f(x) = x^4$ g) $f(x) = 7$ h) $f(x) = 0$
i) $f(x) = x^2 + x$ j) $f(x) = x^2 + 1$ k) $f(x) = 0{,}5x + 1$ l) $f(x) = -2x + 2$

Lerntipp
Seite 69, Beispiel 1

Die Ergebnisse der Aufgaben können Sie auch mit einem MMS überprüfen.

2 Bestimmen Sie die Gleichung einer Stammfunktion von f.

a) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 1$ b) $f(x) = x^5 - 4x^3$ c) $f(x) = -x^3 - 2x + 7$ d) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{8}{7}x^3$
e) $f(x) = 0{,}24x^7 - 5{,}4x$ f) $f(x) = -25x^4 + 33x^2$ g) $f(x) = 2x^3 - 15x^2$ h) $f(x) = 162x^8 - 54x^5$

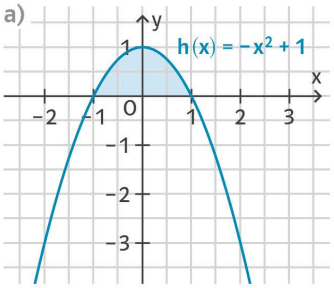
3 Berechnen Sie das Integral mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

a) $\int_{10}^{20} 5\,dx$ b) $\int_{0}^{3} 2x\,dx$ c) $\int_{-1}^{3} 3x\,dx$ d) $\int_{2}^{6} \frac{1}{2}x\,dx$ e) $\int_{0}^{2} \frac{1}{3}x^2\,dx$ f) $\int_{1}^{3} x^2\,dx$

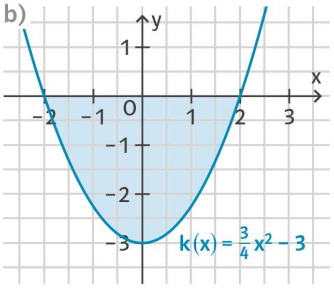
Lerntipp
Seite 69, Beispiel 2

4 Schätzen Sie, wie groß der orientierte Inhalt der markierten Fläche ist. Berechnen Sie diesen dann mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

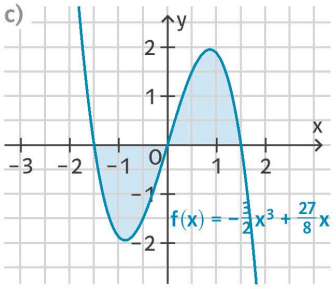
a)



b)



c)



5 a) Berechnen Sie das Integral. (1) $\int_{-2}^{5} x^2\,dx$ (2) $\int_{-2}^{-1} -\frac{1}{2}x^4\,dx$

a) Erläutern Sie mithilfe einer Skizze, was mit dem genannten Integral berechnet wird.

Test 1

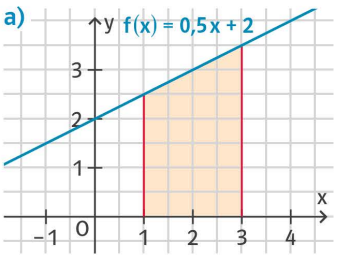
Lösungen, Seite 441

6 Geben Sie eine Stammfunktion von f an.

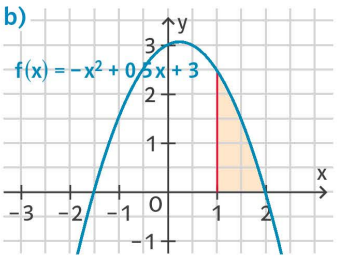
a) $f(x) = 3x^2 + x$ **b)** $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2$ **c)** $f(x) = x + 2$ **d)** $f(x) = 7$

7 Schreiben Sie den Inhalt der markierten Fläche als Integral und berechnen Sie diesen mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

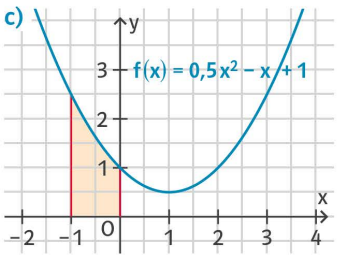
a)



b)



c)



8 Berechnen Sie zu f mit $f(x) = \frac{1}{9}x^2$ mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung das Integral $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$. Interpretieren Sie das Ergebnis in dem beschriebenen Sachzusammenhang.

a) f beschreibt die Geschwindigkeit eines Autos (x in Sekunden, f(x) in Metern pro Sekunde).
b) f beschreibt die Veränderung der Körpertemperatur (x in Stunden, f(x) in °C pro Stunde)

9 Die Wachstumsgeschwindigkeit einer Weinrebe während der ersten 100 Tage lässt sich in Abhängigkeit von ihrem Alter näherungsweise durch die Funktion $w(t) = 0{,}001t^2$ beschreiben (t in Tagen, $w(t)$ in cm pro Tag).

a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{100} w(t)\,dt$.

b) Deuten Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a) im Sachzusammenhang.

10 Die Funktion f mit $f: t \to \frac{1}{20}t^3 - \frac{9}{10}t^2 + \frac{77}{20}t$ soll für $0 \le t \le 12$ verwendet werden, um die Veränderung der Wassermenge in einem Tank zu prognostizieren (t in Tagen, $f(t)$ in Kubikmeter pro Tag). Zu Beginn der Messung sind 4 Kubikmeter Wasser im Tank.

→ **Lerntipp** Seite 69, Beispiel 3

a) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die größte Zuflussrate erwartet wird.

b) Geben Sie eine Stammfunktion von f an und bestimmen Sie mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, wie viel Wasser nach 12 Tagen im Tank ist.

c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Wassermenge im Tank maximal wird.

11 Zur Beschreibung der Wachstumsgeschwindigkeit einer Fichte in den ersten 30 Jahren nach dem Einpflanzen soll die Funktion f mit $f(t) = -\frac{1}{400}t^2 + \frac{1}{10}t$ als Modell verwendet werden (t in Jahren, $f(t)$ in Metern pro Jahr). Die Fichte ist zu Beginn 1 m hoch.

a) Berechnen Sie $f(10)$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

b) Berechnen Sie die höchste Wachstumsgeschwindigkeit, die sich aufgrund der Modellfunktion f ergibt.

c) Berechnen Sie mithilfe der Modellfunktion die Höhe der Fichte nach 30 Jahren.

d) Untersuchen Sie, wann die Fichte laut Modell eine Höhe von zehn Metern erreicht.

e) Eine Fichte im Gebirge wächst langsamer als die in den Teilaufgaben a) bis d) untersuchte Fichte. Es wird aber davon ausgegangen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit ebenfalls durch eine quadratische Funktion der Form $f_a(t) = -\frac{a}{400}t^2 + \frac{a}{10}t$ modelliert werden kann ($0 < a < 1$, t in Jahren, $f(t)$ in Metern pro Jahr). Bestimmen Sie einen passenden Wert für a so, dass eine beim Einpflanzen ein Meter hohe Fichte nach 30 Jahren 20 Meter hoch ist.

MK f) Recherchieren Sie den Wachstumsverlauf von Fichten. Erläutern Sie, ob die verwendeten Modellfunktionen diesen angemessen beschreiben.

12 **Finden Sie den Fehler!**

Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie die richtige Lösung.

a) $f(x) = x^{-2}$ Stammfunktion: $F(x) = -\frac{1}{3}x^{-3}$ b) $\int_0^2 (2x + 7)\,dx = [x^2]_0^2 = 4 - 0 = 4$

c) $\int_0^1 2x(2x - 1)\,dx = [x^2 \cdot (x^2 - x)]_0^1 = 1^2 \cdot (1^2 - 1) - (0 \cdot 0) = 0$

13 Bestimmen Sie die Gleichung einer Stammfunktion F von f mit $F(1) = 2$.

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = 5$ d) $f(x) = -x$ e) $f(x) = -10$

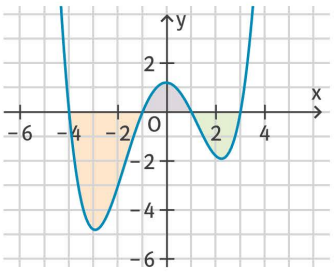
14 Gegeben sind die Funktionen g und h sowie zwei Stammfunktionen G und H von g bzw. h.

a) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass durch $x \to G(x) \cdot H(x)$ in der Regel keine Stammfunktion von $f_1(x) = g(x) \cdot h(x)$ gegeben ist.

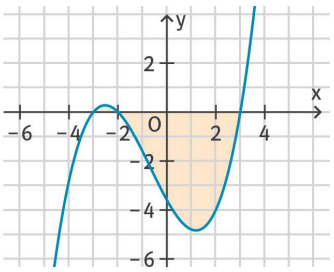
b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass durch $x \to \frac{G(x)}{H(x)}$ in der Regel keine Stammfunktion von $f_2(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ gegeben ist.

15 Bestimmen Sie den orientierten Inhalt der gefärbten Flächen.

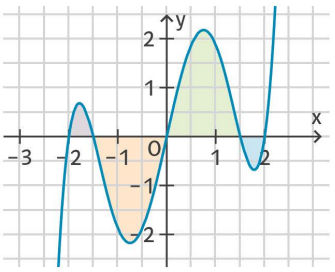
a) $f(x) = 0{,}1(x^2 - 1)(x - 3)(x + 4)$



b) $g(x) = 0{,}2(x^2 - 9)(x + 2)$



c) $h(x) = 0{,}5x(x^2 - 2{,}25)(x^2 - 4)$



Tipp:
Um die Regeln zum Bestimmen von Stammfunktionen anwenden zu können, müssen die Funktionsterme ausmultipliziert werden.

16 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Die Ableitung einer Stammfunktion ist die Funktion selbst.
b) Das Integral beschreibt die Änderungsrate einer Funktion.
c) Der Wert eines Integrals ist positiv.
d) Stammfunktionen sind bis auf konstante Summanden eindeutig bestimmt.

Test 2

Lösungen, Seite 441

17 Die Funktion f mit $f(t) = 0{,}1t^2$ beschreibt im Intervall $[0; 10]$ die Zuflussrate einer Flüssigkeit in ein Gefäß (t in Minuten, $f(t)$ in dm^3 pro Minute).

a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{10} f(t)\,dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

b) Zu Beginn befanden sich 40 dm^3 im Gefäß. Ermitteln Sie das Flüssigkeitsvolumen in dem Gefäß nach 10 Minuten.

18 Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f. Begründen Sie, dass die Aussage gilt.

a) Wenn f nur gerade Exponenten hat, so gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

b) Wenn f nur ungerade Exponenten hat, so gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

19 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f. Schreiben Sie dazu den Funktionsterm als Summe.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^4}$ b) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{2x^2}$ c) $f(x) = \frac{1 + x + x^3}{3x^3}$ d) $f(x) = \frac{(2x + 1)^2 - 1}{x}$

20 Die Funktion f hat eine Stammfunktion. Begründen Sie die folgende Gleichung (Intervalladditivität) mit dem Hauptsatz: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

21 Berechnen Sie möglichst vorteilhaft.

a) $\int_{-1}^{3{,}3} 5x^2\,dx - 10\int_{-1}^{3{,}3} \frac{1}{2}x^2\,dx$ b) $\int_0^1 (x - 2\sqrt{x^2 + 4})\,dx + 2\int_0^1 \sqrt{x^2 + 4}\,dx$ c) $\int_{-2}^{1} (2x)\,dx + \int_1^3 (2x)\,dx$

Grundwissen Test — Lineares und exponentielles Wachstum erkennen

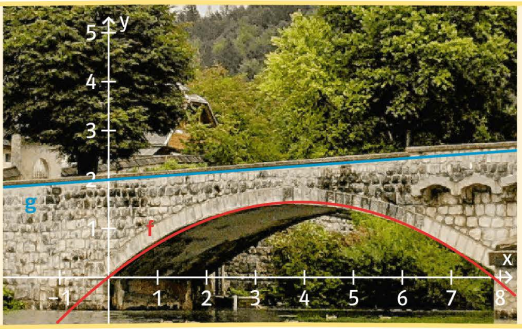
Grundwissen, Seite 413
Lösungen, Seite 441

G **22** Geben Sie an, ob lineares oder exponentielles Wachstum vorliegt. Begründen Sie.

a) Ein Bestand nimmt jede Woche um 4 % zu.
b) Der Preis für eine Kugel Eis steigt jedes Jahr um 10 Cent.

5 Integral und Flächeninhalt

Emir meint: „Mit dem Integral kann ich den Inhalt einer Seitenfläche der Steinbrücke berechnen. Ich muss allerdings Funktionen für die Ränder der Brücke kennen."
Erläutern Sie, wie Emir vorgehen könnte und bestimmen Sie näherungsweise den Inhalt der im Bild sichtbaren Steinfläche.



Bisher wurde das Integral dazu verwendet, Gesamtänderungen von Größen bzw. orientierte Inhalte von Flächen zu bestimmen. Dabei werden die Inhalte von oberhalb der x-Achse liegenden Flächen positiv, die Inhalte von unterhalb der x-Achse liegenden Flächen negativ gezählt. Wenn man dagegen den Inhalt der gesamten Fläche zwischen einem Graphen und der x-Achse bestimmen will, ist zu beachten, dass Flächeninhalte nie negativ sein können.

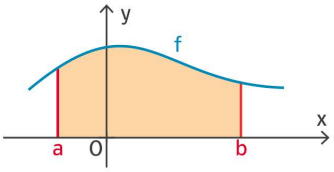


Fig. 1

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

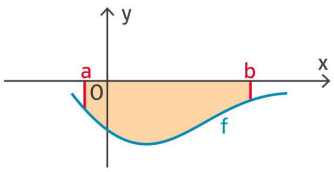


Fig. 2

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

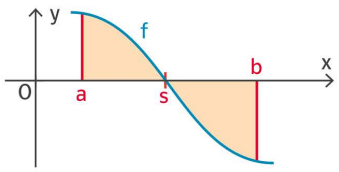


Fig. 3

$$A = \int_a^s f(x)\,dx - \int_s^b f(x)\,dx$$

In Fig. 3 liegt die Fläche zum Teil unterhalb und zum Teil oberhalb der x-Achse. Diese Fläche muss deshalb mit zwei Integralen berechnet werden. Falls die Nullstelle s nicht bekannt ist, muss sie vorher bestimmt werden.

In Fig. 3 kann man auch das Betragszeichen verwenden:
$\int_a^s f(x)\,dx + \left|\int_s^b f(x)\,dx\right|$

In Fig. 4 soll der Inhalt A der Fläche bestimmt werden, die von den Graphen zweier Funktionen f und g begrenzt wird. Es gilt:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

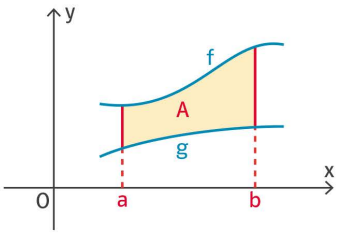


Fig. 4

Damit bei der Fläche in Fig. 5 ebenso wie in Fig. 4 vorgegangen werden kann, verschiebt man beide Graphen um d so weit nach oben, bis sie im Intervall $[a; b]$ vollständig oberhalb der x-Achse liegen (Fig. 6). Da sich bei der Verschiebung der Flächeninhalt nicht ändert, gilt:

$$A_1 = A_2 = \int_a^b (f(x) + d)\,dx - \int_a^b (g(x) + d)\,dx$$
$$= \int_a^b (f(x) + d - g(x) - d)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

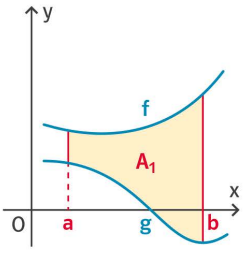


Fig. 5

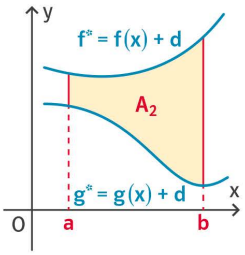


Fig. 6

Diese Rechenmethode kann immer angewendet werden, wenn $f(x) \geq g(x)$ im Intervall $[a; b]$ gilt. Es spielt dabei keine Rolle, ob Teile der Fläche unterhalb der x-Achse liegen.

Inhalte von Flächen mithilfe von Integralen berechnen

Bei der Berechnung des **Inhalts der Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse** im Intervall $[a; b]$ geht man folgendermaßen vor:

1. Man bestimmt die Nullstellen von f im Intervall $[a; b]$.
2. Man berechnet den Inhalt der Teilflächen mithilfe von Integralen.
3. Man addiert die Inhalte der Teilflächen (Beträge der einzelnen Integrale).

Wird eine **Fläche** im Intervall $[a; b]$ **von** den **Graphen zweier Funktionen f und g begrenzt** und gilt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a; b]$, dann gilt für ihren Inhalt A: $\mathbf{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$

Beispiel 1 Flächeninhalte teilweise unterhalb und oberhalb der x-Achse berechnen

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x$. Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, der x-Achse und den Geraden $x = -1$ und $x = 3$ eingeschlossen wird.

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einem MMS.

Lösung

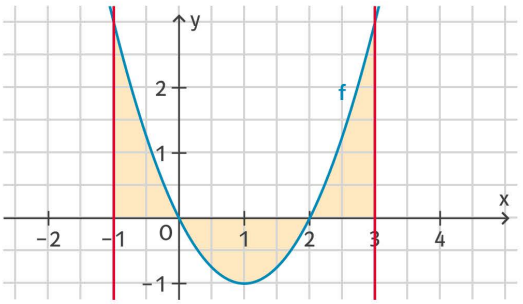
a) $f(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$

Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\tfrac{1}{3} - 1\right) = \tfrac{4}{3}$$

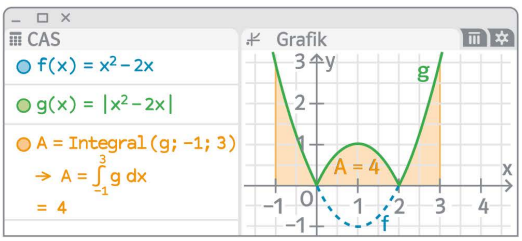
$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{0}^{2} = \tfrac{8}{3} - 4 = -\tfrac{4}{3}$$

$$\int_{2}^{3} f(x)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{2}^{3} = 9 - 9 - \left(-\tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{4}{3}$$



Gesamter Flächeninhalt: $A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \left|\int_{0}^{2} f(x)\,dx\right| + \int_{2}^{3} f(x)\,dx = \tfrac{4}{3} + \left|-\tfrac{4}{3}\right| + \tfrac{4}{3} = 4$

b) *Berechnung mithilfe einer Betragsfunktion:*

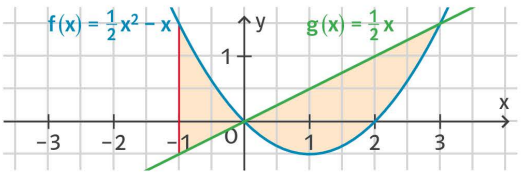


Manche MMS können den Flächeninhalt auch ohne Betragsfunktion erstellen.

D1 **MMS-Anleitung** Flächeninhalt bestimmen

Beispiel 2 Inhalt der Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen berechnen

Entnehmen Sie der Abbildung die Schnittpunkte der Graphen von f und g. Berechnen Sie mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen im Intervall $[-1; 3]$.



Lösung

Die Graphen schneiden sich in den Punkten $A(0\,|\,0)$ und $B(3\,|\,1{,}5)$.

$$\int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-1}^{0} \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x\right) dx = \left[\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{3}{4}x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\tfrac{11}{12}\right) = \tfrac{11}{12} = A_1$$

$$\int_{0}^{3} (f(x) - g(x))\,dx = \left[\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{3}{4}x^2\right]_{0}^{3} = \left(-\tfrac{9}{4}\right) - 0 = -\tfrac{9}{4}, \text{ also } A_2 = \left|-\tfrac{9}{4}\right| = \tfrac{9}{4}$$

$$A_1 + A_2 = \tfrac{11}{12} + \tfrac{9}{4} = \tfrac{19}{6}$$

$\int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx$ ist negativ, weil der Graph von g im Intervall $]0; 3[$ oberhalb von f verläuft. Wenn man dies weiß, kann man auch direkt das Integral $\int_0^3 (g(x) - f(x))\,dx$ berechnen, um den Flächeninhalt zu ermitteln.

Aufgaben

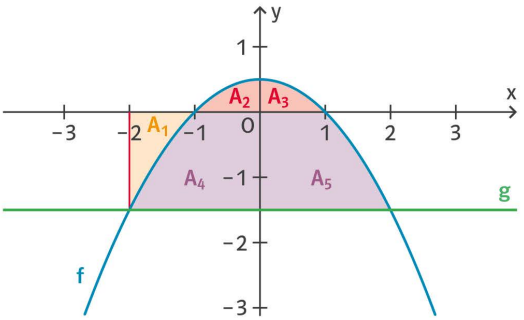
○ **1** a) In der Abbildung sind die Graphen zweier Funktionen f und g gegeben. Ordnen Sie jedem blauen Kärtchen A bis D ein passendes gelbes Kärtchen 1 bis 4 zu.

A $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ B $\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx$

C $\left|\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx\right|$ D $\int_{0}^{2} (f(x) - g(x))\,dx$

1 A_1 3 $A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

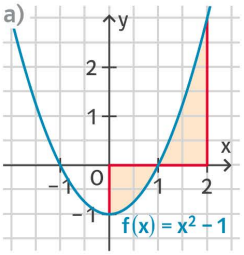
2 $A_2 + A_3$ 4 $A_3 + A_5$

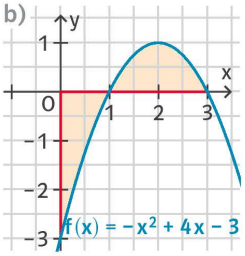


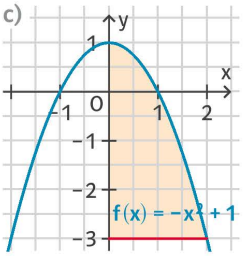
b) Geben Sie an, wie man A_2 bzw. $A_1 + A_4$ mithilfe von Integralen berechnen kann.

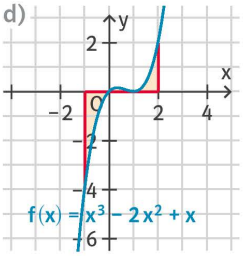
○ **2** Bestimmen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche.

→ **Lerntipp** Seite 74, Beispiel 1

a) 

b) 

c) 

d) 

○ **3** Berechnen Sie mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

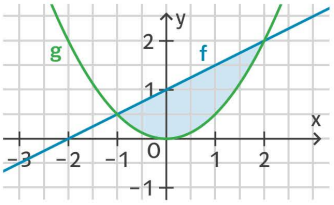
a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x$ b) $f(x) = (x - 1)^2 - 1$ c) $f(x) = x^4 - 4x^2$

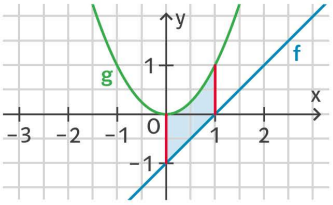
d) $f(x) = -4(x^2 - 1)$ e) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$ f) $f(x) = -0{,}5x^2 - 2x$

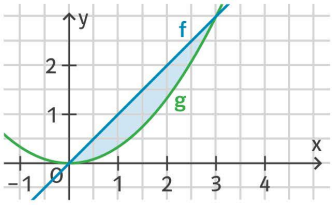
○ **4** Berechnen Sie mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der gefärbten Fläche. Die Integralgrenzen können der Zeichnung entnommen werden.

→ **Lerntipp** Seite 74, Beispiel 2

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ b) $f(x) = x - 1$; $g(x) = x^2$ c) $f(x) = x$; $g(x) = \frac{1}{3}x^2$







○ **5** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Graphen von f und g einschließen.

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x$ b) $f(x) = x^2$; $g(x) = -x^2 + 2$

c) $f(x) = x^3$; $g(x) = x^2$ d) $f(x) = 4x^3 + x^2 - 9x$; $g(x) = x^2$

e) $f(x) = x^3 + x$; $g(x) = 2x^2$ f) $f(x) = -0{,}5x^3$; $g(x) = 0{,}5x^3 - 4x^2 + 3x$

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 441

○ **6** Der Graph von f mit $f(x) = -x^2 + 4x$ begrenzt mit der x-Achse eine Fläche. Berechnen Sie ihren Inhalt mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung.

○ **7** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Graphen der Funktionen g und h einschließen.

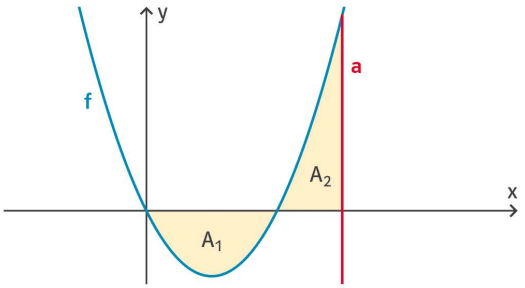
a) $g(x) = 1 - x^2$; $h(x) = x - 1$ b) $g(x) = x^2 - 2$; $h(x) = 7$

8 Gegeben sind die Gerade g mit $x = a$ und die Funktion f mit $f(x) = (x - 1)^2 - 1$.

a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_1, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

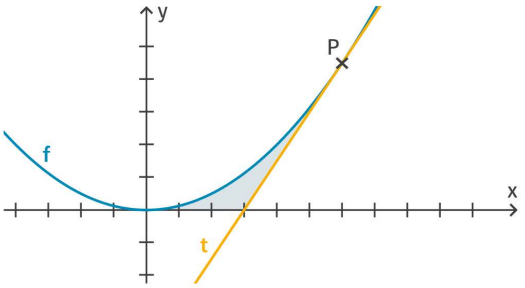
b) Berechnen Sie für $a = 5$ den Inhalt der gelb markierten Fläche.

c) Berechnen Sie a so, dass die Fläche A_1 genauso groß ist wie die Fläche A_2.



9 a) Berechnen Sie jeweils den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f mit $f(x) = x^2$, der Tangente im Punkt P und der x-Achse begrenzt wird.
(1) P(1|1) (2) P(2|4) (3) P(3|9)

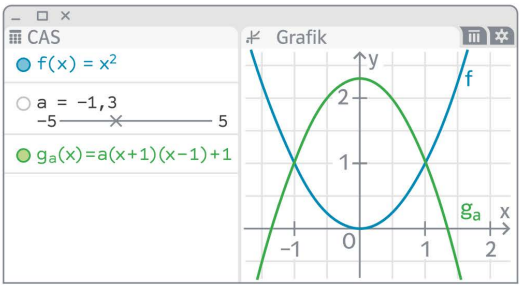
b) Stellen Sie eine Vermutung darüber auf, wie groß der Flächeninhalt ist, wenn die Tangente im Punkt $P(a|f(a))$ betrachtet wird. Überprüfen Sie Ihre Vermutung rechnerisch.



10 Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = x^2$ sowie die Funktionsschar g_a mit $g_a(x) = a(x + 1)(x - 1) + 1$ $(a \neq 0)$.

a) Zeigen Sie, dass die Schnittpunkte der beiden Graphen nicht von a abhängen.

b) Bestimmen Sie a so, dass der Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g_a eingeschlossen wird, genau 4 Flächeneinheiten beträgt.



I3 **interaktive Anwendung**
Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

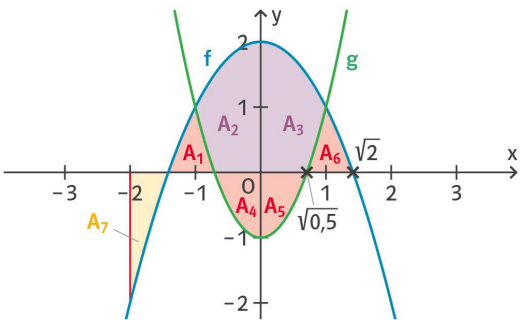
11 **Finden Sie den Fehler!**
Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g. Die Graphen sind jeweils symmetrisch zur y-Achse und schneiden sich in den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie die richtige Lösung.

a) $A_4 + A_5 = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{0,5}} g(x)\,dx$

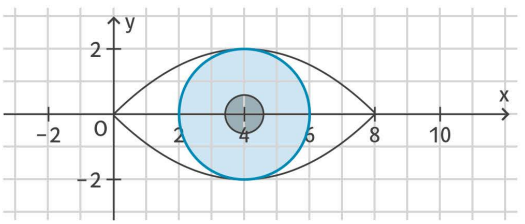
b) $A_7 + A_1 + A_2 = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$

c) $A_2 = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx$

d) $A_6 = \int_{\sqrt{0,5}}^{\sqrt{2}} (g(x) - f(x))\,dx$



12 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -\frac{1}{8}x(x - 8)$ und $g(x) = \frac{1}{8}x(x - 8)$ sowie der Kreis mit dem Mittelpunkt M(4|0) und dem Radius 2.
Berechnen Sie den Inhalt der weißen Fläche des „Auges".



13 In der Abbildung schneiden sich jeweils die Graphen einer Wurzelfunktion f_{Farbe} und einer quadratischen Funktion g_{Farbe}.

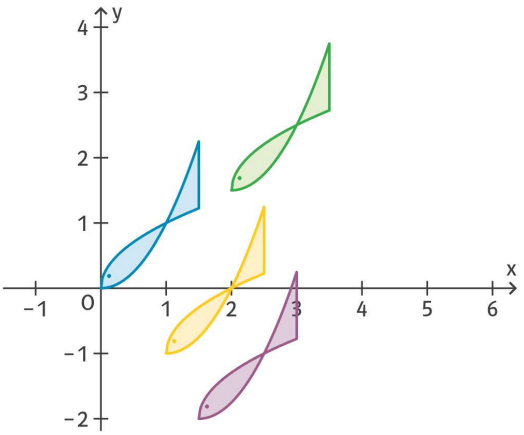
$f_{blau}(x) = \sqrt{x}$, $g_{blau}(x) = x^2$;

$f_{gelb}(x) = \sqrt{x-1} - 1$, $g_{gelb}(x) = (x-1)^2 - 1$;

$f_{lila}(x) = \sqrt{x-1{,}5} - 2$, $g_{lila}(x) = (x-1{,}5)^2 - 2$;

$f_{grün}(x) = \sqrt{x-2} + 1{,}5$, $g_{grün}(x) = (x-2)^2 + 1{,}5$.

Überprüfen Sie die auf den Kärtchen abgebildeten Aussagen und verdeutlichen Sie Ihre Ausführungen mit konkreten Berechnungen. Ergänzen Sie gegebenenfalls Aussagen.



$\int_1^{2,5} (g_{gelb}(x) - f_{gelb}(x))\,dx < 0$

$\int_0^{1,5} f_{blau}(x)\,dx < \int_2^{3,5} f_{grün}(x)\,dx$

Der grüne Fisch ist etwa 0,57 FE groß.

$\int_1^{2,5} |g_{gelb}(x) - f_{gelb}(x)|\,dx = \int_{1,5}^{3} |g_{lila}(x) - f_{lila}(x)|\,dx$

Der Flächeninhalt des Körpers eines Fisches ist größer als der der Flosse.

Test 2

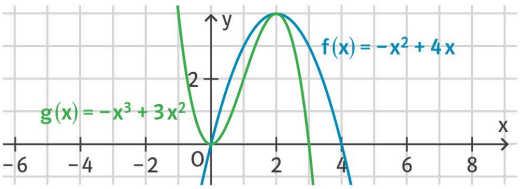
Lösungen, Seite 442

14 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die begrenzt wird

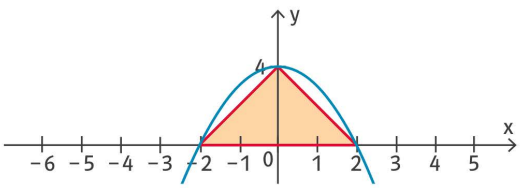
a) vom Graphen von g und der x-Achse,

b) von den Graphen von f und g,

c) vom Graphen von f, der y-Achse und der Geraden h mit $y = 4$.



15 Zeigen Sie, was bereits Archimedes nachweisen konnte: Der Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f mit $f(x) = t - x^2$ $(t > 0)$ mit der x-Achse einschließt, ist das $\frac{4}{3}$-Fache des Flächeninhalts des einbeschriebenen Dreiecks (vgl. Abbildung für $t = 4$).



16 Die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 + 9$ begrenzt mit der x-Achse eine Fläche. Berechnen Sie die Gleichung einer Parallelen zur x-Achse, die diese Fläche in zwei gleich große Teile teilt.

17 Die Graphen von f_a mit $f_a(x) = a \cdot \sin(x)$ und g_a mit $g_a(x) = -\frac{1}{a} \cdot \sin(x)$ begrenzen für $a > 0$ und $x \in [0; \pi]$ eine Fläche. Bestimmen Sie a so, dass der Inhalt dieser Fläche minimal wird.

Grundwissen Test — Lineares und exponentielles Wachstum untersuchen

Grundwissen, Seite 413
Lösungen, Seite 442

G **18** Untersuchen Sie, ob es sich um lineares oder exponentielles Wachstum handeln kann. Ermitteln Sie gegebenenfalls eine passende Funktionsgleichung und berechnen Sie f(10).

a)

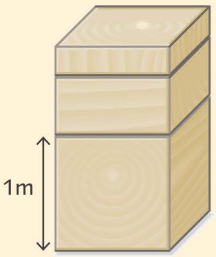
n	0	1	2	3
f(n)	10	12	14,4	17,28

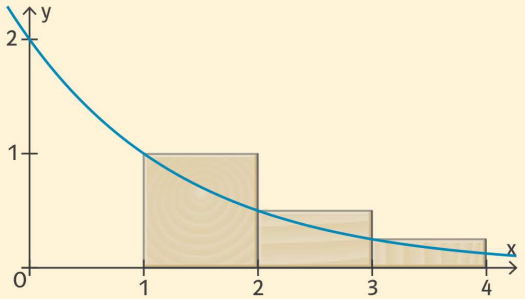
b)

n	0	1	2	3
f(n)	50	56	62	68

6 Unbegrenzte Flächen – uneigentliche Integrale

Holzklötze mit der Breite 1m und den Höhen 1m, $\frac{1}{2}$m, $\frac{1}{4}$m usw. werden zu einem Turm aufeinandergeschichtet. Dieselben Klötze werden rechts nebeneinandergelegt.
Welche Aussagen kann man über die Höhe eines Turms mit unendlich vielen Klötzen und den Flächeninhalt unterhalb des rechts abgebildeten Graphen treffen?





Bisher wurden mithilfe des Integrals die Inhalte von Flächen berechnet, die eine feste untere und eine feste obere Grenze haben. Ist eine Fläche nach rechts (bzw. links) oder nach oben (bzw. unten) unbegrenzt, stellt sich die Frage, ob man einer solchen unbegrenzten Fläche einen Flächeninhalt zuordnen kann.

Nach rechts unbegrenzte Fläche:

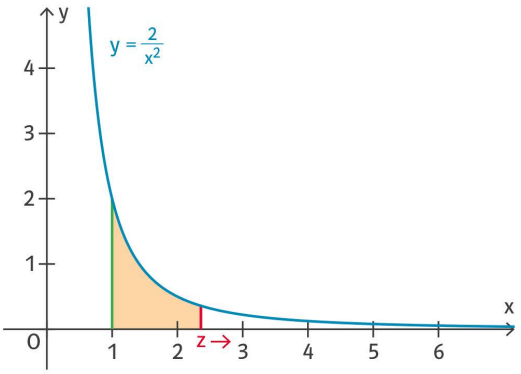


Fig. 1

Um den Inhalt der nach rechts unbegrenzten Fläche in Fig. 1 zu untersuchen, berechnet man zunächst mit der variablen rechten Grenze z den Inhalt der Fläche im Intervall $[1; z]$.

$$A(z) = \int_1^z \frac{2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^z = -\frac{2}{z} + 2 = 2 - \frac{2}{z}$$

Für $z \to +\infty$ strebt $A(z) \to 2$. Daher ist der Flächeninhalt der unbegrenzten Fläche in Fig. 1 $A = 2\,\text{FE}$.

Nach oben unbegrenzte Fläche:

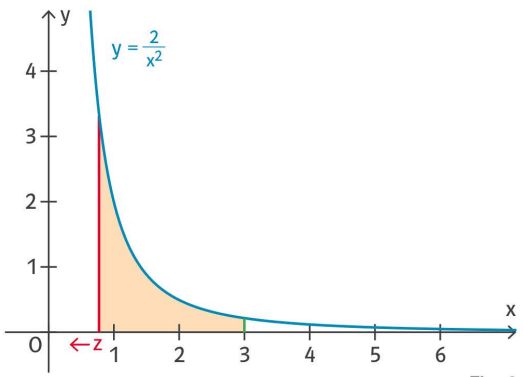


Fig. 2

Um den Inhalt der nach oben unbegrenzten Fläche in Fig. 2 zu untersuchen, berechnet man zunächst mit der variablen linken Grenze z den Inhalt der Fläche im Intervall $[z; 3]$.

$$A(z) = \int_z^3 \frac{2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_z^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{z}$$

Für $z \to 0$ strebt $A(z) \to +\infty$. Daher hat die unbegrenzte Fläche in Fig. 2 keinen endlichen Inhalt.

Uneigentliche Integrale

Bei der Untersuchung des Inhalts von **unbegrenzten Flächen** untersucht man Integrale mit einer variablen Grenze und einer festen Grenze, wie $\int_1^z f(x)\,dx$ oder $\int_z^3 f(x)\,dx$, auf einen Grenzwert für $z \to \pm\infty$ bzw. für $z \to c$ (c ist eine Konstante).

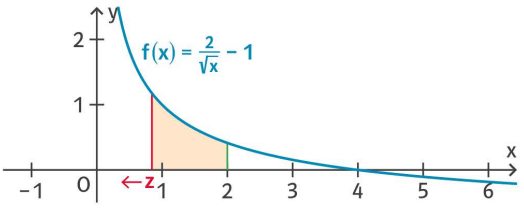
Existieren die Grenzwerte, schreibt man: $\lim\limits_{z \to +\infty} \int_1^z f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ bzw. $\lim\limits_{z \to c} \int_z^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$

Ergibt sich ein Grenzwert, nennt man ein solches Integral ein **uneigentliches Integral**.

Beispiel **Unbegrenzte Flächen untersuchen**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$.

Untersuchen Sie, ob die Fläche, die vom Graphen von f, der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $x = 2$ eingeschlossen wird, einen endlichen Flächeninhalt hat.



Lösung

ohne MMS

Man rechnet mit einer variablen linken Grenze $z > 0$ im Intervall $[z; 2]$:

$$A(z) = \int_z^2 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \int_z^2 (2x^{-0,5} - 1)\,dx$$
$$= [4x^{0,5} - x]_z^2 = [4\sqrt{x} - x]_z^2$$
$$= 4\sqrt{2} - 2 - (4\sqrt{z} - z)$$

Für $z \to 0$ strebt $4\sqrt{2} - 2 - 4\sqrt{z} + z \to 4\sqrt{2} - 2$.

Es gilt also $\lim\limits_{z \to 0} A(z) = 4\sqrt{2} - 2$.

Die untersuchte Fläche hat einen endlichen Flächeninhalt von $A = 4\sqrt{2} - 2\,\text{FE}$.

mit MMS

Man kann den Grenzwert berechnen.

CAS

$\lim\limits_{z \to 0}\left(\int_z^2 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx\right)$ → $4 \cdot \sqrt{2} - 2$

Es ist auch möglich, das uneigentliche Integral mit der unteren Grenze 0 einzugeben.

CAS

$\int_0^2 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx$ → $4 \cdot \sqrt{2} - 2$

Der Flächeninhalt ist endlich $(A = 4\sqrt{2} - 2\,\text{FE})$.

D1 **MMS-Anleitung** Integrale berechnen

Aufgaben

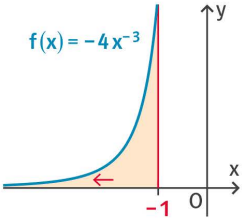
○ **1** Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

a) (1) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f im Intervall $[1; 10]$ bzw. $[1; 100]$ mit der x-Achse einschließt.
(2) Untersuchen Sie den Grenzwert des Inhalts der nach rechts unbegrenzten Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[1; b[$ für $b \to +\infty$.

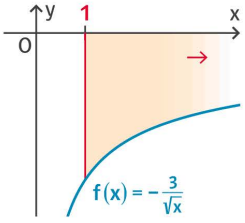
b) (1) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion g im Intervall $[0{,}1; 1]$ bzw. $[0{,}01; 1]$ mit der x-Achse einschließt.
(2) Untersuchen Sie den Grenzwert des Inhalts der nach oben unbegrenzten Fläche zwischen dem Graphen von g und der x-Achse im Intervall $]b; 1]$ für $b \to 0$.

○ **2** Untersuchen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung, ob die gefärbte unbegrenzte Fläche einen endlichen Inhalt hat.

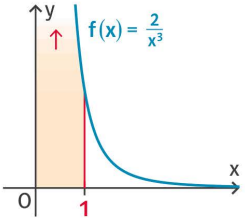
a)



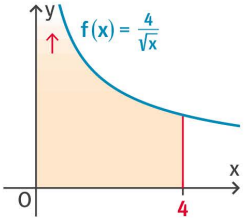
b)



c)



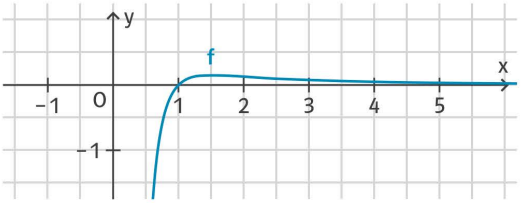
d)



○ **3** Untersuchen Sie, ob der Graph von f mit $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ mit der x-Achse

a) im Intervall $[1; a[$ für $a \to +\infty$ einen endlichen Flächeninhalt einschließt,

b) im Intervall $]a; 1]$ (mit $a > 0$) für $a \to 0$ einen endlichen Flächeninhalt einschließt.



→ **Lerntipp** Seite 79, Beispiel

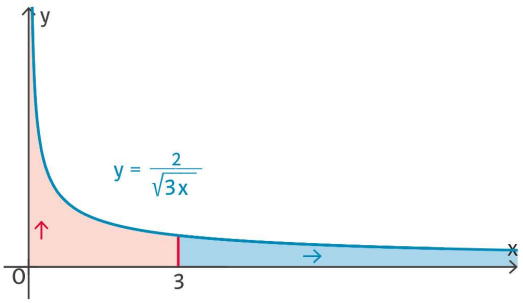
Die Lösungen zu Aufgabe 2 können mit einem MMS überprüft werden.

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 442

○ **4** Untersuchen Sie, ob der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^3}$ mit der x-Achse im Intervall $[0{,}5; a[$ für $a \to +\infty$ einen endlichen Flächeninhalt einschließt und geben Sie diesen gegebenenfalls an.

○ **5** Untersuchen Sie, ob die gefärbten unbegrenzten Flächen jeweils einen endlichen Inhalt A haben. Geben Sie gegebenenfalls A an.



◒ **6** a) Gegeben sind die Funktionsscharen g_a mit $g_a(x) = ax$ und f_a mit $f_a(x) = ax + \frac{1}{x^2}$ $(a \neq 0)$.
Zeigen Sie, dass die Fläche, die die Graphen von g_a und f_a im Intervall $[1; b[$ für $b \to +\infty$ einschließen, einen endlichen Inhalt hat, dessen Größe nicht von a abhängt.

b) Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{ax^2}$ $(a \neq 0)$.
Zeigen Sie, dass der Graph von f_a für alle $a \neq 0$ im Intervall $[1; b[$ für $b \to +\infty$ mit der x-Achse einen endlichen Flächeninhalt einschließt. Untersuchen Sie, für welche Werte von a dieser Flächeninhalt genau 10 Flächeneinheiten groß ist.

Die Lösungen zu den Teilaufgaben a) und b) können mit einem MMS überprüft werden.

◒ **7** Adrian behauptet: „Ob die Fläche, die der Graph einer Potenzfunktion f mit $f(x) = x^{-r}$ mit der x-Achse im Bereich $]0; 1]$ oder $[1; +\infty[$ einschließt, einen endlichen Flächeninhalt hat, hängt davon ab, ob $r > 1$ oder $r < 1$ ist."

a) Untersuchen Sie mithilfe eines MMS anhand von Beispielen, ob Adrians Behauptung stimmt. Geben Sie an, welche unbegrenzten Flächen für welche Werte von r einen endlichen Inhalt haben.

b) Untersuchen Sie mithilfe eines MMS, welche Ergebnisse man für $r = 1$ erhält.

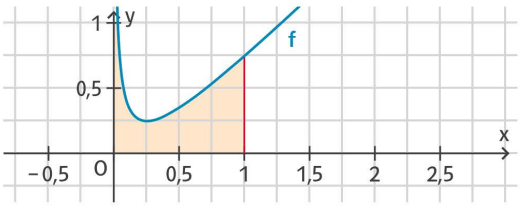
Der Nachweis der Ergebnisse aus Teilaufgabe a) erfolgt in Aufgabe 10.

◒ **8** Berechnen Sie $\int_1^a x^{-2}\,dx$ für $a = 2, 5, 10, 20, 50$ und 100. Untersuchen Sie, wie viel Prozent dies jeweils von $\int_1^{+\infty} x^{-2}\,dx$ ist.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 442

◒ **9** Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x + \frac{1}{4\sqrt{x}} - 0{,}5$, $x > 0$, schließt mit den Koordinatenachsen für $x \leq 1$ eine nach oben nicht begrenzte Fläche ein.
Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Inhalt A hat.



● **10** Untersuchen Sie, für welche Werte von $r \neq 1$

a) das Integral $\int_1^z \frac{1}{x^r}\,dx$ für $z \to +\infty$ einen endlichen Grenzwert hat,

b) das Integral $\int_z^1 \frac{1}{x^r}\,dx$ für $z \to 0$ einen endlichen Grenzwert hat.

Das Bestimmen einer Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ wird in Kapitel 3 thematisiert.

Grundwissen Test — Wachstumsmodelle vergleichen

→ **Grundwissen**, Seite 413
Lösungen, Seite 442

G **11** 2023 erhielt ein Café 10 000 Online-Bewertungen, 2024 waren es schon 11 000. Untersuchen Sie, wie sich die Anzahl der Bewertungen in den nächsten fünf Jahren entwickelt, wenn man

a) von linearem Wachstum ausgeht, **b)** von exponentiellem Wachstum ausgeht.

7 Volumen von Rotationskörpern

Eine Firma wirbt:
Egal, ob Schachfiguren oder Stuhlbeine:
Zum Drechseln braucht man nur eine Kurve,
einen PC und eine Fräsmaschine.
Nehmen Sie Stellung.

Mit dem Integral wurden bisher Fragestellungen zum Flächeninhalt und zur Rekonstruktion von Größen beantwortet. Mit demselben Konzept kann man auch Rauminhalte von Körpern bestimmen, die durch Rotation um eine Achse entstehen.

Ein Rotationskörper entsteht, wenn eine vom Graphen einer Funktion im Intervall $[a; b]$ eingeschlossene Fläche um die x-Achse rotiert. Die Bestimmung des Volumens bei Rotationskörpern orientiert sich am Verfahren zur Bestimmung von Flächeninhalten.
Bei der Berechnung von Flächeninhalten nähert man die Fläche unterhalb eines Funktionsgraphen im Intervall $[a; b]$ durch Rechtecke der Breite h an (vgl. Fig. 2). Die Funktion f ist integrierbar, wenn für immer schmaler werdende Rechtecke, also für $h \to 0$ die Summe der Inhalte der Rechtecksflächen gegen einen festen Wert strebt. Dieser Grenzwert ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

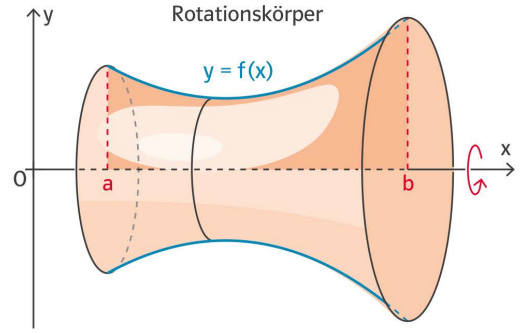


Fig. 1

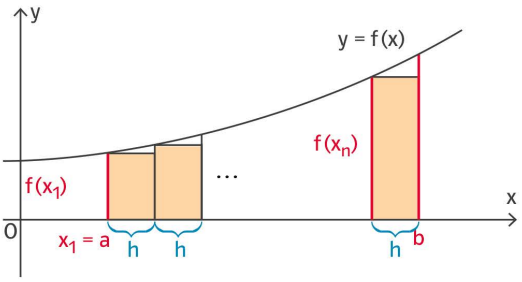


Fig. 2

Bei der Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers geht man ähnlich vor:
Man nähert den Rotationskörper durch Zylinder der Höhe h an. Je schmaler die Zylinder werden, desto besser wird der Rotationskörper angenähert. Im Grenzfall $h \to 0$ erhält man als Grenzwert der Summe der Zylindervolumina das Volumen des Rotationskörpers. Mithilfe der Formel $V = \pi r^2 \cdot h$ berechnet man das Volumen V_i eines einzelnen Zylinders und erhält $V_i = \pi f(x_i)^2 \cdot h$.

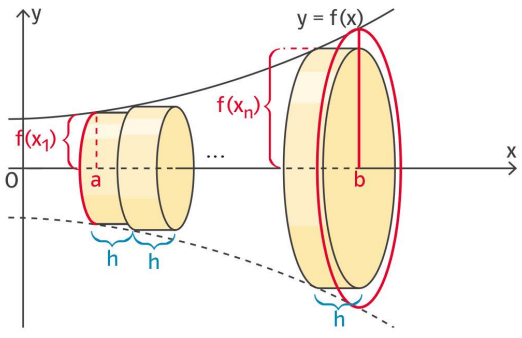


Fig. 3

Für das Volumen V des Rotationskörpers im Intervall $[a; b]$ gilt somit:

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2\,dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Volumen von Rotationskörpern

Die Funktion f sei auf $[a; b]$ differenzierbar. Rotiert die Fläche unter dem Graphen von f im Intervall $[a; b]$ um die x-Achse, so entsteht ein **Rotationskörper**.

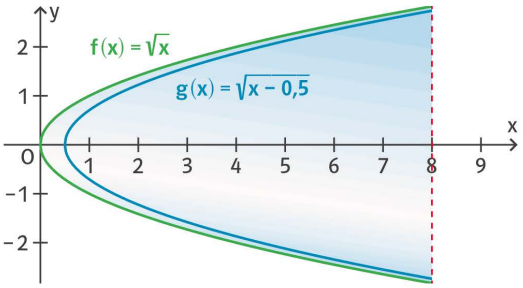
Sein **Volumen** V beträgt $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.

Beispiel **Rauminhalt eines Rotationskörpers bestimmen**

Durch die Rotation der Graphen von f mit $f(x) = \sqrt{x}$ und g mit $g(x) = \sqrt{x - 0{,}5}$ um die x-Achse entsteht der Glaskörper eines 8 cm hohen Sektglases ohne Stiel (x, f(x) und g(x) in cm).

a) Berechnen Sie mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung
(1) wie viel Flüssigkeit maximal in das Glas passt,
(2) welches Volumen das zur Herstellung benötigte Glas hat.

b) Überprüfen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe a) mit einem MMS.



Lösung

a) (1) *Das gesuchte Volumen V entspricht dem Volumen des Rotationskörpers, der bei Rotation der vom Graphen von g begrenzten Fläche im Intervall $[0{,}5; 8]$ entsteht.*

$$V_g = \pi \int_{0{,}5}^{8} \left(\sqrt{x - 0{,}5}\right)^2 dx = \pi \int_{0{,}5}^{8} (x - 0{,}5)\, dx = \pi \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x\right]_{0{,}5}^{8} = 28{,}125\,\pi \approx 88{,}36$$

Man kann maximal ca. $88\,cm^3 = 88\,ml$ Flüssigkeit in das Glas einfüllen.

(2) V_g sei das Volumen des Körpers, der bei Rotation der zu g gehörenden Fläche entsteht; V_f das Volumen des Körpers, der bei Rotation der zu f gehörenden Fläche entsteht.

$$V_f = \pi \int_0^8 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^8 x\, dx = \pi \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^8 = 32\,\pi;\ V_g = 28{,}125\,\pi \text{ (siehe Teilaufgabe a))}$$

Für das gesuchte Volumen V gilt: $V = V_f - V_g = 3{,}875 \cdot \pi \approx 12{,}17$

Das Glasvolumen beträgt etwa $12{,}17\,cm^3$.

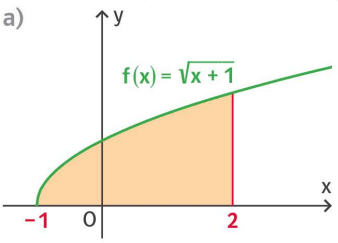
b) Die Berechnung mit einem MMS führt zu demselben Ergebnis.

Aufgaben

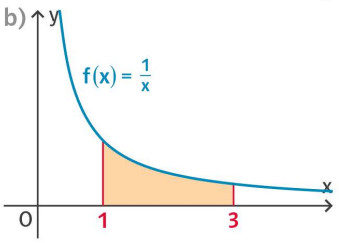
○ **1** Die gefärbte Fläche rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

→ **Lerntipp** Seite 82, Beispiel a)

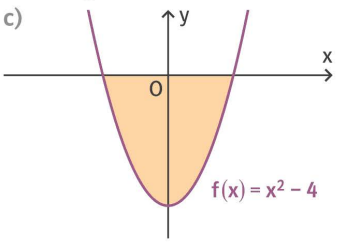
a)



b)



c)



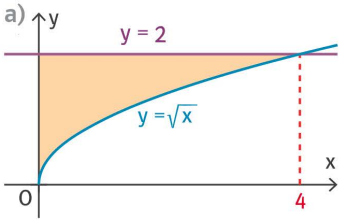
d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse der vorherigen Teilaufgaben mithilfe eines MMS.

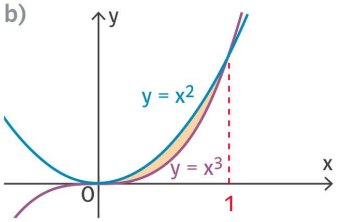
○ **2** Die Gerade mit der Gleichung $y = x$ rotiert im Intervall $[0; a]$ um die x-Achse $(a > 0)$. Beschreiben Sie, welcher Körper dabei entsteht und berechnen Sie das Volumen für $a = 1$ und $a = 2$.

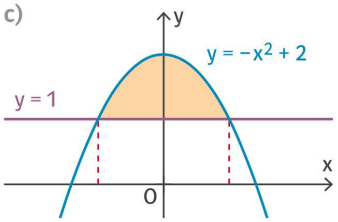
○ **3** Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, die um die x-Achse rotiert. Skizzieren Sie den Graphen von f und berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

a) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$ b) $f(x) = x(x + 2)$ c) $f(x) = x\sqrt{4 - x}$ d) $f(x) = (x - 1)(x + 1)$

○ **4** Die gefärbte Fläche, die von den beiden dargestellten Funktionsgraphen eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

a)


b)


c)


Test 1 → **Lösungen**, Seite 442

○ **5** Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Fläche A um die x-Achse rotiert.

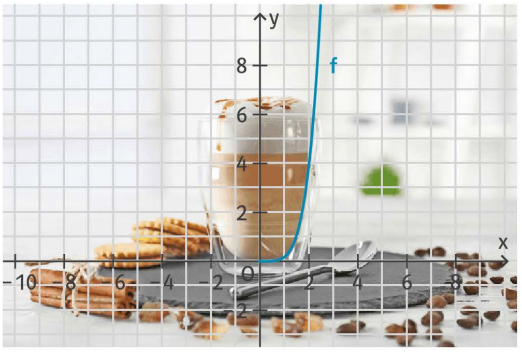
a) Die Fläche A wird vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 9$ und der x-Achse begrenzt.

b) Die Fläche A wird vom Graphen der Funktion g mit $g(x) = \sqrt{x + 2}$, der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 2$ begrenzt.

◒ **6** Der innere Rand eines Glases kann durch die Funktion f mit $f(x) = 0{,}15x^{\frac{23}{5}}$ modelliert werden (x und f(x) in cm). Das Glas ist bis zu einer Höhe von etwa 4,5 cm gefüllt.

a) Erläutern Sie, wie man mit der Umkehrfunktion von f das Flüssigkeitsvolumen berechnen kann.

b) Für die Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f gilt $\bar{f}(x) \approx 1{,}5105x^{\frac{5}{23}}$. Berechnen Sie, wie viel Flüssigkeit in dem Glas ist.



◒ **7** **Volumen von Rotationskörpern bei Funktionsscharen**

Die Fläche zwischen dem Graphen von f_a $(a > 0)$ und der x-Achse rotiert im Intervall $[0; 10]$ um die x-Achse. Untersuchen Sie, ob es einen Wert a gibt, sodass das Volumen des entstehenden Rotationskörpers 100 Volumeneinheiten beträgt.

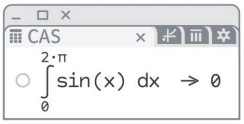
a) $f_a(x) = ax$ b) $f_a(x) = x + a$ c) $f_a(x) = a\sqrt{x}$ d) $f_a(x) = \sqrt{x + a}$

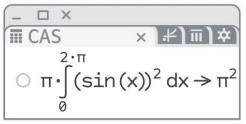
◒ **8** MK Mia behauptet: „In der Formel für das Rotationskörpervolumen steht, dass man erst quadrieren und dann integrieren muss. Man kann aber auch erst integrieren und dann quadrieren." Untersuchen Sie anhand von Beispielen, ob Mia recht hat, und nehmen Sie Stellung.

◒ **9** Der Graph der Funktion f, die y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = a$ begrenzen eine nach oben offene Fläche, die um die x-Achse rotiert. Dabei entsteht ein unbegrenzter Körper K. Untersuchen Sie, ob K ein (endliches) Volumen V besitzt.

a) $f(x) = \frac{4}{x}$; $a = 1$ b) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{x}}$; $a = 2$

◒ **10** Interpretieren Sie die rechts abgebildeten Ergebnisse geometrisch.





11 Durch Rotation eines Rechtecks wird in Fig. 1 ein Zylinder erzeugt.

MK a) Berechnen Sie sein Volumen mit der Formel auf dem Rand und mit einem Integral.

b) Leiten Sie die Formel für das Zylindervolumen her, indem Sie die Fläche unter dem Graphen von f mit $f(x) = r$ im Intervall $[0; h]$ rotieren lassen.

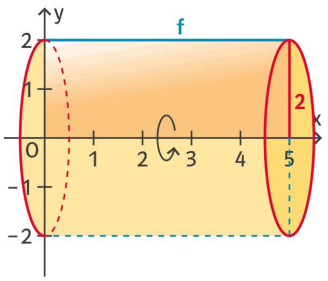


Fig. 1

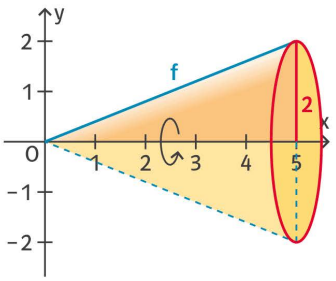


Fig. 2

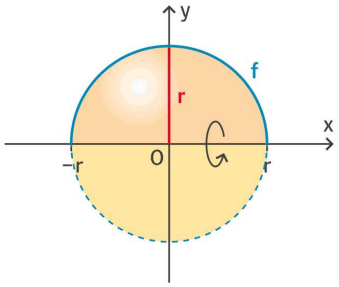


Fig. 3

12 Durch Rotation eines Dreiecks wird in Fig. 2 ein Kegel erzeugt.

a) Berechnen Sie sein Volumen mit der Formel auf dem Rand und mit einem Integral.

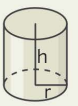
b) Leiten Sie die Formel für das Kegelvolumen her, indem Sie die Fläche unter dem Graphen von f mit $f(x) = \frac{r}{h}x$ im Intervall $[0; h]$ rotieren lassen.

13 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ist ein Halbkreis mit dem Radius r (Fig. 3).

a) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit dem Radius $r = 3\,\text{cm}$ mit der Formel auf dem Rand und mit einem Integral.

b) Leiten Sie die Formel für das Kugelvolumen mithilfe eines Integrals her.

Räumliche Geometrie



Volumen V eines Zylinders

$V = \pi r^2 \cdot h$

Volumen V eines Kegels

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

Volumen V einer Kugel

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

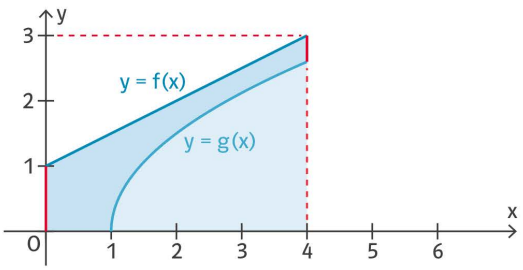
Test 2

→ **Lösungen**, Seite 442

14 Durch Rotation der Graphen von f mit $f(x) = 0{,}5x + 1$ und g mit $g(x) = 1{,}5\sqrt{x - 1}$ im Intervall $[0; 4]$ bzw. $[1; 4]$ um die x-Achse entsteht der Glaskörper einer kleinen Schale (1 LE ≙ 1 cm).

a) Berechnen Sie, wie viel Wasser in die Schale passt.

b) Berechnen Sie das Volumen des für die Herstellung benötigten Glases.



15 Eine Fläche A wird von den Funktionsgraphen der Funktionen f und g eingeschlossen. Rotiert die Fläche um die x-Achse, berechnet man das entstehende Volumen V mit

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx - \pi \int_a^b (g(x))^2\,dx = \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) dx.$$

Begründen Sie, warum man in der Regel nicht die Formel $\pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2\,dx$ benutzen kann.

16 Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[a; b]$ rotiert um die x-Achse. Untersuchen Sie, wie sich das Volumen des entstehenden Rotationskörpers verändert, wenn f durch $2 \cdot f$ bzw. durch $0{,}5 \cdot f$ ersetzt wird.

Grundwissen Test — Exponentielles Wachstum berechnen

→ **Grundwissen**, Seite 413
Lösungen, Seite 442

G **17** Ordnen Sie die Wachstumsvorgänge nach der Stärke der Zunahme. Begründen Sie.

(1) Die monatliche Zunahme beträgt 2 %.

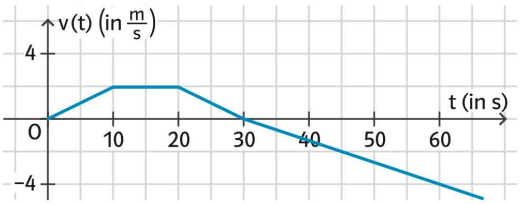
(2) Die jährliche Zunahme beträgt 25 %.

(3) Die tägliche Zunahme beträgt 0,2 %.

Lösungen, Seite 443

Rekonstruktion einer Größe

1 Der abgebildete Graph modelliert die Vertikalgeschwindigkeit v eines Flugzeugs. Zu Beginn der Messung ist das Flugzeug auf einer Höhe von 400 m. Steigt das Flugzeug, so ist $v(t) > 0$.



a) Bestimmen Sie die Höhe, auf der sich das Flugzeug nach 20 s und nach 45 s befindet.

b) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem sich das Flugzeug auf maximaler Höhe befindet.

c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Flugzeug auf einer Höhe von 380 m fliegt.

2 Geben Sie zwei verschiedene Intervalle so an, dass der orientierte Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse über jedem dieser Intervalle 8 FE beträgt.

a) $f(x) = 2$ **b)** $f(x) = x$ **c)** $f(x) = -x$ **d)** $f(x) = x - 2$

Das Integral

3 Die Funktion v mit $v(t) = \frac{1}{2}t$ soll für $0 \le t \le 10$ verwendet werden, um die Vertikalgeschwindigkeit eines Lastenaufzugs modellhaft zu beschreiben (t in Sekunden, $v(t)$ in $\frac{m}{s}$).

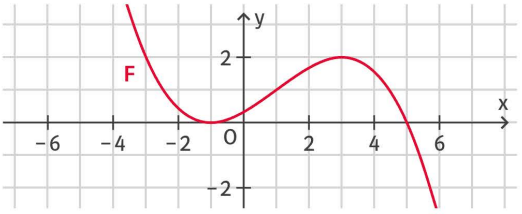
a) Skizzieren Sie den Graphen von v im Intervall $[0; 10]$. Berechnen Sie mithilfe des Graphen $\int_0^1 v(t)\,dt$, $\int_0^5 v(t)\,dt$ und $\int_0^{10} v(t)\,dt$ und erläutern Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

b) Der Aufzug befindet sich zu Beginn einen Meter über der Erdoberfläche. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion h, die die Höhe des Aufzugs (in m) zum Zeitpunkt t beschreibt.

4 Die Wachstumsgeschwindigkeit v einer Birke soll in einem Zeitraum von 50 Jahren näherungsweise durch $v(t) = 0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}25t + 9}$ (t in Jahren, $v(t)$ in Metern pro Jahr) beschrieben werden. Die Birke ist anfangs 2 m hoch. Drücken Sie die Höhe der Birke nach 50 Jahren mithilfe eines Integrals aus und geben Sie diese Höhe an.

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

5 Gegeben ist der Graph einer Stammfunktion F von f.



a) Erläutern Sie, in welchen Intervallen $f(x) > 0$ gilt.

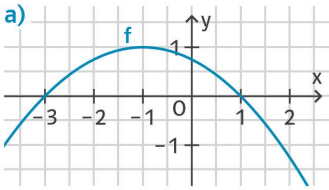
b) Untersuchen Sie, ob $F(-1) = f(-1)$ gilt.

c) Bestimmen Sie $\int_1^3 f(x)\,dx$.

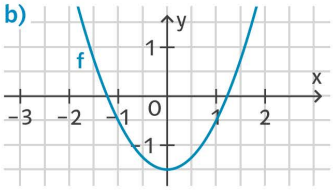
d) Bestimmen Sie näherungsweise $f(1)$. Erläutern Sie ihr Vorgehen.

6 Gegeben ist der Graph der Funktion f. Skizzieren Sie den Graphen einer Stammfunktion F von f. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen anhand charakteristischer Punkte.

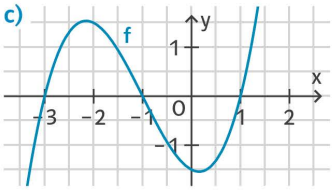
a)



b)



c)



d) Jana behauptet: „Die Lösungen zu den Teilaufgaben a) – c) sind zwar nicht eindeutig, ich kann aber schnell erkennen, ob eine weitere Lösung stimmt, wenn ich eine richtige Lösung kenne." Erläutern Sie, wie Jana vorgehen kann, um eine weitere Lösung zu überprüfen.

D7 Check-out

Regeln zur Bestimmung von Stammfunktionen

→ Lösungen, Seite 444

7 Geben Sie zwei verschiedene Stammfunktionen F der Funktion f an.

a) $f(x) = 3x^2 - 7x$ b) $f(x) = 5x^3 - 3x^2$ c) $f(x) = 10x^4 + 0{,}3x$ d) $f(x) = 4x^3 - x^2 + \sqrt{2}$

8 Bestimmen Sie das Integral.

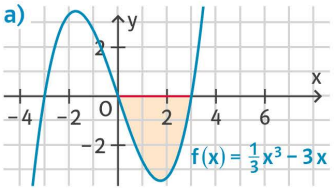
a) $\int_{-2}^{-1} (x^3 - 4x)\,dx$ b) $\int_{-1}^{1} (x^4 + 3x^3 + 2x)\,dx$ c) $\int_{1}^{2} 6(x^3 + x)\,dx$ d) $\int_{1}^{2} (x + 2)^2\,dx$

9 Eine Forschungsrakete wird innerhalb von 20 s von ca. 130 $\frac{km}{h}$ auf ca. 22 $\frac{km}{h}$ abgebremst. Nach einer Modellrechnung gilt dabei für ihre Geschwindigkeit $v(t) = \frac{3}{40}t^2 - 3t + 36$ $(0 \leq t \leq 20;\ t \text{ in s}, v \text{ in } \frac{m}{s})$. Bestimmen Sie die Länge der Strecke, die die Rakete während der Bremsphase zurücklegt.

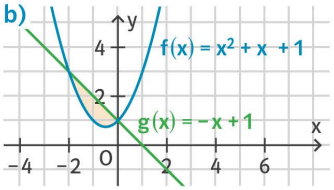
Integral und Flächeninhalt

10 Bestimmen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche.

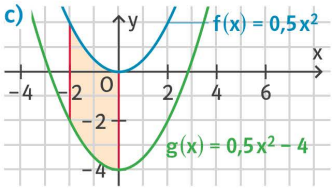
a)



b)



c)

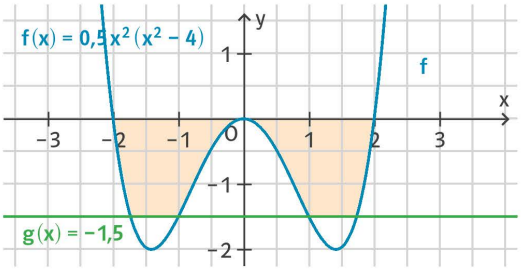


11 Gegeben sind die Funktionen f und g.

a) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit dem Graphen von h mit $h(x) = -2$ einschließt.

c) Ermitteln Sie den Inhalt der farbig markierten Fläche.



Unbegrenzte Flächen – uneigentliche Integrale

■ **12** Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x$. Untersuchen Sie, ob die Graphen von f und g im Intervall $]a; 1]$ $(a > 0)$ für $a \to 0$ bzw. im Intervall $[1; b[$ für $b \to +\infty$ eine endliche Fläche einschließen.

■ **13** Der Graph der Funktion f_t mit $f_t(x) = \frac{t}{x^2}$ $(t \neq 0)$ schließt mit der x-Achse im Intervall $[1; a[$ für $a \to +\infty$ eine Fläche A_t ein. Ermitteln Sie a so, dass $A_t = 5\,\text{FE}$ gilt.

Volumen von Rotationskörpern

■ **14** Beschreiben Sie einen Körper, dessen Volumen man wie folgt berechnen kann.

a) $V = \pi\int_0^5 2^2\,dx - \pi\int_0^5 1{,}5^2\,dx$ b) $V = \pi\int_0^2 x^2\,dx$ c) $V = \pi\int_0^4 (0{,}25x^2 - x)^2\,dx$.

■ **15** Durch Rotation der Graphen von f_a mit $f_a(x) = a\sqrt[3]{x}$ $(a > 0$ und $x \geq 0)$ um die x-Achse entstehen Hohlkörper liegender Gefäße. Diese können aufgestellt und gefüllt werden.

a) Untersuchen Sie für $a = 1$, wie hoch eine Flüssigkeit in dem Gefäß steht, wenn die Füllmenge 30 Volumeneinheiten beträgt.

b) In einem Hohlkörper steht die Flüssigkeit 10 Längeneinheiten hoch. Es befinden sich 30 Volumeneinheiten Flüssigkeit in dem Gefäß. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert für a.

Weiterführende Aufgaben

Lösungen, Seite 445

16 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. F ist eine Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$.

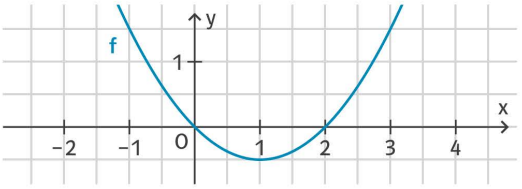
a) Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

(1) F ist im Intervall $[-1; 0]$ streng monoton steigend.

(2) F hat bei $x = 2$ eine Nullstelle.

(3) F hat zwei Extremstellen.

(4) F hat bei $x = 1$ eine Wendestelle.

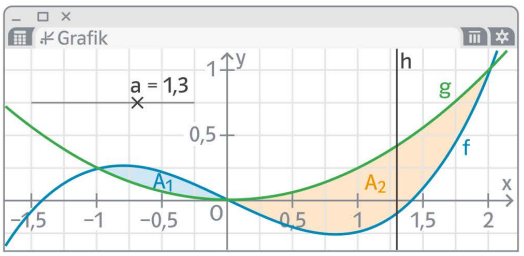


b) (1) Bestimmen Sie anhand der Zeichnung eine Funktionsgleichung von f.

(2) Geben Sie eine Stammfunktion von f an und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

(3) Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion, mit der man den Inhalt der Fläche berechnen kann, die der Graph von f und die x-Achse im Intervall $[2; x]$ einschließen.

17 Gegeben sind die Graphen von f und g mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x$ und $g(x) = \frac{1}{4}x^2$.



I4 **interaktive Anwendung** Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen halbieren

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Graphen von f und g sich in den Punkten $A\left(-1 \middle| \frac{1}{4}\right)$, $B(0|0)$ und $C(2|1)$ schneiden.

b) Ermitteln Sie den Inhalt der beiden Flächen A_1 und A_2, die die Graphen von f und g einschließen.

c) Für $0 < a < 2$ teilt die Gerade h mit $x = a$ die Fläche A_2 in zwei Teile. Untersuchen Sie, für welchen Wert von a diese Teile gleich groß sind.

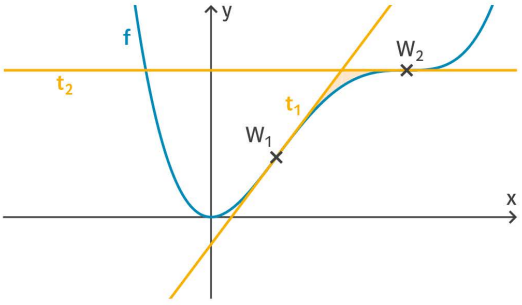
18 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$.

a) (1) Weisen Sie mithilfe der Ableitungen rechnerisch nach, dass der Graph von f einen Tiefpunkt und zwei Wendepunkte hat und bestimmen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

(2) Zeigen Sie, dass einer der Wendepunkte des Graphen von f ein Sattelpunkt ist.

b) (1) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 an den Graphen von f in den Punkten $W_1\left(1 \middle| \frac{11}{12}\right)$ und $W_2\left(3 \middle| \frac{9}{4}\right)$.

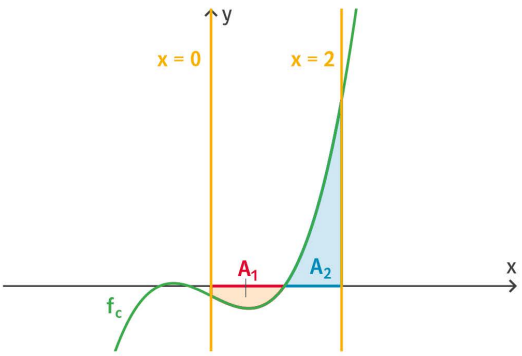
(2) Die Tangenten t_1 und t_2 schließen mit dem Graphen von f die farbig markierte Fläche ein. Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.



19 Gegeben ist die Funktionsschar f_c mit $f_c(x) = x^3 - x + c$ $(c \in \mathbb{R})$.

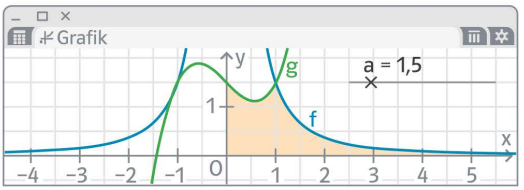
a) Untersuchen Sie, für welche Werte von c der Graph von f_c einen Tiefpunkt hat, der unterhalb der x-Achse liegt.

b) Bei geeigneter Wahl von c begrenzen der Graph von f_c, die x-Achse und die Geraden $x = 0$ sowie $x = 2$ eine Fläche, die aus zwei Teilen besteht. Untersuchen Sie für welchen Wert von c die beiden Teilflächen denselben Flächeninhalt haben.



Lösungen, Seite 446

20 Gegeben sind die Funktionsscharen f_a und g_a mit $f_a(x) = \frac{a}{x^2}$ und $g_a(x) = x^3 - x + a$ $(a > 0)$.



a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Graphen von f_a und g_a sich für alle $a > 0$ im Punkt $P(1|a)$ schneiden.

b) Der Graph von f_a schließt mit der x-Achse im Intervall $[1; b[$ für $b \to +\infty$ eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein. Zeigen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche für alle $a > 0$ endlich ist.

c) (1) Die Graphen von f_a und g_a schließen mit der x-Achse im Intervall $[0; b[$ für $b \to +\infty$ eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein. Bestimmen Sie einen Term $A(a)$, mit dem man den Inhalt dieser Fläche berechnen kann.

(2) Ermitteln Sie a so, dass $A(a) = 10$ ist.

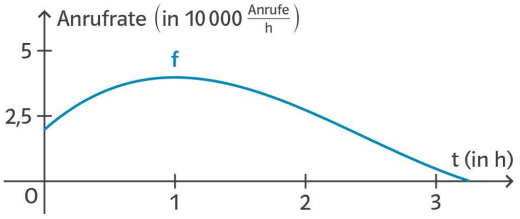
21 Anlässlich eines im Fernsehen übertragenen Benefizkonzerts können Zuschauer ab 20 Uhr einen Spendenanruf tätigen. Es soll angenommen werden, dass die momentane Anrufrate bis ca. 23:15 Uhr durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{3}{8}t^3 - \frac{11}{4}t^2 + \frac{35}{8}t + 2$ modelliert werden kann (t in Stunden nach 20 Uhr, $f(t)$ in 10 000 Anrufen pro Stunde).

a) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die Anrufrate am höchsten ist.

b) Ermitteln Sie die Zeitpunkte, an denen die Anrufrate im betrachteten Zeitraum am meisten zu- bzw. abnimmt.

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Anrufe für den Zeitraum von 20 Uhr bis 23:15 Uhr.

d) Untersuchen Sie, ab wann die Anzahl der Anrufe größer als 50 000 ist.



22 Ein Fahrzeug wird beschleunigt und wieder abgebremst. Seine Geschwindigkeit soll durch die Funktion v mit $v(t) = -0{,}5t^2 + 6t$ (t in Sekunden, $v(t)$ in $\frac{m}{s}$) modelliert werden.

a) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die Geschwindigkeit des Fahrzeugs maximal ist.

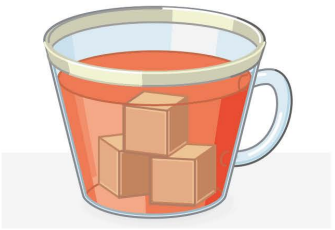
b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem das Fahrzeug zum Stillstand kommt, und berechnen Sie die Länge des Weges, den das Fahrzeug bis dahin zurückgelegt hat.

c) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs in den ersten zehn Sekunden.

d) Ermitteln Sie einen integralfreien Term, mit dem der zurückgelegte Weg des Fahrzeugs zum Zeitpunkt t berechnet werden kann.

e) Zwei Sekunden nach Erreichen der Maximalgeschwindigkeit wird die Geschwindigkeit des Fahrzeugs durch die Tangente an den Graphen der Funktion v beschrieben. Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem das Fahrzeug nun zum Stillstand kommt, und bestimmen Sie die Länge des Weges, den es bis dahin zurückgelegt hat.

23 Die Innenwand eines Teeglases wird beschrieben durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$, der im Intervall $[0; 8]$ um die x-Achse rotiert (alle Angaben in cm).
Dabei befindet sich der Boden des Teeglases an der Stelle, die im Koordinatensystem durch $x = 0$ gegeben ist.



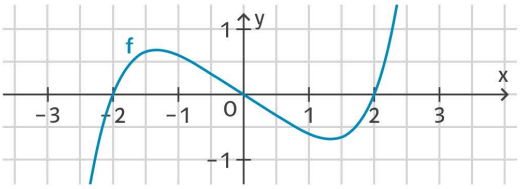
a) Bestimmen Sie die Füllmenge, wenn das Teeglas bis 2 cm unter dem Rand gefüllt wird.

b) In dem Teeglas befindet sich Eistee. Um diesen kühl zu halten, werden drei würfelförmige Kühlsteine mit der Kantenlänge 2,5 cm in das Glas gegeben. Sie versinken vollständig im Tee. Begründen Sie, dass das Teeglas dadurch nicht zum Überlaufen gebracht wird.

c) Geben Sie eine integralfreie Gleichung an, deren Lösung angibt, wie hoch der Tee im Glas steht, nachdem die drei Kühlsteine hinzugefügt wurden.

Lösungen, Seite 447

24 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}04x^5 - 0{,}64x$.



a) Bestimmen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

b) Zeigen Sie mithilfe der Ableitungen von f, dass der Graph von f genau einen Hoch-, einen Tief- und einen Wendepunkt besitzt. Geben Sie die Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunkts an.

c) (1) Berechnen Sie eine Gleichung der Tangente t_w an den Graphen von f im Wendepunkt des Graphen. Zeigen Sie, dass der Punkt $P(-1\,|\,0{,}64)$ auf der Wendetangente t_w liegt.

(2) Begründen Sie mithilfe einer Skizze und geometrischen Überlegungen, dass $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}64 \approx \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ ist.

(3) Untersuchen Sie, um wie viel Prozent A vom exakten Wert des Integrals $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ abweicht. Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle.

d) Der Graph der Funktion g mit $g(x) = 0{,}04x^5$ schließt im Intervall $[0; b]$ für $b > 0$ mit dem Graphen von f eine Fläche ein. Untersuchen Sie, ab welchem Wert für b diese Fläche größer als 250 Flächeneinheiten ist.

e) Es soll nun die Funktion g_a mit $g_a(x) = a \cdot x^5 - 16ax$ $(a > 0)$ untersucht werden.

(1) Zeigen Sie, dass alle Graphen von g_a die x-Achse in den Punkten $N_1(-2\,|\,0)$, $N_2(0\,|\,0)$ und $N_3(2\,|\,0)$ schneiden.

(2) Begründen Sie, dass der folgende Zusammenhang gilt: $25a \cdot \int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} g_a(x)\,dx$

(3) Bestimmen Sie den Wert für a, für den der Inhalt der Fläche, die der Graph von g_a mit der x-Achse im Intervall $[0; 2]$ einschließt, genau 10 Flächeneinheiten beträgt.

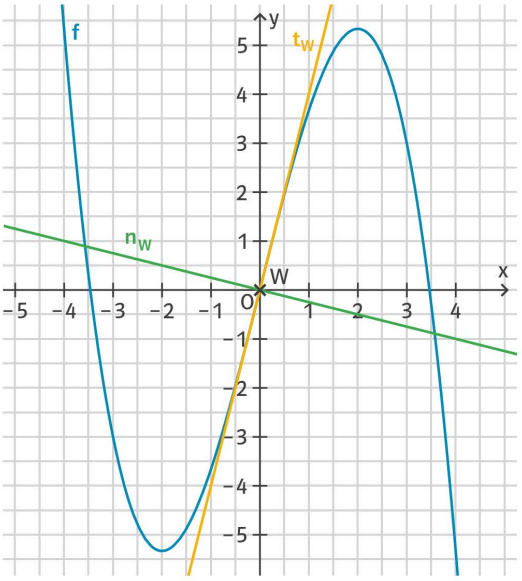
25 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$. Der Graph sowie die Tangente und die Normale im Wendepunkt sind in der Figur dargestellt.

a) Begründen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

b) Zeigen Sie mithilfe der ersten und der zweiten Ableitung von f, dass der Graph von f einen Tief- und einen Hochpunkt hat, und geben Sie die Koordinaten an.

c) (1) Weisen Sie nach, dass die Tangente t_H im Hochpunkt des Graphen und der Graph von f einen weiteren gemeinsamen Punkt $P(-4\,|\,f(-4))$ haben.

(2) Die Tangente t_H schließt mit dem Graphen von f eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass diese Fläche einen Inhalt von 36 FE hat.



d) (1) Der Punkt $W(0\,|\,0)$ ist ein Wendepunkt des Graphen von f. Begründen Sie, warum es keine weiteren Wendepunkte gibt.

(2) Berechnen Sie mithilfe der Ableitung von f eine Gleichung der Tangente t_W und der Normale n_W an den Graphen von f im Wendepunkt $W(0\,|\,0)$.

(3) Die Normale n_W schließt mit dem Graphen von f zwei Flächen ein. Untersuchen Sie, ob die Summe der beiden Flächeninhalte größer als der in Teilaufgabe c) berechnete Flächeninhalt ist.

e) Der Graph von f wird in Richtung der y-Achse gestreckt. Untersuchen Sie, welche Auswirkungen das auf den Inhalt der Fläche zwischen der Tangente t_H und dem Graphen von f hat.

Rekonstruktion einer Größe

Ist der Graph einer momentanen Änderungsrate gegeben, lässt sich die **Gesamtänderung** rekonstruieren. Diese entspricht dem **orientierten Flächeninhalt** zwischen dem Graphen und der x-Achse.

Bestimmtes Integral

Eine Funktion heißt **integrierbar** im Intervall $[a; b]$, wenn die Annäherungen durch Rechtecksummen von unten und von oben denselben Grenzwert liefern. Diesen Grenzwert nennt man **bestimmtes Integral** von f im Intervall $[a; b]$ und schreibt hierfür $\int_a^b f(x)\,dx$.

Stammfunktionen

Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** von f, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt. Sind F und G zwei Stammfunktionen von f im Intervall I, so unterscheiden sich F(x) und G(x) nur durch eine Konstante c.

	Funktion	Stammfunktion
Summenregel	$f(x) = g(x) + h(x)$	$F(x) = G(x) + H(x)$
Faktorregel $(c \in \mathbb{R})$	$f(x) = c \cdot g(x)$	$F(x) = c \cdot G(x)$
Potenzregel $(r \neq -1)$	$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist f im Intervall $[a; b]$ integrierbar und ist F eine Stammfunktion von f im Intervall $[a; b]$, dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Integral und Flächeninhalt

Für Flächen oberhalb der x-Achse gilt: $A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$

Für Flächen unterhalb der x-Achse gilt: $A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx = \left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$

Für Flächen zwischen zwei Graphen gilt: $A_3 = \int_c^d (f(x) - g(x))\,dx$, falls $f(x) \geq g(x)$.

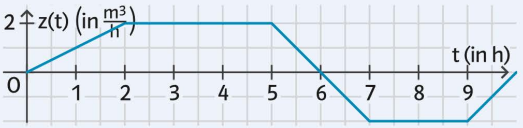
Unbegrenzte Flächen und uneigentliche Integrale

Man untersucht Integrale mit einer variablen Grenze und einer festen Grenze wie $\int_1^z f(x)\,dx$ oder wie $\int_z^3 f(x)\,dx$ auf einen Grenzwert für $z \to \pm\infty$ bzw. für $z \to c$ (c ist eine Konstante). Existiert ein Grenzwert, schreibt man $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ für $\lim\limits_{z \to +\infty} \int_1^z f(x)\,dx$ bzw. $\int_c^3 f(x)\,dx$ für $\lim\limits_{z \to c} \int_z^3 f(x)\,dx$ und nennt ihn **uneigentliches Integral**.

Rotationskörper

Betrachtet man den Körper, der entsteht, wenn die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse im Bereich $[a; b]$ um die x-Achse rotiert, so gilt für dessen Volumen $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$.

Graph einer Zuflussrate z in m^3 pro Stunde:



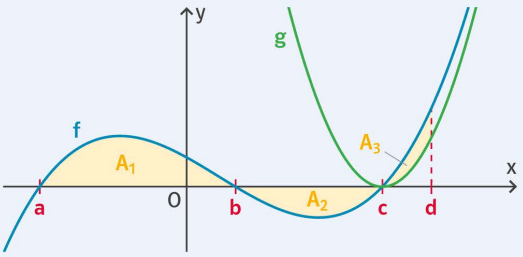
Gesamtänderung der Flüssigkeitsmenge in den ersten zehn Stunden in m^3:

$\int_0^{10} z(t)\,dt = 9 - 6 = 3$ *(orientierter Flächeninhalt)*

Von f mit $f(x) = 3x^2$ sind z.B. F mit $F(x) = x^3$ und $G(x) = x^3 + 7$ Stammfunktionen, denn $F'(x) = G'(x) = f(x)$

$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$
$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$	$F(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$
$f(x) = 7x^3 + 2x$	$f(x) = \frac{7}{4}x^4 + x^2$

Es ist $\int_1^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_1^3 = \left(\frac{3^3}{6} - 3\right) - \left(\frac{1}{6} - 1\right) = \frac{7}{3}$.



$\int_1^z \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^z = -\frac{1}{z} + 1$

$\lim\limits_{z \to +\infty} \left(-\frac{1}{z} + 1\right) = 0 + 1 = 1.$

Also existiert das Integral, es ist $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$

$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_a^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_a^1 = \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$

Für $a > 0$ gilt $\lim\limits_{a \to 0} (2 - 2\sqrt{a}) = 2.$

Also existiert das Integral, es ist $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$

Der Graph von f mit $f(x) = \sqrt{x+1}$ rotiert im Intervall $[-1; 4]$ um die x-Achse.

$V = \pi \int_{-1}^4 (\sqrt{x+1})^2\,dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^4 = \frac{25}{2}\pi$

D8 Lösungen
Probeklausur
Kapitel II

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 1

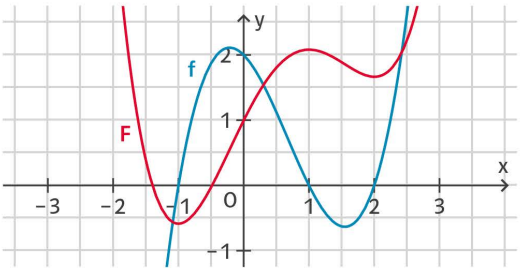
GK 20 min / LK 35 min

1 Die Graphen der Funktion f und der Funktion F sind gegeben.

a) Erläutern Sie, woran man erkennen kann, dass F eine Stammfunktion von f ist.

b) Berechnen Sie mithilfe des Graphen von F näherungsweise das Integral $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

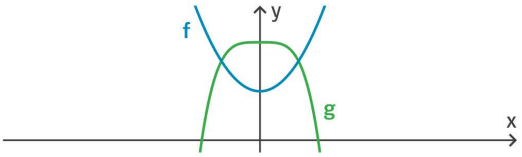
c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion G, die jedem x-Wert den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0; x]$ zuordnet.



2 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = -x^4 + 3$.

a) Zeigen Sie, dass $f(-1) = g(-1)$ und $f(1) = g(1)$ ist.

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g im Intervall $[-1; 1]$ eingeschlossen wird.



3 Gegeben ist die Funktion f mit $f_a(x) = \frac{1}{ax^2}$ $(a > 0)$.

a) Der Graph von f_a schließt im Intervall $[1; b[$ für $b \to +\infty$ mit der x-Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche A ein. Ermitteln Sie a so, dass $A = 4\,\text{FE}$ gilt.

b) (1) Bestimmen Sie für $a = 1$ die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(1|1)$.
(2) Der Graph von f_1 schließt mit der x-Achse im Intervall $[1; b[$ für $b \to +\infty$ eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein. Untersuchen Sie, in welchem Verhältnis die Tangente t diese Fläche teilt.

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 2

GK 30 min / LK 35 min

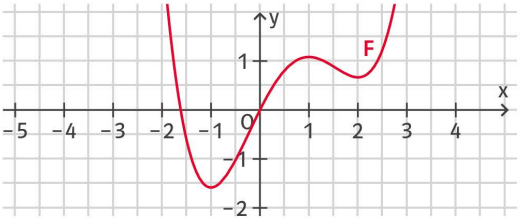
1 Gegeben ist der Graph der Funktion F, die eine Stammfunktion von f ist.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f im abgebildeten Bereich.

b) Bestimmen Sie anhand der Zeichnung näherungsweise $f(0)$.

c) Begründen Sie, dass f für $-2 \le x \le -0{,}5$ streng monoton steigend ist.

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im Intervall $[-1; 1]$ einschließt.



2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4$.

a) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.

b) (1) Skizzieren Sie den Graphen von f sowie die Tangente t an f im Punkt $P(4|0)$.
(2) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Tangente t, dem Graphen von f und der y-Achse eingeschlossen wird.

3 Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = a\sqrt{x}$ $(a > 0)$.

a) Untersuchen Sie, für welchen Wert von a der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0; 9]$ genau 18 Flächeneinheiten beträgt.

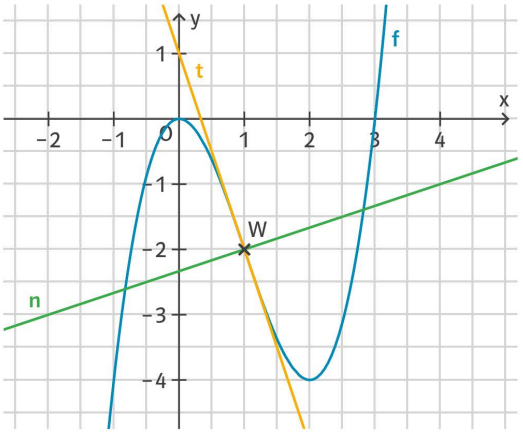
b) Der Graph von f_a rotiert um die x-Achse. Untersuchen Sie, für welchen Wert von a das Volumen des Rotationskörpers über dem Intervall $[0; 10]$ genau $100\,\pi$ Volumeneinheiten beträgt.

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 1

GK 45 min / LK 80 min

D8 Lösungen
Probeklausur
Kapitel II

1 Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 3x^2$.



a) Weisen Sie rechnerisch mithilfe der Ableitungsfunktionen von f nach, dass der Graph von f den Hochpunkt $H(0|0)$, den Tiefpunkt $T(2|-4)$ und den Wendepunkt $W(1|-2)$ hat.

b) (1) Geben Sie die Nullstellen von f an.
(2) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A_1, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

c) (1) Geben Sie die Gleichung einer Funktion g an, die durch eine Verschiebung des Graphen von f entsteht und bei der der Wendepunkt des Graphen auf der x-Achse liegt.
(2) 💻 Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche A_2, die der Graph von g im 4. Quadranten mit der x-Achse einschließt.

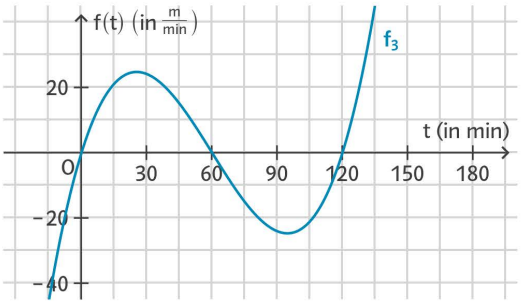
d) (1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gerade t mit $t(x) = -3x + 1$ die Wendetangente an den Graphen von f ist.
(2) Zeigen Sie, dass die Gerade n mit $n(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$ die Normale an den Graphen im Wendepunkt W ist.

e) (1) Die Tangente t schließt mit dem Graphen von f und der y-Achse eine Fläche A_3 ein. Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.
(2) Untersuchen Sie, wie viel Prozent des in (1) berechneten Flächeninhalts A_3 unterhalb der x-Achse liegt.

f) 💻 Die Normale n schließt mit dem Graphen von f im 4. Quadranten eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

g) Der Graph von f rotiert für $0 \le x \le 3$ um die x-Achse. Ermitteln Sie das Volumen des Rotationskörpers, der dadurch entsteht.

2 Die Funktionsschar f_k mit $f_k(t) = 0{,}0001\,k\,t^3 - 0{,}018\,k\,t^2 + 0{,}72\,k\,t$ soll für $0 \le t \le 120$ verwendet werden, um die Änderungsrate der Länge einer Warteschlange vor einem Museum zu modellieren (t in Minuten, f(t) in Meter pro Minute). Der Graph von f_3 ist abgebildet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ (10 Uhr) ist die Warteschlange 20 Meter lang.



a) (1) Beschreiben Sie anhand des Graphen von f_3, was man bei der Modellierung mit $k = 3$ für die Entwicklung der Warteschlange folgern kann.
(2) Bestimmen Sie, welche Länge der Warteschlange man um 10:30 Uhr erwartet, wenn man $k = 3$ wählt.

b) (1) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Extremstellen und die Nullstellen der Funktionsschar f_k nicht von k abhängen.
(2) Eine Erhöhung des Parameters k bewirkt eine Veränderung des Verlaufs des Graphen. Beschreiben Sie diese Veränderung.

c) (1) Berechnen Sie in Abhängigkeit von k, wie lang die längste zu erwartende Warteschlange ist.
(2) Man vermutet, dass die längste zu erwartende Warteschlange 100 Meter lang sein wird. Untersuchen Sie, für welchen Wert von k dies der Fall ist.

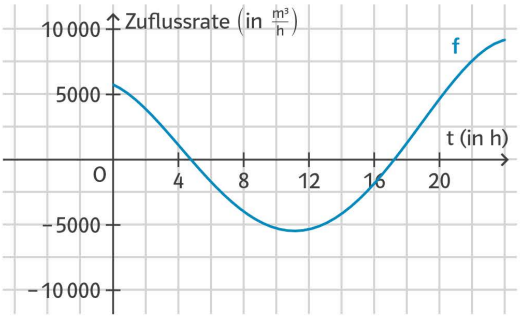
d) Untersuchen Sie, ob die um 12 Uhr erwartete Warteschlange wieder so lang ist wie um 10 Uhr.

D8 Lösungen
Probeklausur
Kapitel II

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 2

GK 40 min / LK 80 min

1 Bei einem Überschuss an elektrischer Energie wird Wasser in einen Speichersee hochgepumpt. Mit diesem Wasser kann man bei Bedarf wieder elektrische Energie erzeugen. Die Abbildung zeigt modellhaft die Zuflussrate eines Speichersees an einem Werktag zwischen 0 Uhr und 24 Uhr.



a) Bestimmen Sie näherungsweise die Zeitpunkte, an denen am meisten bzw. am wenigsten Wasser im Speicher ist.

Die Funktion f mit $f(t) = -\frac{1}{2}t^4 + 23t^3 - 234t^2 - 575t + 6000$ soll im Folgenden verwendet werden, um Berechnungen zu der in der Figur dargestellten Zuflussrate durchzuführen. Man geht davon aus, dass um 0 Uhr 80 000 m^3 Wasser in dem See sind.

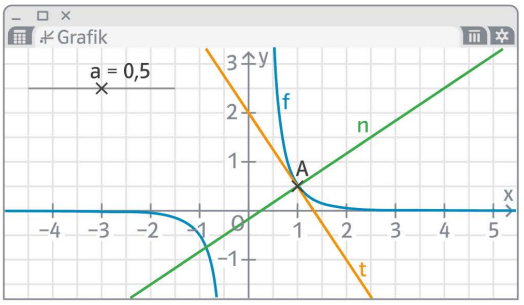
b) (1) Ermitteln Sie die Zeitpunkte, an denen die Wassermenge im See am schnellsten zu- bzw. abnimmt.

(2) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die Wassermenge im See am kleinsten ist, und bestimmen Sie diese.

c) (1) Berechnen Sie die Wassermenge im See um 24 Uhr.

(2) Untersuchen Sie, wann die Wassermenge im See an diesem Tag am größten ist, und geben Sie die maximale Wassermenge an.

2 Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = \frac{a}{x^3}$ $(a > 0)$.



a) (1) Der Graph von f_a schließt für $b > 1$ mit der x-Achse im Intervall $[1; b[$ eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche für $b \to +\infty$ endlich ist.

[Kontrollergebnis: $A(a) = \frac{a}{2}$]

(2) Die Koordinatenachsen, die Gerade g mit $x = 1$ und der Graph von f_a schließen eine nach oben unbegrenzte Fläche ein. Zeigen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche für keinen Wert von a endlich ist.

b) (1) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Gleichung der Tangente t_a an den Graphen von f_a im Punkt $P(1|f_a(1))$.

(2) Die Tangente t_a bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Ermitteln Sie, für welchen Wert von a der Flächeninhalt dieses Dreiecks genau 8 Flächeneinheiten beträgt.

(3) Zeigen Sie, dass die Fläche $A(a)$ aus Teilaufgabe a) für alle $a > 0$ durch die Tangente t_a im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird.

Es wird nun die Funktion f_1 mit $f_1(x) = \frac{1}{x^3}$ betrachtet.

c) (1) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden n_1, die senkrecht zur Tangente t_1 steht und durch den Punkt $P(1|f_1(1))$ verläuft.

(2) Die Gerade n_1 schließt mit dem Graphen von f_1 und der x-Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche mit endlichem Flächeninhalt ein. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

Der Graph von g entsteht durch eine Verschiebung des Graphen von f_1 um 0,5 Längeneinheiten nach links und um eine Längeneinheit nach unten.

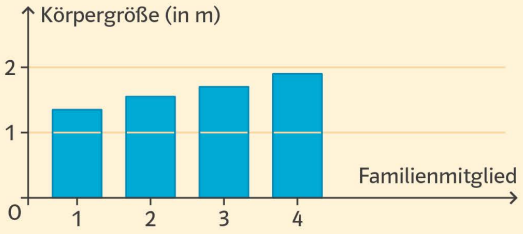
d) (1) Geben Sie eine Funktionsgleichung von g an.

(2) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von g mit den Koordinatenachsen einschließt.

Mittelwerte von Funktionen

Das arithmetische Mittel bezeichnet man oft als Durchschnitt. Dieser wird in der Statistik häufig berechnet. Wenn man z. B. die Körpergrößen von vier Familienmitgliedern kennt, kann man diese addieren und durch 4 teilen, um das arithmetische Mittel $\overline{m}$ zu ermitteln.

Aber wie kann man den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall berechnen, wenn der Graph zum Beispiel eine Parabel ist?



$$\overline{m} = \frac{1{,}35 + 1{,}55 + 1{,}7 + 1{,}9}{4} = 1{,}625$$

1 Durchschnittsgeschwindigkeiten ermitteln

Der Graph in Fig. 1 beschreibt modellhaft die Geschwindigkeit einer Radfahrerin auf einer Übungsstrecke in einem Zeitraum von zwei Stunden. Die zugehörige Modellfunktion wird mit f bezeichnet (t in h nach Beobachtungsbeginn, f(t) in $\frac{km}{h}$). Der Graph einer möglichen Stammfunktion von f ist in Fig. 2. abgebildet.

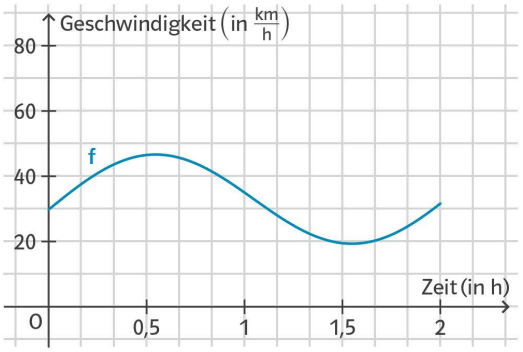


Fig. 1

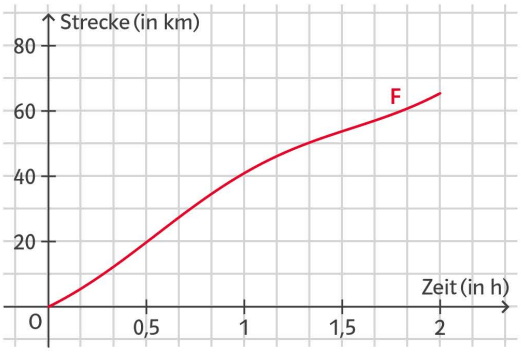


Fig. 2

a) Beantworten Sie die Fragen auf den Kärtchen jeweils mithilfe von Fig. 1 und Fig. 2 auf zwei verschiedene Weisen. Bestimmen Sie Näherungswerte für die Lösung und erläutern Sie Ihren Lösungsweg mithilfe mathematischer Ansätze.

Wann ist die Geschwindigkeit am niedrigsten?

Wie viele Kilometer fährt die Radfahrerin innerhalb von zwei Stunden?

Wann ist die Geschwindigkeit am höchsten?

Wie schnell muss ein Radfahrer fahren, der mit konstanter Geschwindigkeit innerhalb von zwei Stunden die gleiche Strecke fährt?

b) Den Mittelwert einer Funktion kann man mit der rechts abgebildeten Formel berechnen.
Begründen Sie die Gültigkeit dieser Formel anhand der Ergebnisse aus Teilaufgabe a).

Für den Mittelwert $\overline{m}$ einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ gilt:

$$\overline{m} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

2 In einem zylindrischen Regenmessgerät mit der Grundfläche $1\,m^2$ wird die Niederschlagsstärke durch den Anstieg der Wasserhöhe in Millimetern pro Stunde gemessen. Die Funktion f mit $f(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}01t^2 - 0{,}3t + 4$ gibt die Niederschlagsstärke für $t \in [0; 12]$ modellhaft an (t in Stunden, f(t) in Millimetern pro Stunde, vgl. Fig. 1).

a) Berechnen Sie, wie viel Niederschlag insgesamt innerhalb der 12 Stunden gefallen ist.

b) Berechnen Sie, wie viel Niederschlag durchschnittlich innerhalb der 12 Stunden gefallen ist.

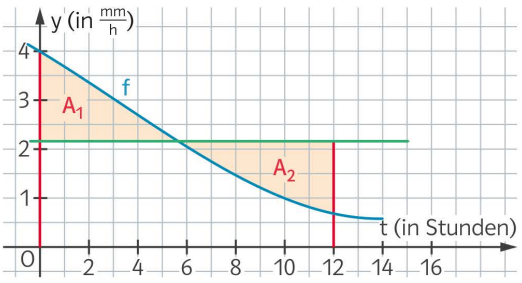


Fig. 1

1 Millimeter pro Quadratmeter bedeutet 1 Liter pro Quadratmeter.

Ein Niederschlagsmesser nach Hellmann wurde bereits um 1886 von dem preußischen Meteorologen Gustav Hellmann entwickelt.
Er hat eine Auffangfläche von $200\,cm^2$.

3 Eine Tierpopulation verändert sich in einem Rhythmus von vier Jahren, modellhaft beschrieben durch $P(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}3x^2 + 2x + 1$ (x in Jahren, P(x) in Tausend Tieren).
Bestimmen Sie, aus wie vielen Tieren die Population durchschnittlich in den vier Jahren bestand.

4 Die Geschwindigkeit eines Autos lässt sich für $0 \le t \le 10$ näherungsweise durch die Modellfunktion v mit $v(t) = \frac{10}{36}t \cdot (20 - t)$ (t in s, v(t) in $\frac{m}{s}$) beschreiben.

a) Zeichnen Sie den Graphen von v und bestimmen Sie ohne Rechnung näherungsweise die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$.

b) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ rechnerisch.

c) Berechnen Sie, wie weit das Auto in dem betrachteten Zeitraum von zehn Sekunden gefahren ist.

5 Die Produktionskosten eines Werkstücks verkleinern sich mit fortdauernder Produktion.
Für $0 \le x \le 600$ soll die Funktion K mit $K(x) = \frac{1}{15\,000}(x - 600)^2 + 21$ verwendet werden, um die Kosten für das x-te Werkstück zu modellieren (K(x) in Euro).

a) Berechnen Sie, wie hoch die Produktionskosten bei einer Produktion von 400 Stück sind.

b) Berechnen Sie die durchschnittlichen Kosten pro Stück bei einer Produktion von 400 Stück.

c) Ermitteln Sie, bei welcher Stückzahl die durchschnittlichen Produktionskosten zum ersten Mal unter 37 € liegen.

Da x hier nur ganzzahlige Werte annimmt, liefert die Formel aus dem Merkkasten nur Näherungswerte.

6 **Mittelwerte grafisch bestimmen**

a) Jule meint, dass man den Mittelwert einer Funktion auch grafisch bestimmen kann. Sie fertigt hierzu eine Skizze an (siehe Fig. 2). Erläutern Sie mithilfe der Skizze, wie man beim grafischen Bestimmen des Mittelwerts einer Funktion vorgehen kann.

b) Bestimmen Sie zu den Graphen in Fig. 3 und Fig. 4 jeweils grafisch einen Näherungswert für den Mittelwert der Funktion im Intervall $[0; 4]$.

c) Skizzieren Sie jeweils einen Graphen einer Funktion, die im Intervall $[0; 4]$ denselben Mittelwert hat wie die Funktionen, deren Graphen in Fig. 3 und Fig. 4 dargestellt sind.

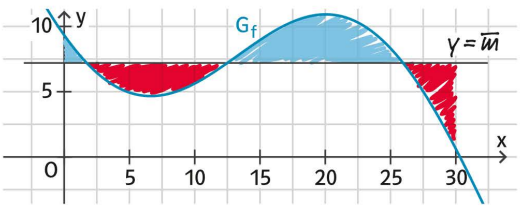


Fig. 2

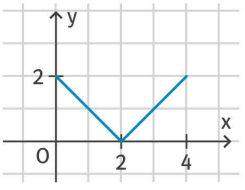


Fig. 3

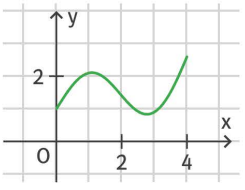
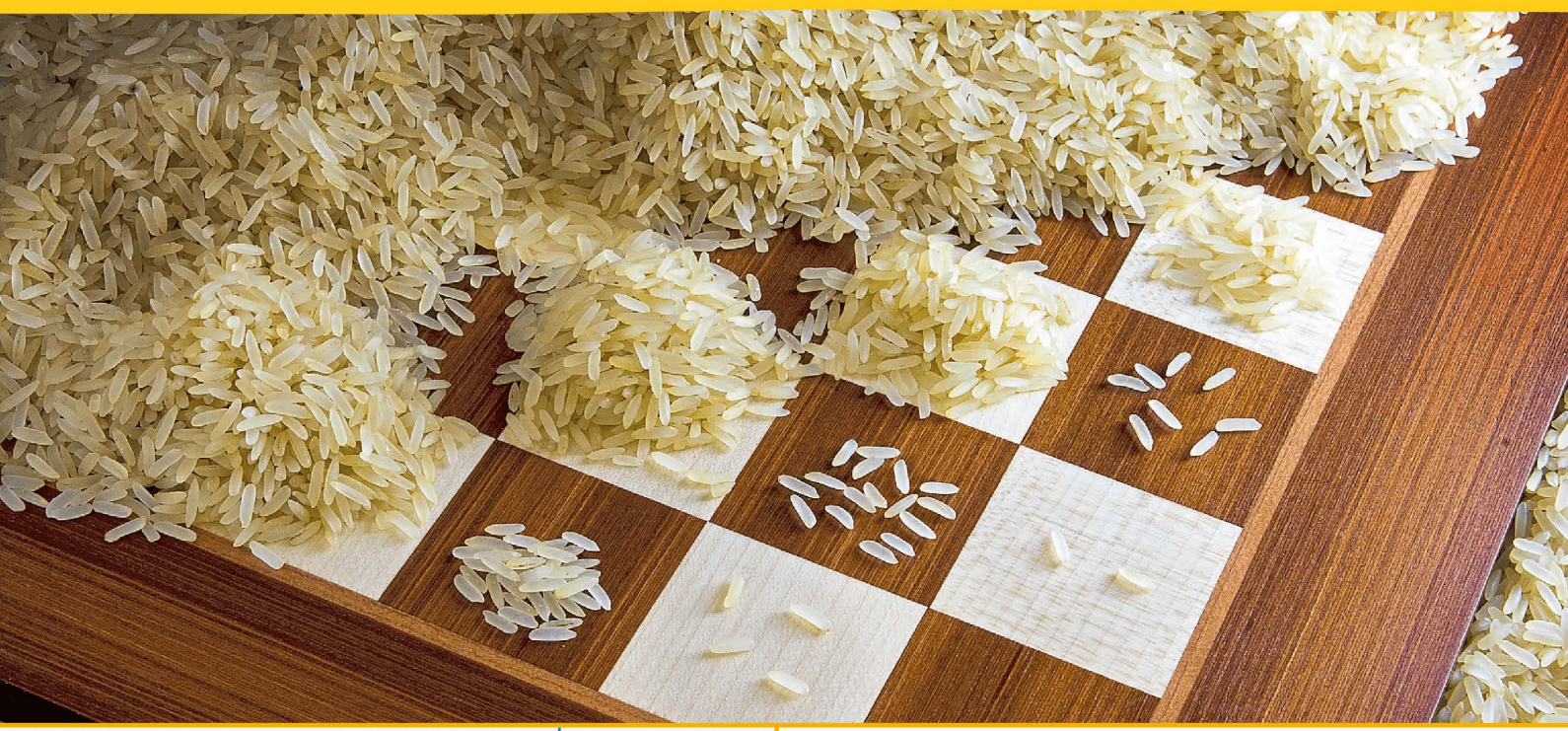
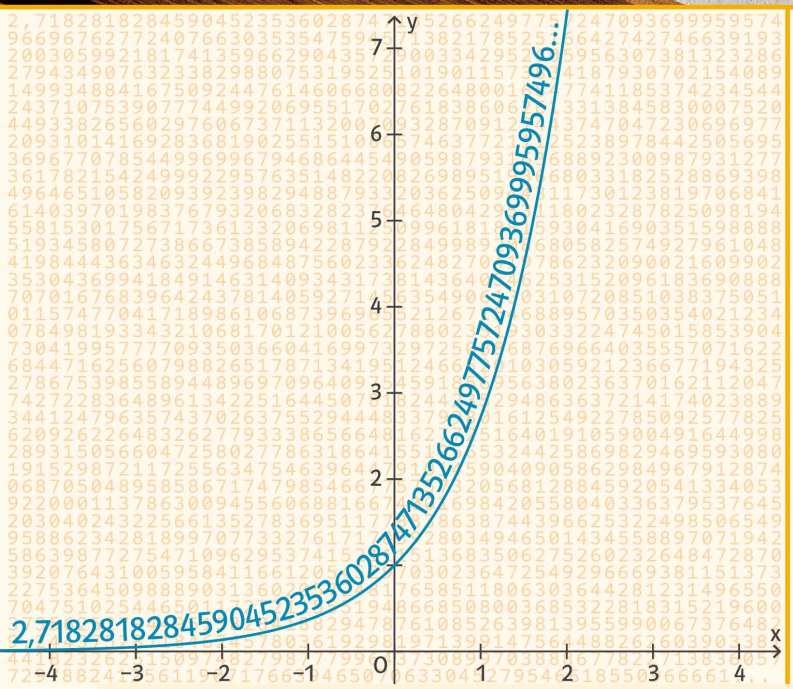


Fig. 4

III Exponentialfunktionen





Anyone who believes that exponential growth can go on forever in a finite world is either a madman or an economist.

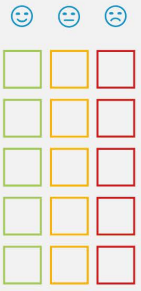
Kenneth Ewart Boulding (1910–1993)

Das können Sie bald

- Exponentialfunktionen ableiten
- Exponentialgleichungen mit dem natürlichen Logarithmus lösen
- exponentielles Wachstum und begrenztes Wachstum untersuchen
- die Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion und ihrer Ableitungsfunktion beschreiben
- Funktionsgleichungen von Umkehrfunktionen bestimmen

Check-in

Schätzen Sie sich ein:



1. Ich kann die Potenzgesetze anwenden.
2. Ich kann mittlere Änderungsraten bestimmen.
3. Ich kann Änderungsraten grafisch bestimmen.
4. Ich kann Tangentengleichungen bestimmen.
5. Ich kann Flächeninhalte mithilfe von Integralen berechnen.

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen**, Seite 413
zu 2. **Grundwissen**, Seite 414
zu 3. **Grundwissen**, Seite 414
zu 4. **Grundwissen**, Seite 415
zu 5. **Lehrtext**, Seite 73

Test → **Lösungen**, Seite 448

1 **Potenzgesetze anwenden**

Vereinfachen Sie mithilfe der Potenzgesetze $(x \neq 0)$.

a) $x^5 \cdot x^3$ b) $x^4 \cdot x^{-6}$ c) $\frac{x^{-2}}{x^{-3}}$

d) $(x^2)^3 \cdot x^{-2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3$ e) $x^5 \cdot (x^{-7})^2 \cdot x$ f) $x^n \cdot x^{-3n}$

2 **Mittlere Änderungsraten bestimmen**

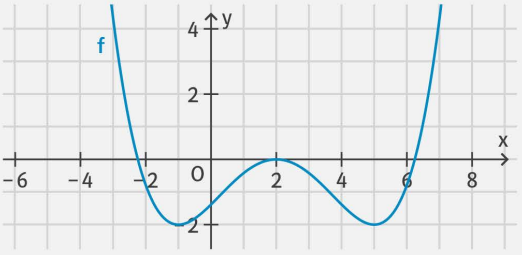
Berechnen Sie den Differenzenquotienten der Funktion f im Intervall $I = [-1; 3]$.

a) $f(x) = x^3 - x + 2$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 2x$ c) $f(x) = 2x^2(x + 2)$

3 **Änderungsraten grafisch bestimmen**

Gegeben ist der Graph der Funktion f.

a) Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $I = [-1; 2]$.
b) Ermitteln Sie näherungsweise die momentane Änderungsrate von f an den Stellen $x = 1$ und $x = 3$.
c) Geben Sie die Stellen x an, für die $f'(x) = 0$ gilt.



4 **Tangentengleichungen bestimmen**

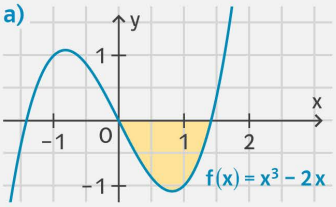
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = x^2 - 2x;\ x_0 = 1$ b) $f(x) = 4x^3 + 2;\ x_0 = 0{,}5$ c) $f(x) = -x^3 + x^2;\ x_0 = -1$

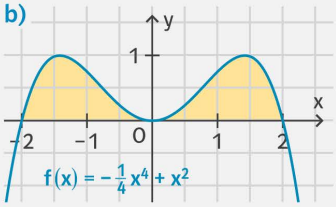
5 **Flächeninhalte mithilfe von Integralen berechnen**

Berechnen Sie den Inhalt der markierten Flächen mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung.

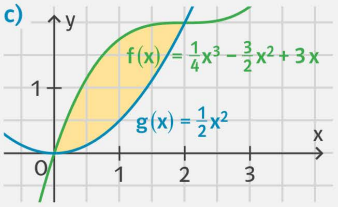
a)



b)



c)



D9 Check-in

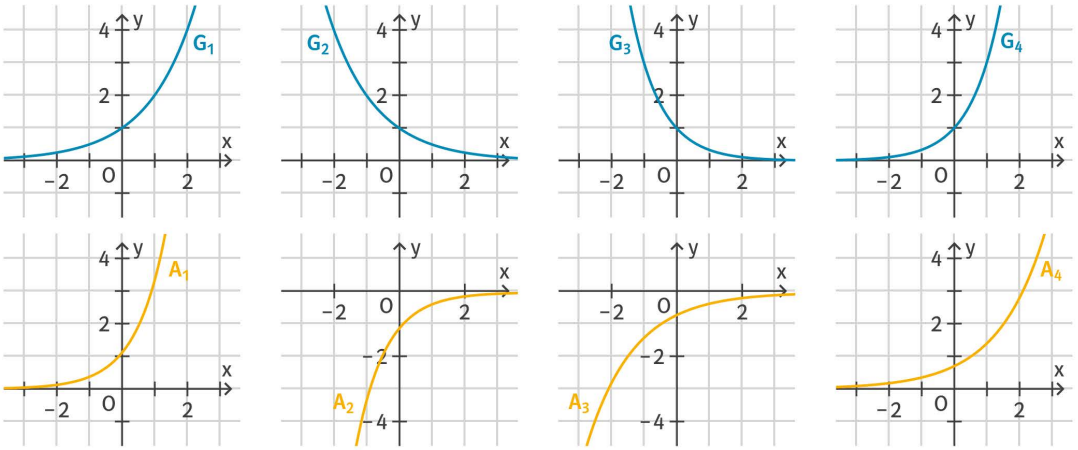
Ableitung von Exponentialfunktionen

Lerneinheit 2
Seite 104

1. Exponentialfunktionen ihre Ableitungsgraphen zuordnen

Was gehört wozu? Ordnen Sie jeder Funktion f_1, f_2, f_3 und f_4 den passenden Graphen G_1, G_2, G_3 bzw. G_4 sowie den Graphen der Ableitungsfunktion A_1, A_2, A_3 bzw. A_4 zu.
Begründen Sie Ihre Zuordnung.

$f_1(x) = 2^x$ $\quad f_2(x) = 3^x$ $\quad f_3(x) = 0{,}5^x$ $\quad f_4(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



2. Graphen von Exponentialfunktionen und ihren Ableitungsfunktionen untersuchen

a) Zeichnen Sie zur Funktion f mit $f(x) = a^x$ die Graphen von f, f' und $\frac{f'}{f}$ mit einem MMS in ein gemeinsames Koordinatensystem. Variieren Sie die Basis a und beschreiben Sie, was Ihnen auffällt. Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnisse. Die Kärtchen auf dem Rand können helfen.

b) Es gibt eine Zahl e, für die der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^x$ exakt mit dem Graphen seiner Ableitungsfunktion übereinstimmt. Diese Zahl heißt Euler'sche Zahl. Bestimmen Sie mit einem MMS einen Näherungswert für die Zahl e durch Variation der Werte in Teilaufgabe a).

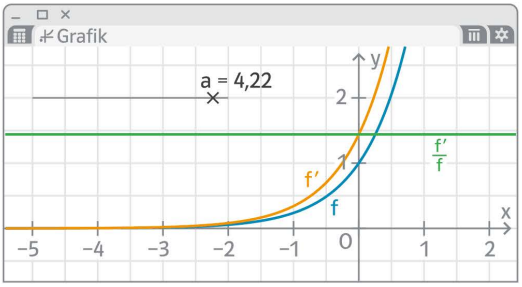


Fig. 1

Wenn $a > \ldots$,

Wenn $a < \ldots$,

dann verläuft der Graph von …

3. Zusammenhänge erläutern

a) Bringen Sie die Kärtchen mit den folgenden Rechenschritten und Schlussfolgerungen in die richtige Reihenfolge. Erläutern Sie die jeweiligen Schritte mithilfe der Wortliste auf dem Rand.

A Für die Ableitungsfunktion einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ gilt also $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$.

B $= \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h}$

C $= \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$

D $= a^x \cdot \frac{a^{0+h} - a^0}{h}$

E $= \frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h}$

F $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

G Die Ableitung einer Exponentialfunktion entsteht somit durch Multiplikation des Funktionsterms mit einem konstanten Faktor k.

b) In Teilaufgabe a) wird auf dem Kärtchen G ein konstanter Faktor k aufgeführt. Dieser ist auch in Fig. 1 wiederzufinden. Erläutern Sie, wo man ihn ablesen kann.

Eine vertiefende Aufgabe findet sich auf Seite 106, Aufgabe 9.

Wortliste

- Funktionsterm einsetzen
- Potenzgesetz anwenden
- ausklammern
- $a^0 = 1$ verwenden
- Differenzenquotient für $x_0 = 0$ verwenden

Abkühlprozesse – Die Exponentialfunktion als Modell nutzen

Auftrag 1: Experimente durchführen

→ Lerneinheit 5 Seite 116

Führen Sie in kleinen Gruppen Messungen zum Abkühlvorgang von heißem Tee durch. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Bestimmen Sie mithilfe eines Thermometers die Umgebungstemperatur.
- Gießen Sie anschließend heißes Teewasser in eine Tasse.
- Messen Sie die Temperatur des Wassers in gleichmäßigen Abständen (z. B. jede Minute). Tragen Sie Ihre Messwerte in eine Tabelle ein.
- Bestimmen Sie auch die Temperaturdifferenz in Kelvin (K) zwischen den Messwerten und der Umgebungstemperatur.
- Veranschaulichen Sie Ihre Messwerte und die ermittelten Werte zur Temperaturdifferenz jeweils in einem Koordinatensystem.

Zeit (in min)	Temperatur (in °C)	Temperaturdifferenz (in K)
0		
1		
2		
3		
…		

Benötigtes Material:
- heißes Teewasser (Wasserkocher)
- Thermometer
- Tassen

Differenzierungsmöglichkeiten:

verschiedene Umgebungstemperaturen (drinnen, draußen, Flur, …)

dicke/dünne/hohe/breite Tassen

Tee mit/ohne Milch

Auftrag 2: Experimente auswerten, Modellfunktionen bestimmen

1. Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Temperaturdifferenz zwischen den Messwerten und der Umgebungstemperatur im Durchschnitt pro Minute abnimmt.
   Modellieren Sie die Abnahme der Temperaturdifferenz nach t Minuten durch eine Exponentialfunktion f mit einer Gleichung der Form $f(t) = c \cdot a^t$ bzw. $f(t) = c \cdot e^{kt}$.
2. Ermitteln Sie mithilfe der vorherrschenden Umgebungstemperatur und der Funktion f die Gleichung einer weiteren Modellfunktion g, die die Temperatur des Teewassers während des Abkühlvorgangs beschreibt.
3. Prüfen Sie mithilfe der Wertetabelle und den Graphen aus Auftrag 1, ob die Funktionen aus den Aufgaben 1. und 2. die Daten aus dem Experiment gut beschreiben. Gibt es Ausreißer? Überprüfen Sie, ob eine Kurvenanpassung mithilfe eines MMS sinnvoller wäre.
4. Begründen Sie: Die Ableitung von g gibt die Geschwindigkeit des Abkühlvorgangs an.
5. Zeichnen Sie mit einem MMS den Graphen der Ableitungsfunktion f' aus Aufgabe 1. und bestimmen Sie die Abkühlgeschwindigkeit (in °C pro Minute) nach einer Minute, nach zwei Minuten und nach zehn Minuten.
6. Formulieren Sie in Ihrer Gruppe Fragen zum Abkühlungsprozess, die man mithilfe der erhobenen Daten und aufgestellten Funktionsgleichungen untersuchen kann.
   Versuchen Sie, die Fragen anschließend in Ihrer Gruppe zu beantworten.

Einen Datenpunkt, der von einem ansonsten regelmäßigen Wachstum abweicht, nennt man **Ausreißer**.

Auftrag 3: Ergebnisse präsentieren und vergleichen

Tauschen Sie die Ergebnisse innerhalb des Kurses aus. Diskutieren Sie diese.
Welche Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede gibt es?

1 Wiederholung: Exponentialfunktionen

Der Abbauprozess von Koffein im Blut hängt von verschiedenen körperlichen Faktoren ab. Erfolgt keine weitere Aufnahme von Koffein, werden stündlich zwischen 10 % und 30 % des Koffeins abgebaut. Bei einer Untersuchung betrug die Koffeinmenge im Blut 100 mg.
Niko behauptet: „Dann war nach spätestens zehn Stunden kein Koffein mehr im Blut vorhanden." Nehmen Sie dazu Stellung.

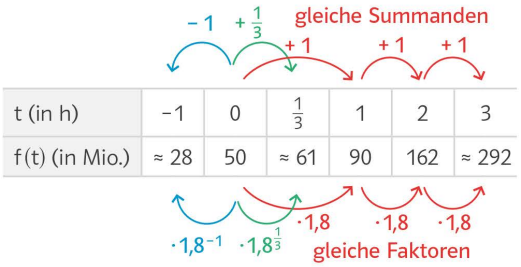
Exponentialfunktionen mit Gleichungen der Form $f(x) = c \cdot a^x$ spielen bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen eine wichtige Rolle. Ihre Eigenschaften werden hier wiederholt.

Wenn sich bei einem Wachstumsvorgang ein Bestand in gleichen Zeitspannen immer um denselben Faktor a ändert, liegt **exponentielles Wachstum** vor.

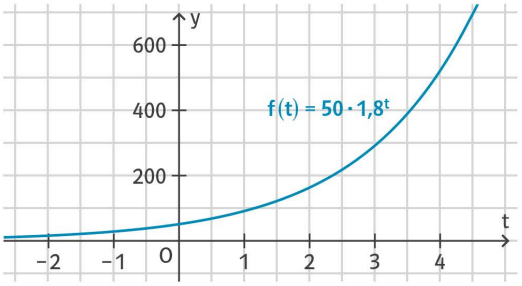
Exponentielle Zunahme (a > 1) beschreiben

Eine Bakterienkultur mit anfangs 50 Millionen Bakterien soll stündlich um 80 % wachsen.
Im exponentiellen Modell ist der **Anfangsbestand** (in Mio.) $c = 50$. Für die **prozentuale Zunahme** gilt $p = 80\,\% = 0{,}8$. Dementsprechend ist der **Wachstumsfaktor** $a = 1 + p = 1 + 0{,}8 = 1{,}8$.
Die Anzahl f der Bakterien (in Mio.) nach t Stunden lässt sich somit durch die Modellfunktion f mit $f(t) = 50 \cdot 1{,}8^t$ beschreiben.

Ist $0 < a < 1$, so handelt es sich um eine **exponentielle Abnahme**.



t (in h)	−1	0	$\frac{1}{3}$	1	2	3
f(t) (in Mio.)	≈ 28	50	≈ 61	90	162	≈ 292



Exponentialgleichungen lösen

Möchte man wissen, nach wie vielen Stunden 1 Milliarde Bakterien in der Kultur vorhanden sind, muss man eine Exponentialgleichung mithilfe des Logarithmus lösen:

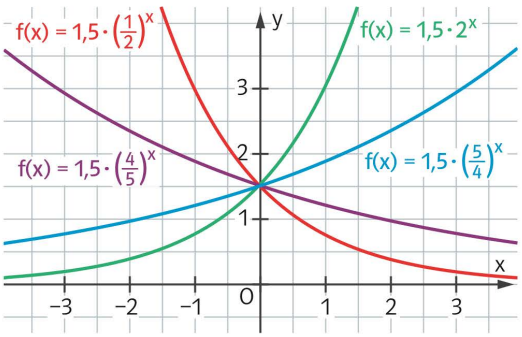
$$\begin{aligned} f(t) = 50 \cdot 1{,}8^t &= 1000 && | : 50 \\ 1{,}8^t &= 20 && | \log_{1,8}(\,) \\ t &= \log_{1,8}(20) \approx 5{,}1 \end{aligned}$$

Laut Modell sind nach gut 5 Stunden 1 Milliarde Bakterien vorhanden.

Erinnerung:
$\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$

Eigenschaften der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$, $c > 0$

- Die Exponentialfunktion f hat keine Nullstellen.
- Ihr Graph verläuft oberhalb der x-Achse.
- Ihr Graph verläuft durch $A(0\,|\,c)$.
- Für $a > 1$ nähert sich der Graph für $x \to -\infty$ beliebig nah der x-Achse an.
- Für $a < 1$ nähert sich der Graph für $x \to +\infty$ beliebig nah der x-Achse an.



Exponentialfunktionen und Exponentialgleichungen
Eine Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$ heißt **Exponentialfunktion**.
Wenn eine Exponentialfunktion einen Wachstumsvorgang beschreibt, handelt es sich für $a > 1$ um eine **exponentielle Zunahme** und für $0 < a < 1$ um eine **exponentielle Abnahme**.
Der Faktor a heißt **Wachstumsfaktor**.
Der Faktor c entspricht dem **Anfangsbestand** $f(0)$ zum Zeitpunkt $x = 0$.

Die Lösung x einer **Exponentialgleichung** $a^x = b$ $(a, b > 0)$ bezeichnet man als $\log_a(b)$ (sprich: Logarithmus von b zur Basis a).

Beispiel 1 **Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion bestimmen**
Der Graph der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ verläuft durch die Punkte $P(0\,|\,768)$ und $Q(4\,|\,1875)$. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

Lösung

Koordinaten von $P(0\,|\,768)$ in $f(x)$ einsetzen:
$f(0) = c \cdot a^0 = 768 \quad | a^0 = 1$
$c = 768,$
also ist $f(x) = 768 \cdot a^x$

Koordinaten von $Q(4\,|\,1875)$ in $f(x)$ einsetzen:
$768 \cdot a^4 = 1875 \quad | : 768$
$a^4 = \frac{1875}{768} \quad | (\,)^{\frac{1}{4}}$
$a = \left(\frac{1875}{768}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1875}{768}} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

Funktionsgleichung angeben:
$f(x) = 768 \cdot 1{,}25^x$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$

Beispiel 2 **Exponentialgleichungen mit dem Logarithmus lösen**
Geben Sie die Lösung der Gleichung zunächst als Logarithmus an und bestimmen Sie einen Näherungswert für x.
a) $2^x = 1500$ **b)** $4 \cdot 0{,}5^x = 6$

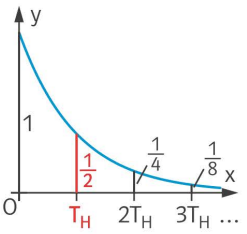
Lösung
a) $2^x = 1500 \quad | \log_2(\,)$
$x = \log_2(1500) \approx 10{,}551$

b) $4 \cdot 0{,}5^x = 6 \quad | : 4$
$0{,}5^x = 1{,}5 \quad | \log_{0{,}5}(\,)$
$x = \log_{0{,}5}(1{,}5) \approx -0{,}585$

Beispiel 3 **Exponentialfunktionen im Sachzusammenhang untersuchen**
Die Halbwertszeit von radioaktivem Jod 131 beträgt ungefähr 8 Tage. Zu Beobachtungsbeginn sind 12 mg vorhanden.
a) Stellen Sie die Gleichung einer Modellfunktion f zur Beschreibung des Jod-Zerfalls in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) auf.
b) Berechnen Sie, wie viel Jod 131 (in mg) laut Modell nach 2 Wochen noch vorhanden ist.

Lösung
a) Mit dem Anfangsbestand $c = 12$ erhält man $f(t) = 12 \cdot a^t$.
Da die Halbwertszeit $T_H = 8$ Tage beträgt, sinkt der Bestand nach 8 Tagen stets auf die Hälfte.
Es gilt:
$a^8 = \frac{1}{2} \quad | (\,)^{\frac{1}{8}}$
$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}917$
Die Funktionsgleichung lautet also $f(t) = 12 \cdot 0{,}917^t$.
b) *Zwei Wochen entsprechen 14 Tagen.*
$f(14) = 12 \cdot 0{,}917^{14} \approx 3{,}567$
Nach zwei Wochen sind noch ca. 3,567 mg Jod 131 vorhanden.

Erinnerung:
Die Zeit, in der sich der Anfangsbestand halbiert bzw. verdoppelt, nennt man **Halbwertszeit T_H** bzw. **Verdopplungszeit T_V**.

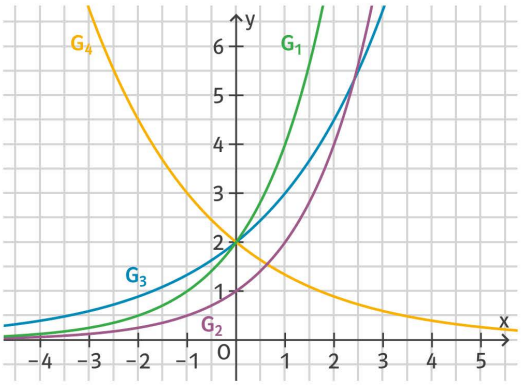


Aufgaben

○ **1** a) Ordnen Sie jeder Funktionsgleichung die passende Wertetabelle W_1 bis W_4 sowie den passenden Graphen G_1 bis G_4 zu. Begründen Sie.

$f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$ $\quad g(x) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\quad h(x) = 2^x$ $\quad i(x) = 2 \cdot 2^x$

W_1	x	−2	−1	0	1	2
	y	4,5	3	2	1,33	0,89
W_2	x	−2	−1	0	1	2
	y	0,5	1	2	4	8
W_3	x	−2	−1	0	1	2
	y	0,25	0,5	1	2	4
W_4	x	−2	−1	0	1	2
	y	0,89	1,33	2	3	4,5



b) Zeichnen Sie mit einem MMS abwechselnd den Graphen einer Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$. Ihr Partner bzw. Ihre Partnerin soll anschließend die zugehörige Funktionsgleichung angeben. Erläutern Sie sich gegenseitig, wie sie vorgegangen sind.

○ **2** Geben Sie die Lösung der Exponentialgleichung $a^x = b$ in der Form $x = \log_a(b)$ an und notieren Sie für x den Wert.

→ **Lerntipp** Seite 101, Beispiel 2

a) $6^x = 1$ b) $4^x = 64$ c) $2^x = \frac{1}{32}$

d) $10^x = 1\,000\,000\,000$ e) $2 \cdot 3^x = 18$ f) $625 \cdot 5^x = 1$

○ **3** Der Graph der Funktion f verläuft durch den Punkt P. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate.

a) $f(x) = 2^x$; $P(6\,|\,y)$ b) $f(x) = 0{,}5^x$; $P(x\,|\,16)$ c) $f(x) = 5^x$; $P\left(x\,\middle|\,\frac{1}{125}\right)$

d) $f(x) = 0{,}8^x$; $P(x\,|\,0{,}64)$ e) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $P(-4\,|\,y)$ f) $f(x) = \left(\frac{7}{5}\right)^x$; $P\left(x\,\middle|\,\frac{25}{49}\right)$

○ **4** Der Graph der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ verläuft durch die Punkte P und Q. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f. Ermitteln Sie die Stelle x, an der die Funktion f den Funktionswert 256 annimmt.

→ **Lerntipp** Seite 101, Beispiel 1

a) $P(0\,|\,4)$ und $Q(3\,|\,0{,}5)$ b) $P(0\,|\,0{,}25)$ und $Q(6\,|\,16)$ c) $P(0\,|\,512)$ und $P(-3\,|\,8)$

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 449

○ **5** Der Graph der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ verläuft durch die Punkte P und Q. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f. Ermitteln Sie die Stelle x, an der die Funktion f den Funktionswert 243 annimmt.

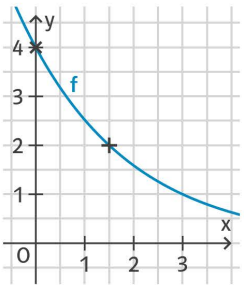
a) $P(0\,|\,1)$ und $Q(-2\,|\,81)$ **b)** $P(0\,|\,2)$ und $Q(-4\,|\,162)$ **c)** $P(0\,|\,3)$ und $Q(5\,|\,729)$

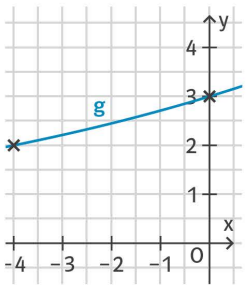
◒ **6** **Finden Sie den Fehler!**
Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie die richtige Lösung.

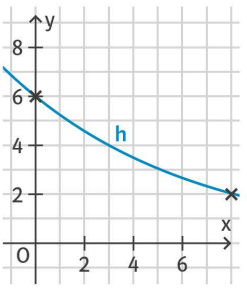
a)
$$\begin{aligned} 50 \cdot 5^x &= 10\,000 \quad | : 50 \\ 5^x &= 200 \quad | \sqrt[5]{} \\ x &\approx 2{,}89 \end{aligned}$$

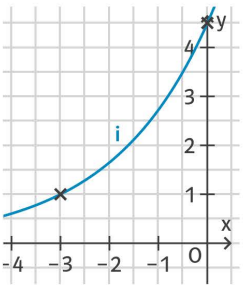
b)
$$\begin{aligned} 2 \cdot x^3 &= 1024 \quad | : 2 \\ x^3 &= 512 \\ x &= \log_3(512) \approx 5{,}68 \end{aligned}$$

7 a) Ermitteln Sie zu jedem Graphen eine passende Funktionsgleichung der Exponentialfunktion. Erläutern Sie, wie Sie vorgegangen sind.
b) Bestimmen Sie jeweils die Stelle x, an der der Funktionswert 10 angenommen wird.









8 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ verläuft durch die Punkte P und Q. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen.
a) P(3 | 12) und Q(6 | 96)
b) P(−2 | 16) und Q(4 | 0,25)

9 Die Entwicklung der Masse eines Hefepilzes auf einem Nährmedium wird durch eine Modellfunktion f mit $f(t) = 18 \cdot 1{,}56^t$ beschrieben (t: Zeit in Stunden nach Messbeginn, f(t): Masse in mg).
a) Geben Sie an, um wie viel Prozent die Masse des Hefepilzes laut Modell stündlich wächst.
b) Geben Sie mithilfe der Modellfunktion f die Masse des Hefepilzes zu Messbeginn an.
c) Bestimmen Sie f(3) sowie f(−3) und deuten Sie die Ergebnisse im Sachkontext.
d) Berechnen Sie die ungefähre Verdopplungszeit der Masse des Hefepilzes.

→ **Lerntipp** Seite 101, Beispiel 3

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 449

10 Die Signalstärke eines WLAN-Routers wird beim Durchgang durch Wände gedämpft. Die Intensität des Signals nimmt pro Zentimeter Mauerstein um 2 % ab.
a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die die Signalstärke f(x) in Abhängigkeit von der Wanddicke x (in cm) modelliert.
b) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Signalstärke eine 17 cm dicke Mauer durchdringen können.
c) Bestimmen Sie, wie dick eine Mauer maximal sein darf, sodass weniger als 25 % der ursprünglichen Signalstärke eingebüßt werden.

11 Ein Bestand f nimmt exponentiell zu. Beweisen Sie, dass sich innerhalb der Verdopplungszeit T_V nicht nur der Anfangsbestand f(0), sondern auch jeder andere Bestand f(t) verdoppelt.

12 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**
Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.
a) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ $(a > 0)$ entsteht aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = c \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^x$ durch Spiegelung an der x-Achse.
b) Eine Exponentialgleichung $a^x = b$ $(a > 0)$ besitzt genau eine Lösung.
c) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ $(a > 0)$ nähert sich für $x \to +\infty$ der x-Achse an.
d) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ $(a > 0)$ besitzt eine waagerechte Tangente.

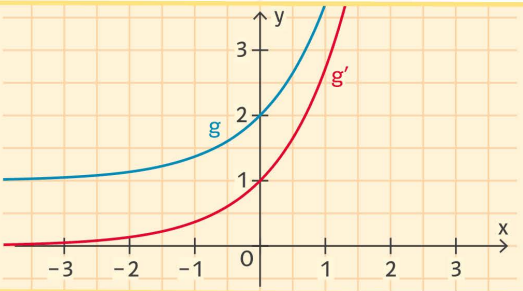
Grundwissen Test — Trigonometrische Gleichungen lösen

→ **Grundwissen**, Seite 412
Lösungen, Seite 449

G **13** Bestimmen Sie x im Intervall $[0; 2\pi]$.
a) $\sin(x) = 0$
b) $\sin(x) = 1$
c) $\sin(2x) = 0$
d) $2\sin(x) + 3 = 1$

2 Die natürliche Exponentialfunktion

„Da ist wohl etwas mit der Beschriftung schief gelaufen“, behauptet Gloria. „Der rote Graph ist doch eine Verschiebung des blauen.“
„Ja klar!“, entgegnet Simon. „Dann kann er nicht zur Ableitung von g gehören!“
Nehmen Sie Stellung zu den einzelnen Aussagen.



Bei der Beschäftigung mit Exponentialfunktionen waren bisher Anfangsbestand und Wachstumsfaktor die wesentlichen Aspekte. Im Folgenden wird dies auf die momentane Änderungsrate, also die Ableitung, ausgeweitet. Die Zusammenhänge führen zur natürlichen Exponentialfunktion.

Betrachtet wird die Funktion g mit $g(x) = 2^x$. Mit einem MMS kann man die Ableitung von g an verschiedenen Stellen x_0 bestimmen, wie in der Tabelle rechts dargestellt ist.
Vergleicht man die Werte $g(x_0)$ und $g'(x_0)$, so lässt sich vermuten, dass die Ableitungsfunktion g' ein Vielfaches von g ist.
Um einen Faktor k zu finden, für den $g'(x) = k \cdot g(x)$ gilt, muss man den Quotienten $k = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$ bilden. Für g mit $g(x) = 2^x$ und alle betrachteten Werte x_0 erhält man $k \approx 0{,}693\,15$.
Dieser Wert entspricht auch der Ableitung von g an der Stelle $x = 0$.
Also folgt $g'(x) = g'(0) \cdot g(x) = 0{,}693\,15 \cdot 2^x$.

x_0	$g(x_0)$	$g'(x_0)$	$k = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$
0	1	0,693 15	0,693 15
1	2	1,386 29	0,693 15
2	4	2,772 59	0,693 15
3	8	5,545 18	0,693 15
4	16	11,090 35	0,693 15

Da der Quotient $\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$ stets gleich ist, sind $g(x)$ und $g'(x)$ proportional.
Den Faktor $k = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$ nennt man auch **Proportionalitätsfaktor**.

Man kann vermuten, dass sich der zuvor gefundene Zusammenhang für beliebige Funktionen f mit $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ verallgemeinern lässt. Mithilfe des Differenzenquotienten gelingt der rechnerische Nachweis, dass $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$ gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0 + h} - a^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0}(a^h - 1)}{h} = a^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^{0 + h} - a^0}{h} = a^{x_0} \cdot f'(0)$$

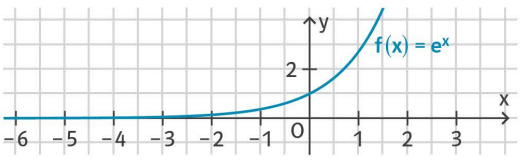
Bestimmt man den Faktor k für verschiedene Funktionen f mit $f(x) = a^x$, so stellt man fest, dass der Faktor $k = f'(0)$ mit größer werdender Basis a wächst.
Die Werte in der Tabelle legen nahe, dass es eine Basis zwischen 2,7 und 2,8 gibt, für die der Faktor k gleich 1 ist. Für diese Basis gilt also $f'(0) = 1$.
Das heißt: Die Ableitung dieser Exponentialfunktion stimmt exakt mit der Ausgangsfunktion überein. Die Basis mit dieser Eigenschaft wird **Eulersche Zahl** genannt und mit **e** bezeichnet. Man kann zeigen, dass die Eulersche Zahl e irrational ist.

$f(x) = a^x$	Proportionalitätsfaktor $k = \frac{f'(x)}{f(x)}$
2^x	0,693 15
$2{,}5^x$	0,916 29
$2{,}6^x$	0,955 51
$2{,}7^x$	0,993 25
$2{,}8^x$	1,029 62

Leonhard Euler (1707 – 1783) veröffentlichte 1743 eine Abhandlung über den Grenzwert $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Er nannte ihn e.

Graph der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$

Da $f'(x) = e^x > 0$ ist, ist f auf ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend. Da $f''(x) = e^x > 0$ ist, ist der Graph von f auf ganz $\mathbb{R}$ linksgekrümmt.
Für $x \to -\infty$ nähern sich die Funktionswerte $f(x)$ der Zahl 0 an.



Exponentialgleichungen mithilfe des natürlichen Logarithmus lösen
Eine Gleichung wie $e^x = 6$ heißt Exponentialgleichung.
Die Lösung dieser Gleichung ist der Logarithmus von 6 zur Basis e, also $x = \log_e(6)$.
Man nennt den Logarithmus zur Basis e den **natürlichen Logarithmus** und schreibt $x = \ln(6)$.
Es gilt $x = \ln(6) \approx 1{,}792$.

Die natürliche Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus
Die Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ stimmt mit ihrer Ableitungsfunktion f' überein. Die Funktion f heißt **natürliche Exponentialfunktion**.
Für die Ableitungsfunktion f' der natürlichen Exponentialfunktion gilt $f'(x) = f(x)$. Außerdem ist F mit $F(x) = f(x)$ eine Stammfunktion von f.
Die Basis $e \approx 2{,}718\,28$ der natürlichen Exponentialfunktion heißt **Euler'sche Zahl**.

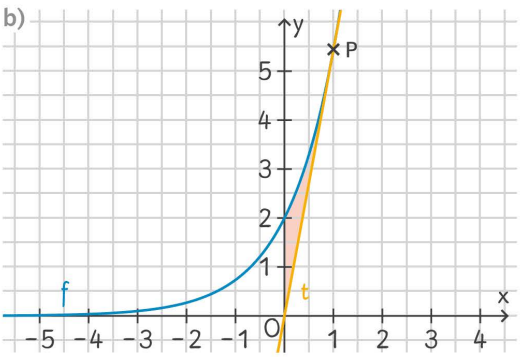
Für eine Zahl $b > 0$ ist $x = \ln(b)$ die Lösung der Exponentialgleichung $e^x = b$.
Man nennt $\ln(b)$ den **natürlichen Logarithmus** von b.
Für $b \in \mathbb{R}^+$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $e^{\ln(b)} = b$ und $\ln(e^c) = c$.

Potenzregel
$f(x) = x^n$
$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Faktorregel
$f(x) = c \cdot g(x)$
$f'(x) = c \cdot g'(x)$
Summenregel
$f(x) = g(x) + h(x)$
$f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Beispiel 1 **Ableitung und Stammfunktion der natürlichen Exponentialfunktion bilden**
Bestimmen Sie f'(x) und geben Sie die Gleichung einer möglichen Stammfunktion von f an.
a) $f(x) = 3e^x - 5$ b) $f(x) = e^x - 3x^2 - 4x$ c) $f(x) = 5x^3 - 15e^x$
Lösung
a) $f'(x) = 3e^x$
$F(x) = 3e^x - 5x$
b) $f'(x) = e^x - 6x - 4$
$F(x) = e^x - x^3 - 2x^2$
c) $f'(x) = 15x^2 - 15e^x$
$F(x) = 1{,}25x^4 - 15e^x$

Beispiel 2 **Exponentialgleichungen mit dem natürlichen Logarithmus lösen**
Lösen Sie die Gleichung. Geben Sie die Lösung mithilfe des natürlichen Logarithmus an und bestimmen Sie, falls möglich, einen Näherungswert für die Lösung.
a) $e^x = 10$ b) $e^x = -1$ c) $2e^x = 44$
Lösung
a) $e^x = 10 \quad | \ln(\,)$
$x = \ln(10) \approx 2{,}303$
b) Die Gleichung ist unlösbar, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
c) $2e^x = 44 \quad | :2$
$e^x = 22 \quad | \ln(\,)$
$x = \ln(22) \approx 3{,}091$

Beispiel 3 **Tangentengleichung und Integral bestimmen**
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^x$.
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente von f im Punkt $P(1|f(1))$.
b) Skizzieren Sie den Graphen von f sowie die Tangente im Punkt $P(1|f(1))$.
c) Bestimmen Sie mithilfe einer Stammfunktion den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f, der Tangente im Punkt P und der y-Achse eingeschlossen wird.
Lösung
a) $f(1) = 2e^1 = 2e \approx 5{,}44$, also ist $P(1|2e)$.
1. Ableitung bilden:
$f'(x) = 2e^x$
Tangentensteigung in $P(1|2e)$ bestimmen:
$m = f'(1) = 2e^1 = 2e \approx 5{,}44$
Also ist $t(x) = 2e \cdot x + b$.
Koordinaten von P in $t(x) = 2e \cdot x + b$ einsetzen:
$2e = 2e \cdot 1 + b$, also ist $b = 0$.
Folglich ist $t(x) = 2e \cdot x \approx 5{,}44 \cdot x$.

b)


c) $A = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 t(x)\,dx = \int_0^1 (f(x) - t(x))\,dx = \int_0^1 (2e^x - 2e \cdot x)\,dx = \left[2e^x - \frac{1}{2} \cdot 2e\,x^2\right]_0^1 = e - 2 \approx 0{,}72$

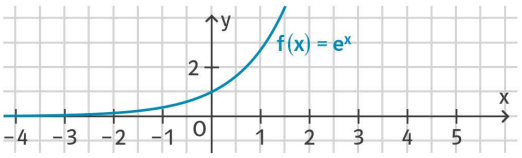
Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktionen f′ und f″ der Funktion f und geben Sie die Gleichung einer möglichen Stammfunktion an.

a) $f(x) = e^x + 1$ b) $f(x) = -e^x + x$ c) $f(x) = -5e^x - 0{,}5x^2$ d) $f(x) = -(e^x - x^3)$

Lerntipp Seite 105, Beispiel 1

2 SP Gegeben ist die natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$.
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f. Die Wortliste auf dem Rand kann helfen.



Wortliste
- die Nullstelle
- der Extrempunkt
- der Wendepunkt
- der y-Achsenabschnitt
- monoton steigend/fallend
- links-/rechtsgekrümmt
- für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$

3 Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$.

a) $f(x) = e^x$; $x_0 = 0$ b) $f(x) = e^x$; $x_0 = -2$ c) $f(x) = 2e^x$; $x_0 = -1$
d) $f(x) = -0{,}5e^x$; $x_0 = 1$ e) $f(x) = e^x + x$; $x_0 = 1$ f) $f(x) = 2e^x - x^2$; $x_0 = 2$

4 Berechnen Sie das Integral mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung.

a) $\int_0^5 e^x\,dx$ b) $\int_0^1 (2x - e^x)\,dx$ c) $\int_0^{\ln(2)} (e^x + 1)\,dx$

Die Lösungen zu den Aufgaben 3 bis 5 können mit einem MMS überprüft werden.

5 Lösen Sie die Gleichung, falls möglich. Geben Sie die Lösung mithilfe des natürlichen Logarithmus an und bestimmen Sie einen Näherungswert für die Lösung.

a) $e^x = 15$ b) $e^x = -2{,}4$ c) $3e^x = 12$ d) $-4e^x = -8$

Lerntipp Seite 105, Beispiel 2

Test 1

Lösungen, Seite 449

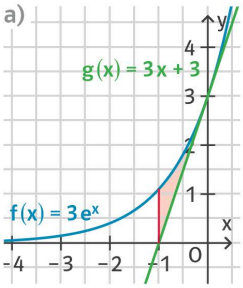
6 Bestimmen Sie f′(x) und geben Sie die Gleichung einer möglichen Stammfunktion von f an.

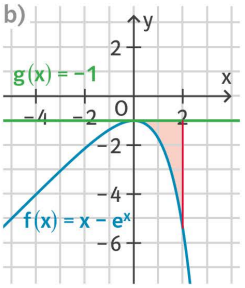
a) $f(x) = 3{,}5e^x - 5$ b) $f(x) = -e^x + x^4$ c) $f(x) = 0{,}5e^x + \frac{1}{4}x^2$

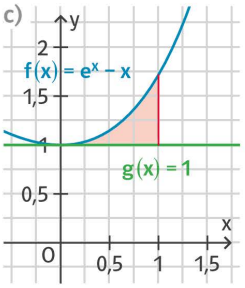
7 Lösen Sie die Gleichung, falls möglich. Geben Sie die Lösung mithilfe des natürlichen Logarithmus an und bestimmen Sie einen Näherungswert für die Lösung.

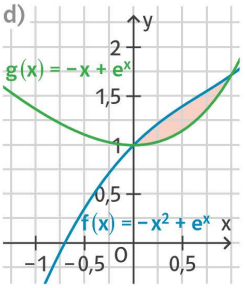
a) $e^x = 0{,}5$ b) $-2e^x = 7$ c) $4e^x = 10$ d) $-3e^x = -99$

8 Berechnen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der markierten Fläche.

a)


b)


c)


d)


9 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5e^x$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1 | f(1))$.
b) Bestimmen Sie $f(0)$ und $f(1)$. Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von f sowie die Tangente im Punkt $P(1 | f(1))$.
c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f, der Tangente in $P(1 | f(1))$ und der y-Achse eingeschlossen wird.
d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe eines MMS.

Lerntipp Seite 105, Beispiel 3

10 a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = e^{-x}$ und erläutern Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.
b) Begründen Sie anhand der Ergebnisse aus Teilaufgabe a), dass $g'(x) = -e^{-x}$ sein muss.

11 a) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen f' und f'' der Funktion f und berechnen Sie lokale Extremstellen, falls welche existieren.
(1) $f(x) = e^x + x$ (2) $f(x) = e^x - 4x$ (3) $f(x) = e^x - ex$
b) Untersuchen Sie, für welche Werte von a die Funktion f mit $f(x) = e^x + ax$ ein Minimum hat.

12 **Wahr oder falsch?**
Gegeben ist die natürliche Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$. Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.
a) Der Graph von f hat keinen Punkt mit waagerechter Tangente.
b) Der Graph von f nähert sich der x-Achse an.
c) Der Graph von f hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.
d) Der Graph von f hat keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.
e) Der Graph der Funktion g mit $g(x) = c \cdot e^x$ verläuft für alle $c > 0$ oberhalb des Graphen von f.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 449

13 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion im Punkt $A(2 \mid e^2)$ und berechnen Sie die Koordinaten ihrer Achsenschnittpunkte.

14 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x - x$.
a) Bestimmen Sie die Extremstelle der Funktion f.
b) Begründen Sie, dass der Graph von f keine Wendepunkte hat.

15 a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ im Punkt $A(u \mid e^u)$. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse.
b) Die Normale an den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion f im Punkt $A(u \mid e^u)$ schneidet die y-Achse in $Y(0 \mid y_u)$ und die x-Achse in $X(x_u \mid 0)$. Zeigen Sie: $x_u = e^u \cdot y_u$.

16 MK Für eine Funktion f mit $f(x) = a^x$ lautet die Ableitung $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$. Laut Definition der Ableitung ist $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{a^h - a^0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$, wenn man h durch $\frac{1}{n}$ ersetzt.
Soll nun dieser Grenzwert gleich 1 sein, müssen Zähler und Nenner für große Werte von n annähernd gleich groß werden.

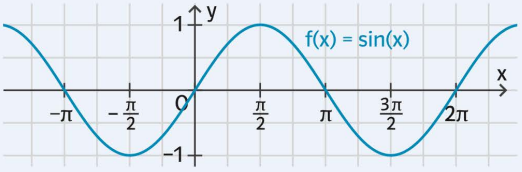
Zeigen Sie hiermit, dass dann $a \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sein muss.

Erläutern Sie, warum man dann die Euler'sche Zahl in der Form $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ angeben kann.

Grundwissen Test — Die Eigenschaften der Sinusfunktion angeben

→ **Grundwissen**, Seite 412
Lösungen, Seite 450

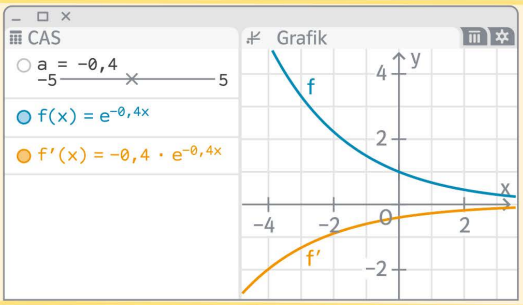
G **17** Geben Sie die Eigenschaften der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$ an. Nutzen Sie die Begriffe auf den Kärtchen.



Werte | negativ | Nullstellen | kleinster Wert | größter Wert | Periode | Amplitude | positiv

3 Transformierte Exponentialfunktionen untersuchen

Gegeben ist der Graph der Funktion f_a mit $f_a(x) = e^{ax}$ $(a \in \mathbb{R})$.
Stellen Sie eine Vermutung auf, welchen Einfluss der Parameter a auf den Verlauf der Graphen von f_a und f_a' hat.
Überprüfen Sie Ihre Vermutungen mithilfe eines MMS. Wie lautet die Funktionsgleichung einer allgemeinen Ableitungsfunktion f_a'?



Wie alle bisher bekannten Funktionstypen lassen sich auch Exponentialfunktionen transformieren. Allerdings lässt sich die Ableitung einer transformierten Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^{kx+b}$ $(k \neq 0)$ noch nicht bilden, da die bisher bekannten Ableitungsregeln nicht ausreichen. Im Folgenden wird beispielhaft erarbeitet, wie man die Ableitung transformierter Exponentialfunktionen bestimmen kann.

In Fig. 1 ist der Graph der Funktion g mit $g(x) = e^{2x}$ dargestellt. Dieser geht aus dem Graphen von f mit $f(x) = e^x$ durch Streckung um den Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung hervor, denn $g\left(\frac{1}{2}x\right) = e^{2\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)} = e^x = f(x)$.

Es ist z. B. $g\left(\frac{1}{2}\right) = e^{2\cdot\frac{1}{2}} = e^1 = f(1)$.

Dadurch ist an der Stelle $x = 0$ die Steigung des Graphen von g doppelt so groß wie die Steigung des Graphen von f.
Es gilt somit $g'(0) = 2 \cdot f'(0) = 2$.

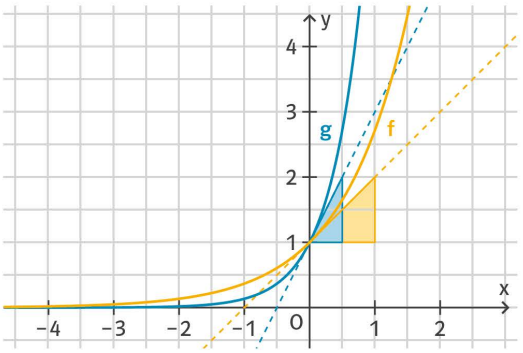


Fig. 1

Man kann vermuten, dass die Steigung von g an jeder Stelle x doppelt so groß ist wie ihr zugehöriger Funktionswert. Mithilfe des Potenzgesetzes $a^{m\cdot n} = (a^m)^n$ lässt sich dies begründen.
Es gilt $g(x) = e^{2x} = (e^2)^x$
g ist also eine Exponentialfunktion mit der Basis e^2.
Da $g'(0) = 2$ ist, gilt: $g'(x) = g'(0) \cdot g(x)$
$= 2 \cdot g(x)$
$= 2 \cdot e^{2x}$

Eine mögliche Stammfunktion ist G mit $G(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$, denn $G'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x} = g(x)$.

Verschiebt man den Graphen von g um $\frac{1}{2}$ Einheit nach links, so erhält man den Graphen der Funktion i mit $i(x) = e^{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = e^{2x+1}$.

Wendet man das Potenzgesetz $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ auf den Funktionsterm von i an, so folgt
$i(x) = e^{2x+1} = e^{2x} \cdot e = e \cdot e^{2x}$.
Für die Ableitung von i gilt demnach
$i'(x) = e \cdot 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot e \cdot e^{2x} = 2e^{2x+1}$.

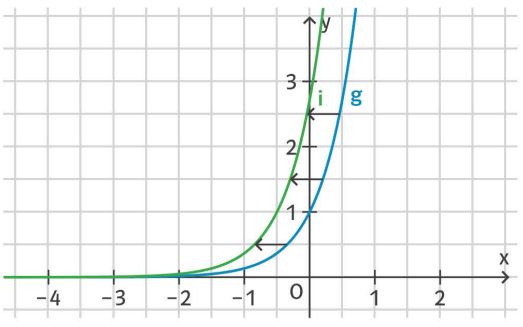


Fig. 2

Auch mithilfe der **Kettenregel** (Schulbuchseite 151) lässt sich zeigen, dass für die Ableitung einer Funktion f mit $f(x) = e^{kx+b}$ Folgendes gilt: $f'(x) = k \cdot e^{kx+b}$

Diese Zusammenhänge lassen sich für beliebige Exponentialfunktionen mit Gleichungen der Form $f(x) = e^{kx+b}$ verallgemeinern.

Ableitung und Stammfunktion transformierter Exponentialfunktionen
Für die Ableitungsfunktion f' einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^{kx+b}$ gilt $f'(x) = k \cdot e^{kx+b}$.
Daraus folgt, dass F mit $F(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{kx+b}$ eine Stammfunktion von f ist.

k bezeichnet man auch als **Wachstumskonstante**.

Beispiel 1 **Ableitung und Stammfunktion transformierter Exponentialfunktionen bestimmen**
Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f sowie zwei mögliche Stammfunktionen.
a) $f(x) = e^{3x}$ b) $f(x) = 4e^{-0,5x+2}$

Lösung
a) $f'(x) = 3e^{3x}$
$F_1(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$
$F_2(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 2$

b) $f'(x) = -0,5 \cdot 4e^{-0,5x+2} = -2e^{-0,5x+2}$
$F_1(x) = \frac{4}{-0,5}e^{-0,5x+2} = -8e^{-0,5x+2}$
$F_2(x) = \frac{4}{-0,5}e^{-0,5x+2} + 1 = -8e^{-0,5x+2} + 1$

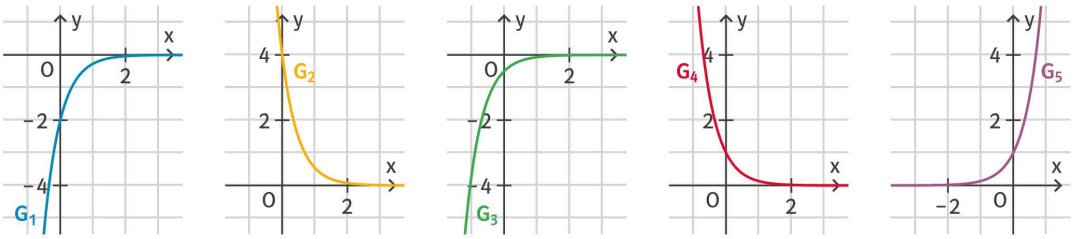
Beispiel 2 **Exponentialfunktionen im Sachzusammenhang untersuchen**
Auf einem Kartoffelfeld breitet sich der Kartoffelkäfer aus. Zur Beschreibung des angenommenen Schädlingsbestands nutzt ein Landwirt die Modellfunktion f mit $f(t) = 5000 \cdot e^{0,025t}$, wobei t die Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn und f(t) die Anzahl der Käfer angibt.
a) Bestimmen Sie, wie viele Kartoffelkäfer laut Modell zu Beobachtungsbeginn auf dem Feld vorhanden sind.
b) Bestimmen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit des Kartoffelkäferbestands nach 5 Tagen.
c) Ermitteln Sie, ab wann der Bestand innerhalb eines Tages um mehr als 200 Käfer anwächst.

Lösung
a) $f(0) = 5000 \cdot e^{0,025 \cdot 0} = 5000$
Laut Modell sind zu Beobachtungsbeginn 5000 Kartoffelkäfer auf dem Feld vorhanden.
b) $f'(t) = 5000 \cdot 0,025e^{0,025t} = 125e^{0,025t}$; $f'(5) = 125e^{0,025 \cdot 5} \approx 141,64$
Nach 5 Tagen wächst der Bestand mit einer Wachstumsgeschwindigkeit von ca. 142 Käfern pro Tag.
c) $f(t+1) - f(t) = 200$
Mit einem MMS erhält man $t \approx 18,30$.
Ab dem 19. Tag wächst der Bestand täglich um mehr als 200 Käfer an, denn die Differenz der Funktionswerte nimmt zu.

CAS
f(t) = 5000 · e^(0,025 · t)
nSolve (f(t + 1) − f(t) = 200, t)
→ 18,2991

Aufgaben

○ **1** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-2x}$. Entscheiden Sie, welcher Graph zu f, f', f'', F und $\frac{1}{f}$ gehört. Begründen Sie.



○ **2** Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f sowie zwei mögliche Stammfunktionen.
a) $f(x) = e^{5x}$ b) $f(x) = 2e^{0,25x}$ c) $f(x) = 5e^{2x+1}$
d) $f(x) = \frac{1}{2}e^{6x}$ e) $f(x) = 10e^{0,5x-2}$ f) $f(x) = 0,4e^{4x+2} + 2x$

→ **Lerntipp** Seite 109, Beispiel 1

○ **3** Berechnen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = e^{2x}$; $x_0 = 0$ **b)** $f(x) = e^{-x}$; $x_0 = -1$ **c)** $f(x) = e^{3x+1}$; $x_0 = -2$

d) $f(x) = -e^{0,5x}$; $x_0 = 1$ **e)** $f(x) = 3e^{x-2}$; $x_0 = 3$ **f)** $f(x) = 2e^{-0,25x-1}$; $x_0 = 2$

○ **4** Bestimmen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall I eingeschlossen wird.

a) $f(x) = e^{4x}$; $I = [0; 3]$ **b)** $f(x) = 4e^{0,25x}$; $I = [-1; 2]$ **c)** $f(x) = e^{2x-2}$; $I = [-1; 1]$

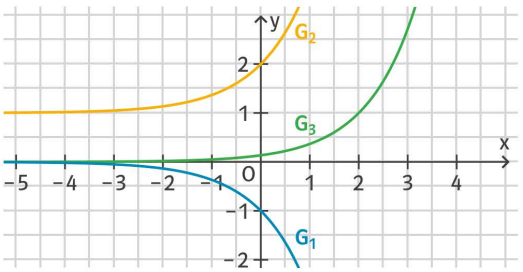
d) $f(x) = 2e^{0,5x}$; $I = [-1; 2]$ **e)** $f(x) = 3e^{-x+3}$; $I = [-1; 2]$ **f)** $f(x) = \frac{1}{2}e^{4x+2}$; $I = [-1; 2]$

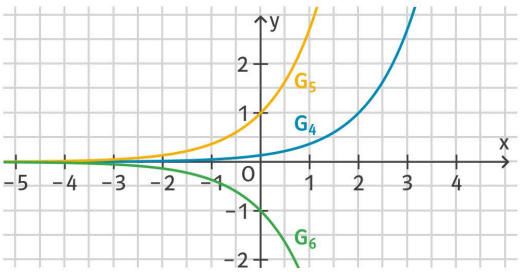
○ **5** Gegeben ist die natürliche Exponentialfunktion f_1 mit $f_1(x) = e^x$.

a) Beschreiben Sie, wie die Graphen von f_2, f_3 und f_4 aus dem Graphen von f_1 entstehen.

$f_2(x) = e^x + 1$ $f_3(x) = -e^x$ $f_4(x) = e^{x-2}$

b) Ordnen Sie den Funktionen f_2, f_3 und f_4 die passenden Funktionsgraphen G_1, G_2 und G_3 sowie die Graphen ihrer Ableitung G_4, G_5 und G_6 zu.





Test 1

→ **Lösungen**, Seite 450

○ **6** Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f sowie zwei mögliche Stammfunktionen.

a) $f(x) = e^{0,5x}$ **b)** $f(x) = 2e^{3x+1}$ **c)** $f(x) = e^{-x} + 4$

○ **7** Bestimmen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall I eingeschlossen wird.

a) $f(x) = e^{2x}$; $I = [0; 4]$ **b)** $f(x) = 2e^{x-1}$; $I = [1; 3]$ **c)** $f(x) = e^{0,5x+2}$; $I = [-4; 0]$

◒ **8** Ein Forscherteam beobachtet Alligatoren in einem Sumpf. Anfangs sind es 34, nach drei Jahren 50 Tiere. Das Team nimmt an, dass der Bestand zunächst exponentiell wächst.

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot e^{kx}$, die das Wachstum der Alligatorenpopulation nach x Jahren beschreibt.

b) Bestimmen Sie die erwartete Verdopplungszeit der Population.

c) Jenny berechnet die durchschnittliche Zunahme der Alligatoren pro Jahr für die ersten fünf Jahre mit dem Differenzenquotienten. Jannis findet: „Wenn ich die Verdopplungszeit kenne, kann ich doch einfach 34 : 5,37 rechnen." Beurteilen Sie, ob Jannis recht hat.

◒ **9** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^{kx}$ $(k \in \mathbb{R})$.

SP **a)** Zeichnen Sie den Graphen von f für unterschiedliche Werte von k mithilfe eines MMS und beschreiben Sie die Eigenschaften für $k > 0$ und $k < 0$. Die Wortliste kann helfen.

b) Zeigen Sie, dass der Graph von f für jeden Wert von k durch den Punkt $P(0|2)$ verläuft.

c) Berechnen Sie den Wert von k, für den der Graph von f' die y-Achse im Punkt $S(0|3)$ schneidet.

d) Begründen Sie, dass die Funktion f für keinen Wert von k eine Nullstelle oder ein Maximum bzw. Minimum hat.

Wortliste

- streng monoton steigend/fallend
- linksgekrümmt
- rechtsgekrümmt
- Für $x \to \pm\infty$ strebt …
- die Spiegelung

10 Die Höhe einer Kletterpflanze (in m) zur Zeit t (in Wochen seit Beobachtungsbeginn) wird für einen Zeitraum näherungsweise durch die Funktion h mit $h(t) = 0{,}02 \cdot e^{0{,}49\,t}$ beschrieben.

a) Geben Sie an, wie hoch die Kletterpflanze zu Beobachtungsbeginn ist.
b) Berechnen Sie, wie hoch die Pflanze nach 9 Wochen ist.
c) Bestimmen Sie, wann die Pflanze 3 m hoch ist.
d) Ermitteln Sie, wann die momentane Wachstumsrate 0,30 m pro Woche beträgt.
e) Ermitteln Sie, wann die Pflanze innerhalb einer Woche um 43 cm wächst.

Lerntipp
Seite 109, Beispiel 2

11 Aus einem Leck in einem Tank fließt Flüssigkeit. Die Abflussrate wird modellhaft beschrieben durch die Funktion f mit $f(t) = 2e^{-0{,}5t}$ ($t \geq 0$; t in Stunden, $f(t)$ in Kubikmetern pro Stunde).
a) Skizzieren Sie den Graphen von f. Zeigen Sie, dass in diesem Modell davon ausgegangen wird, dass aus dem Leck am Tank immer etwas Flüssigkeit fließt.
b) Bestimmen Sie, wie viele Kubikmeter Flüssigkeit nach 6 Stunden bereits aus dem Tank geflossen sind.

Es wird festgestellt, dass sich die Modellfunktion f nur für die ersten sechs Stunden als geeignet erweist. Für $t \geq 6$ wird von einem linearen Abfluss ausgegangen.
c) Stellen Sie eine Modellfunktion g auf, für die $g'(6) = f'(6)$ gilt.
d) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion g, nach wie vielen Stunden der Tank in etwa leer ist.

Test 2

Lösungen, Seite 450

12 Das Wachstum einer Heuschreckenpopulation in einer Region wird für $0 \leq t \leq 22$ modellhaft durch die Funktion f mit $f(t) = 12\,000 \cdot e^{0{,}058\,t}$ beschrieben, wobei t die Zeit in Wochen und $f(t)$ die Anzahl der Heuschrecken angibt.
a) Geben Sie an, wie groß die Heuschreckenpopulation zu Beobachtungsbeginn ist.
b) Berechnen Sie, wie groß die Population laut Modell nach 3 Wochen ist.
c) Ermitteln Sie die Verdopplungszeit der Heuschreckenpopulation.
d) Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt davon auszugehen ist, dass die Population mit einer Geschwindigkeit von 1000 Heuschrecken pro Woche zunimmt.

13 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**
Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = e^{kx+b}$ ($k, b \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$). Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.
a) Der Graph einer Funktion f_k verläuft oberhalb der x-Achse.
b) Der Graph einer Funktion f_k hat mit der Geraden $y = a$ genau einen Schnittpunkt.
c) Der Graph einer Funktion f_k ist streng monoton steigend.
d) Der Graph einer Funktion f_k ist rechtsgekrümmt.

14 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Die Tangente in einem Punkt des Graphen von f bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes des Graphen von f, für den der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal ist.

Grundwissen Test — Transformation der Sinusfunktion beschreiben

Grundwissen, Seite 412
Lösungen, Seite 450

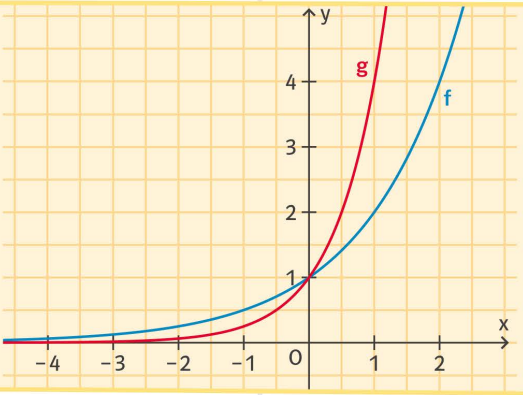
G **15** Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$ hervorgeht. Bestimmen Sie auch die Amplitude A und die Periode p von g.
a) $g(x) = 2\sin(x) + 2$
b) $g(x) = \sin(3x - 3)$
c) $g(x) = \sin(2x + 1) - 0{,}5$
d) $g(x) = 0{,}5\sin(x - \pi) + 1{,}5$

4 Ableitung beliebiger Exponentialfunktionen

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = 2^x$ und g mit $g(x) = 4^x$.

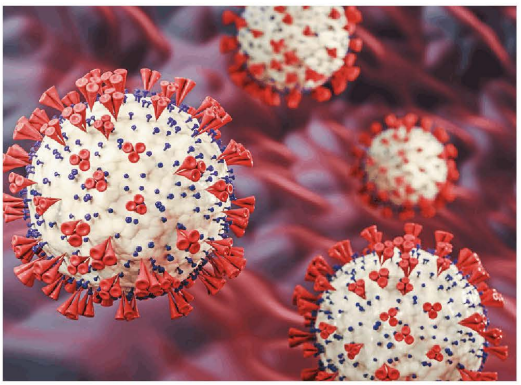
Noël meint: „Der Graph von g ist an der Stelle $x = 0$ doppelt so steil wie der Graph von f."
Carla behauptet: „Der Graph von g ist an einer beliebigen Stelle x_0 doppelt so steil wie der Graph von f an der gleichen Stelle x_0."
Sandra vermutet: „Der Graph von g ist an einer beliebigen Stelle x_0 doppelt so steil wie der Graph von f an der Stelle $x_1 = 2x_0$.

Überprüfen Sie die Aussagen mit einem MMS.



Zur Beschreibung von Wachstumsprozessen wurden unter anderem Exponentialfunktionen mit Gleichungen der Form $f(x) = c \cdot a^x$ $(c \in \mathbb{R},\ a > 0)$ verwendet. Die momentane Änderungsrate wurde allerdings bisher nur für die natürliche Exponentialfunktion erarbeitet. Diese wird im Folgenden verwendet, um die Ableitung für beliebige Exponentialfunktionen herzuleiten.

In einem Modell wird bei der Ausbreitung eines Virus in einer Region von einem exponentiellen Wachstum ausgegangen. Die Anzahl der täglich Neuinfizierten wird durch die Exponentialfunktion f mit $f(t) = 59 \cdot 1{,}25^t$ beschrieben, wobei t die Anzahl der Tage nach Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Infiziertenanzahl angibt.
Möchte man wissen, mit welcher Geschwindigkeit sich die Infiziertenanzahl im Beobachtungszeitraum entwickelt, benötigt man die Ableitung der Funktion f.



Um diese für die Funktion f mit $f(t) = 59 \cdot 1{,}25^t$ herzuleiten, schreibt man den Faktor $1{,}25^t$ als Potenz mit der Basis e und löst anschließend eine Exponentialgleichung.

$1{,}25^t = e^{kt}$ | Potenzgesetz anwenden
$1{,}25^t = (e^k)^t$ | Vergleich der Basis
$1{,}25 = e^k$ | ln( )
$k = \ln(1{,}25)$

Also gilt $f(t) = 59 \cdot 1{,}25^t = 59 \cdot (e^{\ln(1{,}25)})^t = 59 \cdot e^{\ln(1{,}25) \cdot t}$.

Es ergibt sich dann für die Ableitungsfunktion f': $f'(t) = 59 \cdot \ln(1{,}25) \cdot e^{\ln(1{,}25) \cdot t} = 59 \cdot \ln(1{,}25) \cdot 1{,}25^t$

Da $f'(0) = 59 \cdot \ln(1{,}25) \cdot 1{,}25^0 \approx 13{,}165$ gilt, beträgt die momentane Ausbreitungsgeschwindigkeit des Virus zu Beobachtungsbeginn ca. 13 Infizierte pro Tag.
Eine Woche später hat sie sich bereits mehr als vervierfacht.
Es gilt $f'(7) = 59 \cdot \ln(1{,}25) \cdot 1{,}25^7 \approx 62{,}778$.
Die momentane Ausbreitungsgeschwindigkeit beträgt also ca. 63 Infizierte pro Tag.

Für beliebige Exponentialfunktionen mit Gleichungen der Form $f(x) = a^x$ lassen sich die oben gefundenen Erkenntnisse verallgemeinern.

Ableitung und Stammfunktion beliebiger Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen mit einer beliebigen Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ lassen sich mithilfe des natürlichen Logarithmus als Exponentialfunktionen mit der Basis e darstellen.

Es gilt: $f(x) = a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$

Für die Ableitungsfunktion f' gilt dann $f'(x) = \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = \ln(a) \cdot a^x$.

Außerdem ist F mit $F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$ eine Stammfunktion von f.

Es gilt:
$F'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$
$= e^{\ln(a) \cdot x} = a^x$

Beispiel 1 **Ableitung und Stammfunktion beliebiger Exponentialfunktionen bilden**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2^x$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f' der Funktion f.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $A(1|2)$.

c) Bestimmen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall $I = [0; 1]$ eingeschlossen wird.

Lösung

a) $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x \approx 0{,}69315 \cdot 2^x$

b) $f'(1) = \ln(2) \cdot 2^1 = 2 \cdot \ln(2) \approx 1{,}3863$

Für die Tangente t gilt also $t(x) = f'(x) \cdot x + b = 2 \cdot \ln(2) \cdot x + b = 1{,}3863\,x + b$.

Einsetzen der Koordinaten von A in t(x) ergibt $2 = 2 \cdot \ln(2) \cdot 1 + b$, also $b = 2 - 2 \cdot \ln(2) \approx 0{,}6137$.

Die Tangentengleichung lautet also $t(x) = 2 \cdot \ln(2) \cdot x + 2 - 2 \cdot \ln(2) \approx 1{,}3863\,x + 0{,}6137$.

c) $\int_0^1 2^x \,dx = \left[\frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^x\right]_0^1 = \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \approx 1{,}44$

Beispiel 2 **Exponentialfunktionen im Sachzusammenhang untersuchen**

Die Gewichtszunahme einer Pilzkultur auf einem Nährmedium wird innerhalb der ersten Stunden modellhaft durch die Funktion f mit $f(t) = 18 \cdot 1{,}56^t$ beschrieben. f(t) gibt dabei das Gewicht des Hefepilzes (in mg) zur Zeit t (in Stunden) an.

a) Berechnen Sie, wann der Hefepilz laut Modell ein Gewicht von 1000 mg erreichen wird.

b) Bestimmen Sie die ungefähre Wachstumsgeschwindigkeit der Pilzkultur zu dem in Teilaufgabe a) ermittelten Zeitpunkt.

Lösung

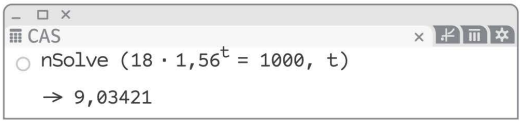
a) *ohne MMS*

$18 \cdot 1{,}56^t = 1000 \quad | : 18$

$1{,}56^t = \frac{1000}{18} \quad | \log_{1{,}56}(\,)$

$t = \log_{1{,}56}\left(\frac{1000}{18}\right) \approx 9{,}03$

mit MMS



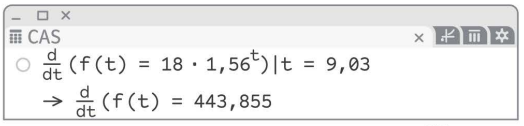
Laut Modell wird der Hefepilz nach ca. 9 Stunden ein Gewicht von 1000 mg erreichen.

b) *ohne MMS*

$f'(t) = 18 \cdot \ln(1{,}56) \cdot 1{,}56^t$

$f'(9{,}03) = 18 \cdot \ln(1{,}56) \cdot 1{,}56^{9{,}03} \approx 443{,}855$

mit MMS



Die Wachstumsgeschwindigkeit der Pilzkultur liegt zu diesem Zeitpunkt bei ca. $443{,}86 \frac{\text{mg}}{\text{h}}$.

Aufgaben

○ **1** Bestimmen Sie f'(x) und f''(x) sowie die Gleichung einer möglichen Stammfunktion der Funktion f.

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 0{,}5^x$ c) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ d) $f(x) = 5 \cdot 4^x$

e) $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x + e^x$ f) $f(x) = 2e^x - 3 \cdot 5^x$ g) $f(x) = 2 \cdot 0{,}1^x - e \cdot x$ h) $f(x) = x + 1 + 5^x$

○ **2** Bestimmen Sie mithilfe der Ableitungsfunktion f' die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt A.

a) $f(x) = 1{,}5^x$; $A(1|1{,}5)$ **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; $A(-1|4)$ **c)** $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$; $A(2|f(2))$

d) $f(x) = 4^x + x$; $A(0|f(0))$ **e)** $f(x) = e^{-2x} + 0{,}25^x$; $A(-1|f(-1))$ **f)** $f(x) = x^2 - 15^x$; $A(2|f(2))$

→ **Lerntipp** Seite 113, Beispiel 1a) und b)

○ **3** Bestimmen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall I eingeschlossen wird.

a) $f(x) = 3^x$; $I = [0; 1]$ **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $I = [-1; 3]$ **c)** $f(x) = 0{,}4 \cdot 2^x$; $I = [0; 2]$

→ **Lerntipp** Seite 113, Beispiel 1c)

○ **4** Die Funktion f beschreibt eine exponentielle Zu- bzw. Abnahme. Bestimmen Sie eine passende Funktionsgleichung sowohl in der Form $f(x) = c \cdot a^x$ als auch in der Form $f(x) = c \cdot e^{kx}$.

a) Der Anfangsbestand ist 15, der Wachstumsfaktor ist 1,03.

b) Der Anfangsbestand ist 200, zum Zeitpunkt $x = 2$ ist der Bestand 242.

c) Der Anfangsbestand ist 1000, er schrumpft wöchentlich um 10 %

d) Der Anfangsbestand ist 15, der Bestand vor 3 Wochen war 30.

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 450

○ **5** Bestimmen Sie mithilfe der Ableitungsfunktion f' die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P.

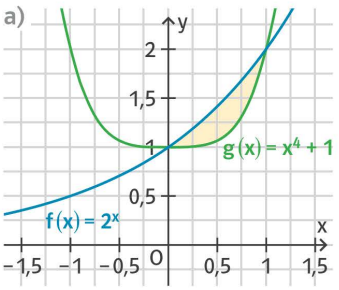
a) $f(x) = 2^x$; $P(1|f(1))$ **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $P(2|f(2))$ **c)** $f(x) = 3 \cdot 4^x$; $P(0|f(0))$

○ **6** Bestimmen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall I eingeschlossen wird.

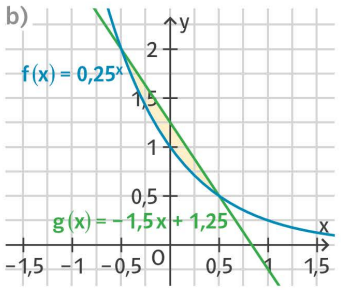
a) $f(x) = 2{,}5^x$; $I = [0; 2]$ **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; $I = [-1; 2]$ **c)** $f(x) = 2 \cdot 0{,}6^x$; $I = [0; 3]$

◒ **7** Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung.

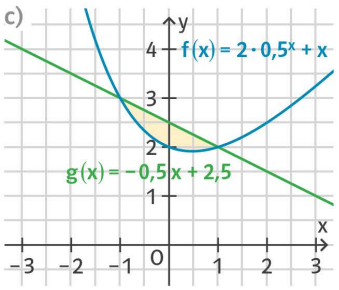
a)



b)



c)



◒ **8** Die Wachstumsgeschwindigkeit einer Fichte (in m pro Jahr) wird in einem Modell durch die Funktion f mit $f(t) = 0{,}9 \cdot 0{,}98^t$ beschrieben (t: die Zeit in Jahren nach Beobachtungsbeginn).

a) Bestimmen Sie die Halbwertszeit von f und erläutern Sie die Bedeutung dieses Wertes.

b) Berechnen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit nach 10 Jahren.

c) Ermitteln Sie, wann die Wachstumsgeschwindigkeit ca. 50 cm pro Jahr beträgt.

d) Zeigen Sie, dass F mit $F(t) = \frac{0{,}9}{\ln(0{,}98)} \cdot 0{,}98^t$ eine Stammfunktion von f ist.

e) Berechnen Sie $\int_0^{10} f(t)\,dt$. Erläutern Sie das Ergebnis im Sachkontext.

f) Die Fichte ist zu Beobachtungsbeginn 0,9 m hoch. Wenn Sie auf ca. 25 m Höhe angewachsen ist, ist davon auszugehen, dass ihr Baumstamm einen ausreichend großen Durchmesser hat, um sie zu ernten. Bestimmen Sie, nach wie vielen Jahren man die Fichte vermutlich ernten kann.

→ **Lerntipp** Seite 113, Beispiel 2

◒ **9** Ein Medikament wird einem Patienten per Tropfinfusion zugeführt. Dadurch verändert sich die Wirkstoffmenge des Medikaments im Körper des Patienten.
Die Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut soll durch die Funktion f mit $f(t) = 3 \cdot 0{,}961^t$, $t \geq 0$ (t in Minuten seit Verabreichung des Medikaments, $f(t)$ in $\frac{mg}{min}$) modelliert werden.

a) Berechnen Sie, wann die Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut laut Modell maximal ist.

b) Ermitteln Sie, wann sich die Wirkstoffmenge im Blut um weniger als $0{,}01\frac{mg}{min}$ ändern sollte.

c) Bestimmen Sie $\frac{1}{60}\int_0^{60} f(t)\,dt$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachkontext.

Zu Beginn der Verabreichungen ist die im Körper vorhandene Wirkstoffmenge des verabreichten Medikaments 0 mg.

d) Berechnen Sie die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten 3 Minuten nach Verabreichung.

e) Ermitteln Sie einen integralfreien Term, mit dem sich die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten zum Zeitpunkt t berechnen lässt.

f) Zeigen Sie, dass die Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut laut Modell stets abnimmt, die Wirkstoffmenge im Blut aber zunimmt.

SP g) Erläutern Sie, welche Annahmen bei der Modellierung getroffen wurden und nehmen Sie kritisch Stellung.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 451

◒ **10** Die Anzahl der Bakterien in einer Bakterienkultur wird in einem Modell für einen gewissen Zeitraum durch die Funktion f mit $f(t) = 800 \cdot 1{,}2^t$ beschrieben (t: Zeit in Stunden nach Beginn der Messung).

a) Bestimmen Sie mithilfe der Modellfunktion f die erwartete Anzahl der Bakterien drei Stunden nach bzw. drei Stunden vor Beginn der Messung.

b) Berechnen Sie, nach wie vielen Stunden sich die Bakterienkultur verdoppelt haben müsste.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.

d) Berechnen Sie $f'(0)$ sowie $f'(5)$ und erläutern Sie die Bedeutung dieser Werte im Sachkontext.

e) Bestimmen Sie näherungsweise den Zeitpunkt, ab dem die Bakterienkultur um mehr als 1000 Bakterien pro Stunde zunimmt.

● **11** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a^x - 1$ $(a > 1)$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f für jeden Wert von a durch den Koordinatenursprung verläuft.

b) Zeigen Sie, dass der Graph von f für jeden Wert von $a > 1$ monoton steigend und linksgekrümmt ist.

c) Berechnen Sie den Wert von a, für den $f(2) = 5$ ist.

d) Berechnen Sie den Wert für a, für den der Graph der Ableitungsfunktion f' die y-Achse im Punkt $S(0|3)$ schneidet.

e) Geben Sie den Wert für a an, für den f mit der Funktion g mit $g(x) = e^{2x} - 1$ übereinstimmt.

f) 💻 Berechnen Sie den Wert von a, für den die Normale im Punkt $P(1|f(1))$ die x-Achse im Punkt $Q(2|0)$ schneidet.

Grundwissen Test — Periodische Vorgänge beschreiben

→ **Grundwissen**, Seite 412
Lösungen, Seite 451

G **12** Die Position einer Gondel eines Riesenrads wird durch die Funktion f mit $f(t) = 25\sin(2t) + 25{,}5$ modelliert, wobei t die Zeit in Minuten nach dem Start und $f(t)$ die Höhe über dem Boden in Metern angibt.

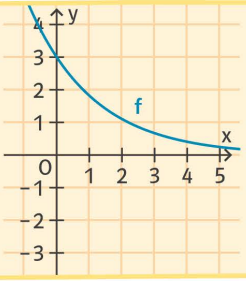
a) Bestimmen Sie die maximale Höhe, die die Gondel während ihrer Fahrt erreicht.

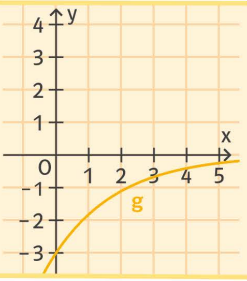
b) Ermitteln Sie die Dauer einer ganzen Drehung, sofern zwischenzeitlich nicht angehalten wird.

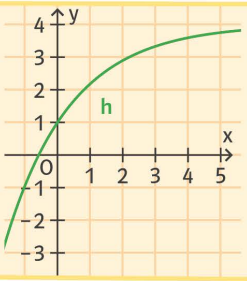
c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

5 Begrenztes Wachstum

Die Graphen der Funktionen g und h sind durch Transformationen aus dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot e^{-0,5x}$ entstanden. Stellen Sie eine Vermutung auf, welche Funktionsgleichungen g und h haben könnten. Überprüfen Sie Ihre Vermutung anschließend mithilfe eines MMS.







Wenn man transformierte Exponentialfunktionen betrachtet, nähert sich der Graph nicht immer der x-Achse an, sondern manchmal auch einer anderen Konstanten. Bei Modellierungen spricht man dann von begrenztem Wachstum mit einer Schranke.

Nimmt man z. B. aus einem Kühlschrank eine Wasserflasche heraus und lässt sie in einem Raum stehen, nähert sich die Temperatur des Wassers der Raumtemperatur an. In der folgenden Tabelle sind Messwerte eines solchen Versuchs bei einer Raumtemperatur von 20 °C dargestellt. Die Temperatur des Wassers wurde jeweils im Abstand von 5 Minuten gemessen.

t (Zeit in Minuten)	0	5	10	15	20	25
f(t) (Temperatur in °C)	4	9,3	12,8	15,2	16,8	17,8
d(t) (Differenz zu 20 °C)	16	10,7	7,2	4,8	3,2	2,2

Wenn man die Messwerte f(t) grafisch darstellt, so erkennt man, dass diese ansteigen und dass die Steigung immer kleiner wird (vgl. Fig. 1).
Stellt man auch die Differenz $d(t) = 20 - f(t)$ zwischen den Messwerten und der Raumtemperatur grafisch dar, so kann man vermuten, dass die Differenz exponentiell abnimmt (vgl. Fig. 2).

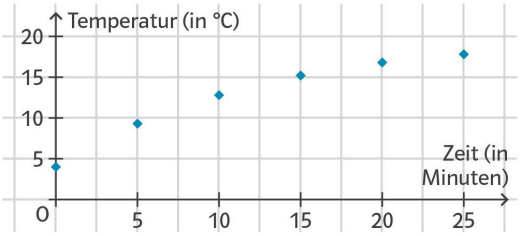


Fig. 1

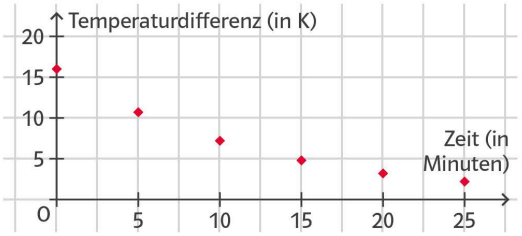


Fig. 2

Hinweis: Temperaturdifferenzen werden in Kelvin (K) angegeben.

Die Datenpunkte aus Fig. 2 können dann näherungsweise durch den Graphen einer Exponentialfunktion d mit $d(t) = c \cdot e^{-k \cdot t}$ $(k > 0)$ beschrieben werden.
Mit $P(0 \mid 16)$ folgt direkt $c = 16$.
k lässt sich z. B. durch Einsetzen der Koordinaten von $Q(25 \mid 2{,}2)$ in die Funktionsgleichung berechnen. Man erhält:

$$2{,}2 = 16 \cdot e^{-k \cdot 25} \quad | : 16$$

$$\frac{2{,}2}{16} = e^{-k \cdot 25} \quad | \ln( )$$

$$\ln\left(\frac{2{,}2}{16}\right) = -k \cdot 25 \quad | : (-25)$$

$$k = \frac{-1}{25} \cdot \ln\left(\frac{2{,}2}{16}\right) \approx 0{,}08, \text{ also ist } d(t) = 16 \cdot e^{-0{,}08t}.$$

Für die Temperatur des Wassers in °C nach t Minuten erhält man dann die Modellfunktion f mit $f(t) = 20 - 16 \cdot e^{-0{,}08t}$. Da sich die Funktionswerte immer mehr der Außentemperatur annähern, diese aber in dem Modell nicht erreichen, spricht man von **begrenztem Wachstum**. Die Raumtemperatur entspricht hier der **Schranke** $S = 20$.

Begrenztes Wachstum

Begrenztes Wachstum mit der **Schranke S** liegt vor, wenn die Differenz zwischen einer Schranke S und dem Bestand zum Zeitpunkt t exponentiell abnimmt.
Den Bestand zum Zeitpunkt t kann man mithilfe einer Funktion f mit einer Gleichung der Form $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ $(k > 0)$ beschreiben. Dabei ist $c = S - f(0)$.

Auch wenn sich der Bestand von oben einer Schranke S nähert, spricht man von begrenztem Wachstum.

Beispiel **Begrenztes Wachstum mithilfe von Wertepaaren modellieren**

Eine Zimmerpflanze ist mit Blattläusen besiedelt. Zu Beobachtungsbeginn sind bereits 100 Blattläuse vorzufinden. Nach 5 Wochen sind es schon 250.
Mit zunehmender Populationsgröße verschlechtern sich die Lebensbedingungen auf der Zimmerpflanze für die Blattläuse. In einem Modell wird daher angenommen, dass sich der Blattlausbestand nach den Prinzipien des begrenzten Wachstums entwickelt und maximal auf 500 Blattläuse ansteigt.

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Modellfunktion f, die das Wachstum beschreibt.
b) Berechnen Sie, wie viele Blattläuse die Zimmerpflanze laut Modell 10 Wochen nach Beobachtungsbeginn bevölkert haben.
c) Ermitteln Sie, wann der Bestand eine Zahl von 400 Blattläusen erstmals überschreitet.
d) Bestimmen Sie, wann die Wachstumsgeschwindigkeit 10 Blattläuse pro Woche beträgt.

Lösung

a) *Ansatz:* $f(t) = 500 - c \cdot e^{-kt}$

c mithilfe des 1. Wertepaares bestimmen: $f(0) = 500 - c \cdot e^{0} = 500 - c = 100$, also ist $c = 400$

k mithilfe des 2. Wertepaares bestimmen:

$$500 - 400 \cdot e^{-5k} = 250 \quad | -500$$

Lösung der Gleichung:

$$-400 \cdot e^{-5k} = -250 \quad | :(-400)$$

$$e^{-5k} = \frac{-250}{-400} = \frac{5}{8} \quad | \ln(\,)$$

$$-5k = \ln\left(\frac{5}{8}\right) \quad | :(-5)$$

$$k = \ln\left(\frac{5}{8}\right) :(-5) \approx 0{,}094$$

Gleichung *angeben:* $f(t) = 500 - 400 \cdot e^{-0{,}094t}$

b) $f(10) = 500 - 400 \cdot e^{-0{,}094 \cdot 10} \approx 343{,}75$
Nach 10 Wochen müsste die Zimmerpflanze von ca. 344 Blattläusen bevölkert sein.

c) *ohne MMS*

$$500 - 400 \cdot e^{-0{,}094t} = 400 \quad | -500$$

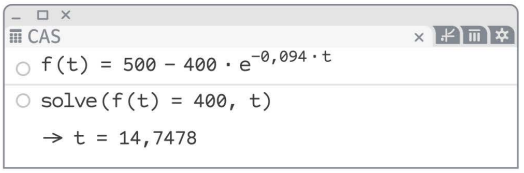
$$-400\, e^{-0{,}094t} = -100 \quad | :(-400)$$

$$e^{-0{,}094t} = 0{,}25 \quad | \ln(\,)$$

$$-0{,}094t = \ln(0{,}25) \quad | :(-0{,}094)$$

$$t = \frac{\ln(0{,}25)}{-0{,}094} \approx 14{,}75$$

mit MMS



Nach ca. 15 Wochen überschreitet der Bestand erstmals eine Zahl von 400 Blattläusen.

d) *ohne MMS*

$f'(t) = 0{,}094 \cdot 400 \cdot e^{-0{,}094t} = 37{,}6\, e^{-0{,}094t}$

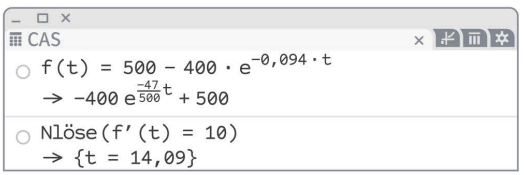
$$37{,}6\, e^{-0{,}094t} = 10 \quad | :37{,}6$$

$$e^{-0{,}094t} = \frac{10}{37{,}6} \quad | \ln(\,)$$

$$-0{,}094t = \ln\left(\frac{10}{37{,}6}\right) \quad | :(-0{,}094)$$

$$t = \ln\left(\frac{10}{37{,}6}\right) :(-0{,}094) \approx 14{,}09$$

mit MMS



Nach ca. 14 Wochen beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit 10 Blattläuse pro Woche.

D1 **MMS-Anleitung** Lösen von Gleichungen

Aufgaben

○ **1** Beschreiben Sie den Bestand mit begrenztem Wachstum durch eine Funktion f.
a) $S = 100;\ f(0) = 10;\ f(1) = 20$ **b)** $S = 100;\ f(0) = 0;\ f(1) = 10$ **c)** $S = 0;\ f(0) = 100;\ f(10) = 50$

Lerntipp
Seite 117, Beispiel a)

○ **2** Das Wachstum eines Bestands wird beschrieben durch die Funktion f, wobei t die Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Anzahl der Individuen beschreibt.
a) Geben Sie die Schranke S und den Anfangsbestand an. Skizzieren Sie den Graphen von f.
b) Berechnen Sie die Größe des Bestands nach zehn Tagen und vor einer Woche.
c) Bestimmen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit nach zehn Tagen.
(1) $f(t) = 50 - 30\,e^{-0{,}25\,t}$ (2) $f(t) = 50 - 50\,e^{-0{,}25\,t}$ (3) $f(t) = 10 + 50\,e^{-0{,}25\,t}$

○ **3** Begründen Sie, dass begrenztes Wachstum mit der Schranke $S = 60$ vorliegt.
a)

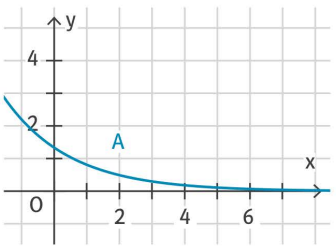
t	0	1	2	3	4	5	6
B(t)	10,0	35,00	47,50	53,75	56,88	58,44	59,22

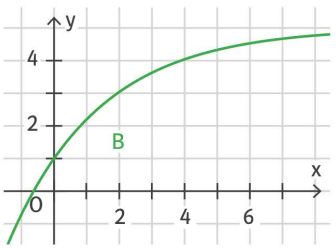
b)

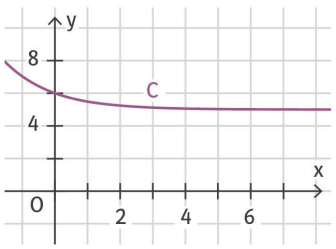
t	0	1	2	3	4	5	6
B(t)	90,0	75,00	67,50	63,75	61,88	60,94	60,47

○ **4** Ordnen Sie den Graphen A bis C die passende Funktionsgleichung zu. Begründen Sie.

$f(x) = 5 + e^{-0{,}7x}$ 1 $f(x) = \frac{4}{3} \cdot e^{-0{,}5x}$ 2 $f(x) = 5 - 4 \cdot e^{-0{,}35x}$ 3







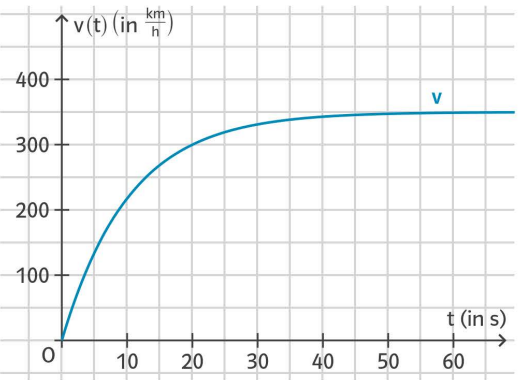
Test 1

Lösungen, Seite 451

○ **5** Ein Bestand wächst begrenzt. Er wird beschrieben durch die Funktion f, wobei t die Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Anzahl der Individuen beschreibt.
a) Geben Sie die Schranke S und den Anfangsbestand an. Skizzieren Sie den Graphen von f.
b) Berechnen Sie die Größe des Bestands nach einer Woche.
c) Bestimmen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit nach einer Woche.
(1) $f(t) = 200 - 150\,e^{-0{,}1\,t}$ (2) $f(t) = 130 - 130\,e^{-0{,}12\,t}$ (3) $f(t) = 70 + 50\,e^{-0{,}02\,t}$

◒ **6** SP Pia meint: „Bei der Funktion f mit $f(x) = -2\,e^{-0{,}1x}$ gibt es auch begrenztes Wachstum." Sami sagt: „Kann nicht sein, es gibt ja gar keine Schranke!" Beurteilen Sie die beiden Aussagen.

◒ **7** Der Graph zeigt modellhaft den Verlauf der Geschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ eines Rennwagens nach dem Start (t: Zeit (in s)).
a) Begründen Sie mithilfe des Graphen, dass begrenztes Wachstum vorliegen könnte. Geben Sie eine mögliche Schranke S an.
b) Ermitteln Sie einen Term für v(t).
c) Berechnen Sie mithilfe der Modellfunktion, wie lange der Rennwagen braucht, um eine Geschwindigkeit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu erreichen.
d) Ermitteln Sie, wie lange der Rennwagen nach dem Start für eine Strecke von 10 km benötigt.



8 Ein Glas Marmelade mit einer Temperatur von 8 °C wird aus dem Kühlschrank genommen und auf den Gartentisch gestellt, wo eine Außentemperatur von 30 °C herrscht. Nach 12 Minuten beträgt die Temperatur der Marmelade 15 °C.

Lerntipp Seite 117, Beispiel

a) Bei der Erwärmung wird von begrenztem Wachstum ausgegangen. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f, die die Temperatur der Marmelade nach t Minuten beschreibt.
b) Bestimmen Sie die Temperatur, die die Marmelade nach 5 Minuten ungefähr hat.
c) Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten die Marmelade eine Temperatur von 20 °C hat.
d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Marmelade sich um 0,5 °C pro Minute erwärmt.

Test 2

Lösungen, Seite 452

9 In einem Experiment wird davon ausgegangen, dass sich die Masse eines Bestands (in mg) mit einem Modell für begrenztes Wachstum mit der Schranke $S = 800$ beschreiben lässt.

t (in Tagen)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(t) (in mg)	320	397	461	516	561	599	631	658	681	700	716

a) Überprüfen Sie dies mithilfe der Daten aus der Tabelle und stellen Sie die Gleichung einer Funktion f auf, die die Entwicklung der Masse des Bestands in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) beschreibt.
b) Bestimmen Sie näherungsweise einen Wert für t so, dass $f(t) - f(t-1) = 2$ gilt. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

10 **Wahr oder falsch?**
Ein Gegenstand sinkt in einen See. Die Sinkgeschwindigkeit wird näherungsweise durch die Funktion v mit $v(t) = 2{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}1t})$ beschrieben (t in Sekunden seit Beobachtungsbeginn, $v(t)$ in $\frac{m}{s}$). Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.
a) Die Sinkgeschwindigkeit ist dem Modell zufolge immer positiv.
b) Die maximale Sinkgeschwindigkeit wird zu Beobachtungsbeginn erreicht.
c) Der Gegenstand erreicht den Boden des Sees laut Modell nie.
d) Die Sinkgeschwindigkeit ist stets kleiner als $2{,}5\,\frac{m}{s}$.
e) Die Sinkgeschwindigkeit verdoppelt sich jeweils innerhalb von 0,9 Sekunden.

11 Die Tabelle zeigt Messwerte zum Größenwachstum von Weizenpflanzen.

Tag	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Höhe (in cm)	0,5	0,9	1,5	1,7	2,4	4,6	5,2	8,8	10,6	11,7	15,7	16,7	18,3	19,9	20,4	20,4	20,4

a) Stellen Sie die Messwerte grafisch dar und begründen Sie, warum weder exponentielles noch beschränktes Wachstum vorliegt, wenn man die Gesamtheit der Daten betrachtet.
b) Tahmina behauptet, dass man sehr wohl die Daten durch exponentielles und durch beschränktes Wachstum beschreiben kann, wenn man sie in zwei Teile teilt. Erklären Sie, wie dies zu verstehen ist und wie man dabei vorgehen kann.
MK c) Die Messwerte können durch logistisches Wachstum modelliert werden. Recherchieren Sie, was man darunter versteht, und fassen Sie die wesentlichen Eigenschaften logistischen Wachstums zusammen. Bestimmen Sie mit einem MMS eine entsprechende Modellfunktion.

Grundwissen Test — Graphen trigonometrischer Funktionen skizzieren

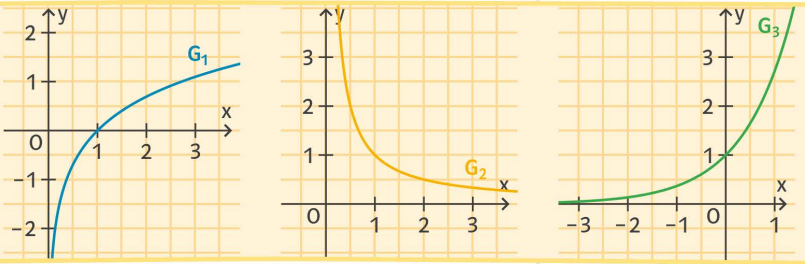
Grundwissen, Seite 412
Lösungen, Seite 452

G **12** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $[-5\pi; 5\pi]$.

a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(x) - 1$ b) $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin(2x)$ c) $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

6 Die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion

Abgebildet sind die Graphen G_1, G_2 und G_3 der Funktion f mit $f(x) = e^x$, ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}$ und der zugehörigen Ableitungsfunktion $\bar{f}'$.
Welcher Graph gehört zu welcher Funktion? Ordnen Sie zu und begründen Sie.

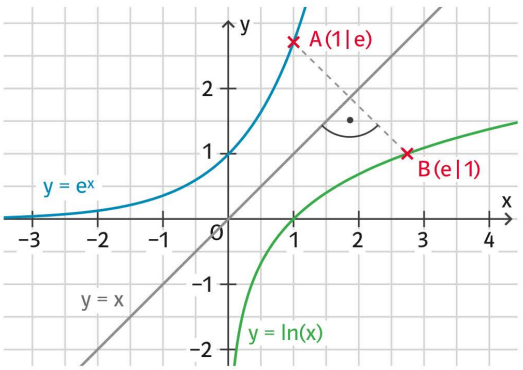


Am Beispiel der Funktionen f mit $f(x) = x^2$ und $\bar{f}$ mit $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \mathbb{R}^{\geq 0})$ wurde bereits grafisch gezeigt, dass es Funktionen gibt, die auf einem entsprechend eingeschränkten Intervall umkehrbar sind. Anhand der natürlichen Exponentialfunktion und der natürlichen Logarithmusfunktion wird im Folgenden untersucht, wie man die Funktionsgleichungen entsprechender Umkehrfunktionen nicht nur grafisch, sondern auch rechnerisch bildet.

Die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion

Gegeben ist die natürliche Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$. Diese ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend. Demnach gibt es zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$.
Die Funktion f ist also umkehrbar. Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion heißt **natürliche Logarithmusfunktion**.

Der Graph der natürlichen Logarithmusfunktion $\bar{f}$ mit $\bar{f}(x) = \ln(x)$ entsteht aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden mit der Gleichung $y = x$.



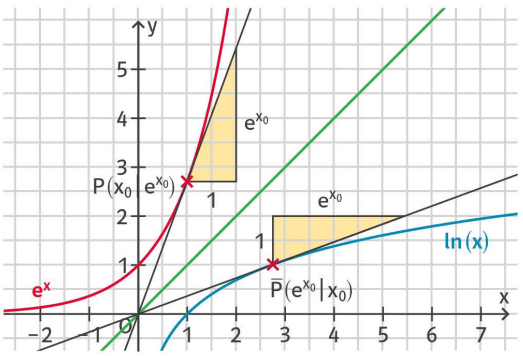
Für die Definitionsmenge und die Wertemenge der natürlichen Logarithmusfunktion $\bar{f}$ gilt:
$D_{\bar{f}} = W_f = \mathbb{R}^+$ und $W_{\bar{f}} = D_f = \mathbb{R}$
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\ln(e^x) = x$ und
für $x > 0$ gilt $e^{\ln(x)} = x$.

Da $e^0 = 1$, folgt $\ln(1) = 0$.

Für $x \to 0$ strebt $\ln(x)$ gegen $-\infty$ und für $x \to +\infty$ strebt $\ln(x)$ gegen $+\infty$.

Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion

Aus der Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion f kann man auf die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion $\bar{f}$ schließen.
Hierzu betrachtet man den Punkt $P(x_0 | e^{x_0})$ auf dem Graphen von f und den Punkt $\bar{P}(e^{x_0} | x_0)$ auf dem Graphen von $\bar{f}$.
Es gilt $f'(x_0) = e^{x_0}$. Die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P beträgt also $m = e^{x_0}$.



Da der Graph der Umkehrfunktion $\bar{f}$ aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ hervorgeht, entsteht auch das eingezeichnete Steigungsdreieck an den Graphen von $\bar{f}$ durch Spiegelung des entsprechenden Steigungsdreiecks an den Graphen von f an der Winkelhalbierenden.
Die Tangente an den Graphen von $\bar{f}$ im Punkt $\bar{P}$ hat daher die Steigung $\bar{m} = \frac{1}{e^{x_0}}$. Es gilt also $\bar{f}'(e^{x_0}) = \frac{1}{e^{x_0}}$. Da e^{x_0} alle positiven Zahlen durchläuft, erhält man $\bar{f}'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$.

Rechnerische Bestimmung einer Umkehrfunktion

Man kann die Gleichung einer Umkehrfunktion nicht nur grafisch, sondern auch rechnerisch bestimmen. Man kann folgendermaßen vorgehen:

1. *$y = f(x)$ setzen:* $y = e^x$
2. *Gleichung nach x auflösen:* $\ln(y) = x$
3. *x und y vertauschen:* $\ln(x) = y$
4. *Funktionsgleichung von $\bar{f}$ notieren:* $\bar{f}(x) = \ln(x)$

D1 MMS-Anleitung
Bestimmung der Umkehrfunktion

Die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ ist die **natürliche Logarithmusfunktion** g mit $g(x) = \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Ihre Ableitung ist g' mit $g'(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Für $x > 0$ gilt auch, dass G mit $G(x) = \ln(x)$ eine Stammfunktion von g mit $g(x) = \frac{1}{x}$ ist.

Beispiel 1 **Ableitungsfunktion der natürlichen Logarithmusfunktion bilden**

Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f' der Funktion f.

a) $f(x) = 4x + \ln(x)$ b) $f(x) = 6\ln(x)$

Lösung

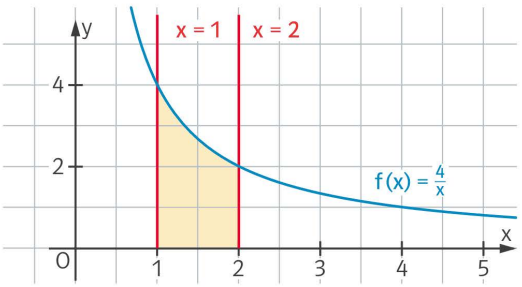
a) $f'(x) = 4 + \frac{1}{x}$ b) $f'(x) = 6 \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x}$

Beispiel 2 **Integrale berechnen**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x}$.
Der Graph von f schließt mit der x-Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = a$ eine Fläche mit dem Inhalt $A(a)$ ein.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt $A(a)$ mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung für $a = 2$.

b) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt für $a \to +\infty$ nicht endlich ist.



Lösung

a) $A(2) = \int_1^2 \frac{4}{x}dx = 4 \cdot \int_1^2 \frac{1}{x}dx = 4 \cdot [\ln(x)]_1^2 = 4 \cdot (\ln(2) - \ln(1)) = 4 \cdot \ln(2) \approx 2{,}77$

b) $A(a) = \int_1^a \frac{4}{x}dx = 4 \cdot \int_1^a \frac{1}{x}dx = 4 \cdot [\ln(x)]_1^a = 4 \cdot (\ln(a) - \ln(1)) = 4 \cdot \ln(a)$

Für $a \to +\infty$ strebt der Term $4 \cdot \ln(a)$ gegen $+\infty$, denn die Werte des natürlichen Logarithmus werden für $x \to +\infty$ beliebig groß.

Beispiel 3 **Gleichung einer Umkehrfunktion bestimmen**

Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ umkehrbar. Bestimmen Sie die Gleichung der Umkehrfunktion $\bar{f}$.

a) $f(x) = e^{x+2} + 2$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$

Lösung

	a)		b)	
1. *$y = f(x)$ setzen:*	$y = e^{x+2} + 2$	$\mid -2$	$y = \frac{1}{2}x + 5$	$\mid -5$
2. Gleichung *umformen und nach x auflösen:*	$y - 2 = e^{x+2}$	$\mid \ln(\,)$	$y - 5 = \frac{1}{2}x$	$\mid \cdot 2$
	$\ln(y - 2) = x + 2$	$\mid -2$	$2(y - 5) = x$	
	$\ln(y - 2) - 2 = x$			
3. *x und y vertauschen:*	$\ln(x - 2) - 2 = y$		$2(x - 5) = y$	
4. *Funktionsgleichung von $\bar{f}$ notieren:*	$\bar{f}(x) = \ln(x - 2) - 2$		$\bar{f}(x) = 2(x - 5)$	

Aufgaben

○ **1** Ordnen Sie jeder Funktionsgleichung die Gleichung der zugehörigen Umkehrfunktion zu.

A $f(x) = x + 3$ B $f(x) = \sqrt[3]{x}$ C $\bar{f}(x) = x^3$ D $\bar{f}(x) = x - 3$

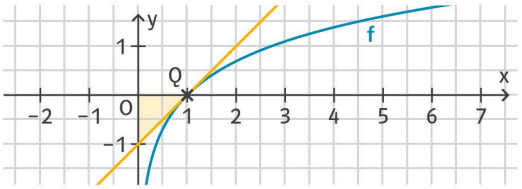
E $\bar{f}(x) = \ln(x)$ F $\bar{f}(x) = \frac{1}{x+3}$ G $f(x) = \frac{1}{x} - 3$ H $f(x) = e^x$

○ **2** Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.

a) $f(x) = \ln(x) + 2$ b) $f(x) = x^2 - \ln(x)$ c) $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$ d) $f(x) = 3\ln(x)$

Lerntipp Seite 121, Beispiel 1

○ **3** Gegeben ist die natürliche Logarithmusfunktion f mit $f(x) = \ln(x)$.
Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $Q(1|0)$ bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente sowie den Flächeninhalt des Dreiecks.



○ **4** Berechnen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall I eingeschlossen wird.

a) $f(x) = \frac{1}{3x} + x$; $I = [1; 3]$ b) $f(x) = \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}$; $I = [1; 2]$ c) $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{2x}$; $I = [1; 2]$

○ **5** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \ln(x)$.

a) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von f an.
b) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f.

Die Lösungen zur Aufgabe 5 können mit einem MMS überprüft werden.

Test 1

Lösungen, Seite 452

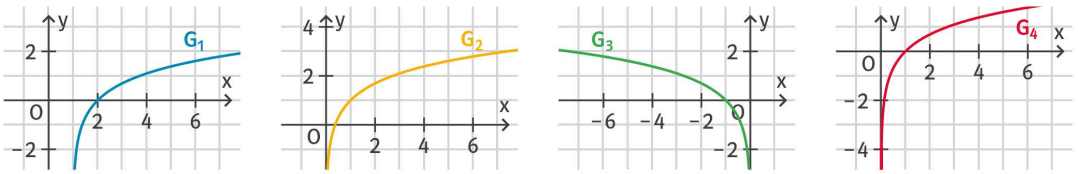
○ **6** Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.

a) $f(x) = \ln(x) - 3$ b) $f(x) = 2\ln(x)$ c) $f(x) = e^{3x} + \ln(x)$ d) $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{2x}$

◒ **7** a) Ordnen Sie jeder Funktionsgleichung den passenden Graphen G_1 bis G_4 zu. Begründen Sie.

Lerntipp Seite 121, Beispiel 3

$f(x) = \ln(x)$ $g(x) = \ln(-x)$ $h(x) = \ln(x) + 1$ $i(x) = \ln(x - 1)$



b) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der Funktionen f, g, h und i an.
c) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der zugehörigen Umkehrfunktion.

◒ **8** Gegeben ist die Funktion f mit
(1) $f(x) = e^{3x}$, (2) $f(x) = e^{-2x+1}$, (3) $f(x) = 4 \cdot e^{3x-2} + 1$.

a) Geben Sie jeweils die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f an.
b) Zeigen Sie jeweils, dass f umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion $\bar{f}$.

◒ **9** Die Funktion f ist auf der angegebenen Definitionsmenge umkehrbar. Bestimmen Sie eine Gleichung der Umkehrfunktion $\bar{f}$.

a) $f(x) = -2x + 3$
$D_f = \mathbb{R}$

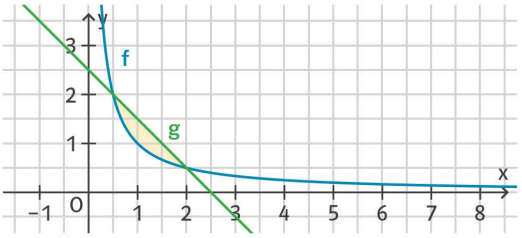
b) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot (x - 1)^2 + 3$
$D_f = [1; +\infty[$

c) $f(x) = \frac{2}{x} + 3$
$D_f = \mathbb{R}^+$

10 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = -x + 2{,}5$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g.

b) Die Graphen von f und g schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt.



11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x} - 2$.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

b) Der Graph von f schließt mit der x-Achse und der Geraden $x = a$ $(a > 1)$ eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche für $a = 3$ und zeigen Sie, dass der Flächeninhalt für $a \to +\infty$ nicht endlich ist.

→ **Lerntipp** Seite 121, Beispiel 2

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 452

12 **Wahr oder falsch?**

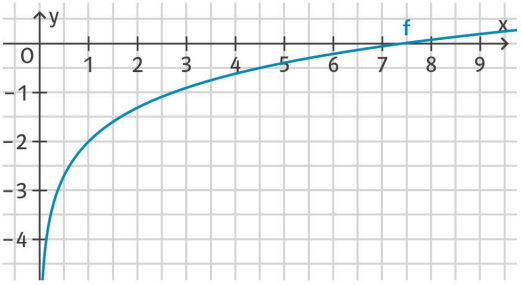
Abgebildet ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = \ln(x) - 2$. Es gilt $D_f = \mathbb{R}^+$.

Beurteilen Sie, ob die Aussage über die zugehörige Umkehrfunktion $\bar{f}$ wahr oder falsch ist.

a) $\bar{f}(x) \neq 0$

b) $\bar{f}'(x) < 0$

c) $\bar{f}''(x) > 0$



13 Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = ax + \frac{1}{ax}$ $(a > 0,\ x \neq 0)$.

a) Untersuchen Sie das Grenzverhalten von f_a für $x \to 0$ und für $x \to +\infty$.

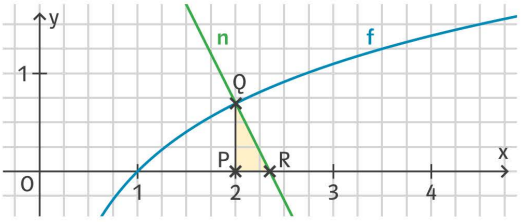
b) Skizzieren Sie den Graphen von f_1.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt, der vom Graphen von f_1 im Intervall $[1; 2]$ mit der x-Achse eingeschlossen wird. Ermitteln Sie, für welchen Wert von a der Flächeninhalt minimal wird.

14 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \ln(x)$. Der Punkt $P(a\,|\,0)$ mit $a > 1$ liegt auf der x-Achse, der Punkt $Q(a\,|\,\ln(a))$ liegt darüber auf dem Graphen von f. Die Normale n im Punkt Q schneidet die x-Achse im Punkt R.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Normale der Funktion f im Punkt Q sowie die Koordinaten des Punktes R.

b) Bestimmen Sie a so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks PRQ extremal wird. Geben Sie an, welche Art von Extremum vorliegt.



Grundwissen Test — Periodische Vorgänge beschreiben

→ **Grundwissen**, Seite 412
Lösungen, Seite 452

G **15** Die durchschnittliche Tageslänge an einem Ort wird in Modellen oft durch Funktionen mit Gleichungen der Form $L(t) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ beschrieben, wobei $L(t)$ die Tageslänge in Stunden und t die Anzahl der Tage seit dem 1. Januar angibt.

In Düsseldorf treten die Extrema der Tageslängen am 21. Juni mit ca. 16,5 Stunden und am 21. Dezember mit ca. 8 Stunden auf.

Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung, die die Tageslänge in Düsseldorf in Abhängigkeit von t modelliert.

Wiederholung: Exponentialfunktionen

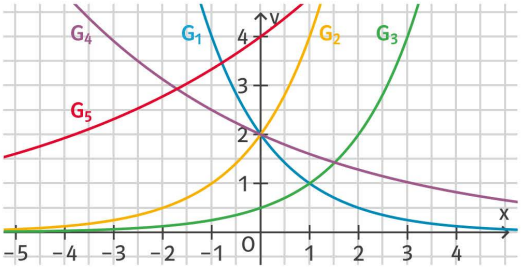
→ Lösungen, Seite 452

1 Der Graph der Funktion f verläuft durch den Punkt P. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate.

a) $f(x) = 3^x$; $P(3 \mid y)$ **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $P(x \mid 16)$ **c)** $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$; $P\left(x \mid \frac{1}{32}\right)$

2 Ordnen Sie jedem Funktionsgraphen die passende Funktionsgleichung zu.

$f(x) = 2 \cdot 0{,}8^x$ $g(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$ $h(x) = 4 \cdot 1{,}2^x$ $k(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$ $i(x) = 2 \cdot 2^x$



Die natürliche Exponentialfunktion

3 Lösen Sie die Gleichung. Geben Sie die Lösung mithilfe des natürlichen Logarithmus an und bestimmen Sie einen Näherungswert für die Lösung x. Runden Sie auf drei Nachkommastellen.

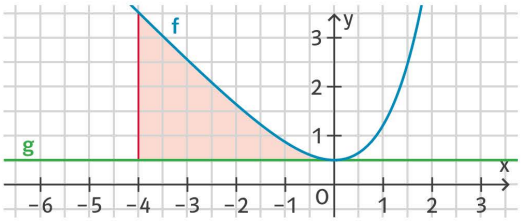
a) $e^x = 20$ **b)** $2e^x = 5$ **c)** $0{,}5e^x = 8$

d) $3e^x = 18{,}2$ **e)** $\frac{1}{4}e^x = 3{,}7$ **f)** $4e^x = 4$

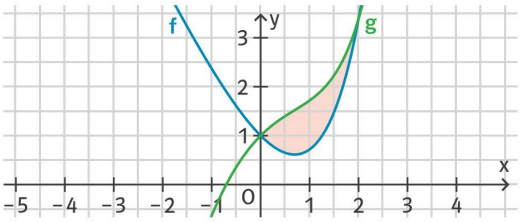
4 Gegeben ist die natürliche Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$. Bestimmen Sie die Stelle x, an der die Steigung des Graphen von f den Wert 10 annimmt.

5 Gegeben sind die Funktionen f und g und ihre Graphen. Bestimmen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der markierten Fläche.

a) $f(x) = e^x - x - 0{,}5$; $g(x) = 0{,}5$



b) $f(x) = e^x - 2x$; $g(x) = e^x - x^2$



Transformierte Exponentialfunktionen untersuchen

6 Bestimmen Sie f'(x) und die Gleichungen von zwei möglichen Stammfunktionen.

a) $f(x) = -3e^x$ **b)** $f(x) = 2e^{0{,}5x+3}$ **c)** $f(x) = \frac{3}{2}e^{x+3} - x$ **d)** $f(x) = 4e^{-2x}$

7 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{0{,}5x} - x$.

a) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungsfunktionen und zeigen Sie, dass der Graph von f einen Tiefpunkt hat. Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f keine Wendepunkte hat.

8 Bestimmen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall I eingeschlossen wird.

a) $f(x) = e^{2x}$; $I = [0; 2]$ **b)** $f(x) = e^{-0{,}5x}$; $I = [-2; 0]$ **c)** $f(x) = e^{3x+1}$; $I = [-1; 3]$

Ableitung beliebiger Exponentialfunktionen

9 Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungsfunktionen der Funktion f.

a) $f(x) = 5^x$ **b)** $f(x) = 3 \cdot 1{,}2^x$ **c)** $f(x) = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

D10 Check-out

→ **Lösungen**, Seite 453

10 Bestimmen Sie die Gleichung einer Stammfunktion von f und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall I eingeschlossen wird.

a) $f(x) = 4^x$; $I = [0; 3]$ **b)** $f(x) = 0{,}25^x$; $I = [-1; 2]$ **c)** $f(x) = 3 \cdot 2{,}5^x$; $I = [-5; 0]$

11 Die Funktion f beschreibt exponentielles Wachstum. Bestimmen Sie eine passende Funktionsgleichung sowohl in der Form $f(x) = c \cdot a^x$ als auch $f(x) = c \cdot e^{kx}$.

a) Der Anfangsbestand ist 300, der Wachstumsfaktor ist 1,4.
b) Der Anfangsbestand ist 4000, nach 6 Wochen sind es 512.
c) Der Anfangsbestand ist 40, der Bestand vor 3 Wochen war 120.

Begrenztes Wachstum

12 Ein Bestand wächst begrenzt. Sein Wachstum nach t Tagen wird beschrieben durch die Funktion f.

a) Geben Sie die Schranke S und den Anfangsbestand an. Skizzieren Sie den Graphen von f.
b) Berechnen Sie den Bestand nach 5 Tagen.
c) Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt t der Bestand 10 beträgt.
d) Ermitteln Sie die Wachstumsgeschwindigkeit nach 2 Tagen.

(1) $f(t) = 5 + 7e^{-t}$ (2) $f(t) = 12 - 4e^{-2t}$ (3) $f(t) = 9 + 3e^{-0{,}03t}$

13 Eine Firma bringt ein neues Waschmittel auf den Markt. Die Marketingabteilung schätzt, dass die Firma damit einen Marktanteil von 30 % erreichen kann. Schon nach einem Monat steigt der Marktanteil von 0 auf 10 %.

a) Die Marketingabteilung geht von begrenztem Wachstum aus. Stellen Sie die Gleichung einer passenden Modellfunktion auf, die den Marktanteil des Waschmittels (in %) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Monaten) beschreibt.
b) Eine Mitarbeiterin behauptet, dass der Marktanteil des Waschmittels nach einem halben Jahr bereits über 25 % liegen müsste. Überprüfen Sie, ob Sie recht hat.
c) Bestimmen Sie $f'(6)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion

14 Gegeben ist die natürliche Logarithmusfunktion f mit $f(x) = \ln(x)$.

a) Bestimmen Sie die Stelle x, für die f den Funktionswert 10 hat.
b) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 2$.
c) Ermitteln Sie die Stelle x, an der die Steigung der Tangente an den Graphen von f den Wert 0,01 hat.

15 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4\ln(x)$.

a) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von f an.
b) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist, und bestimmen Sie eine Gleichung der Umkehrfunktion $\bar{f}$.
c) Zeigen Sie, dass der Graph von f rechtsgekrümmt ist.
d) Begründen Sie mithilfe der Umkehrfunktion $\bar{f}$ und einer Skizze:
(1) Für $x \to 0$ nähert sich der Graph von f der y-Achse an.
(2) Für $x \to +\infty$ strebt $\ln(x)$ gegen $+\infty$.

16 Gegeben ist die Funktion f.

A $f(x) = e^{4x} - 1$ B $f(x) = e^{0{,}5x + 1}$ C $f(x) = e^{-2x + 3}$

a) Geben Sie jeweils die Definitions- und Wertemenge der Funktion f an.
b) Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und bestimmen Sie eine Funktionsgleichung der Umkehrfunktion $\bar{f}$. Geben Sie auch die Definitions- und Wertemenge von $\bar{f}$ an.

Weiterführende Aufgaben

Lösungen, Seite 456

17 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 - e^{-x+3}$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Extremstellen besitzt.

c) Begründen Sie, dass der Graph von f stets rechtsgekrümmt ist.

d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

e) Die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 3$ schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Bestimmen Sie das Volumen, das entsteht, wenn das Dreieck um die x-Achse rotiert.

18 **Wahr oder falsch?**

Gegeben ist die Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^{-2x} - 1$. Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

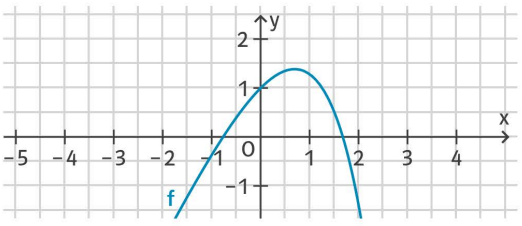
a) Der Graph von f schneidet die x-Achse nicht.

b) Der Graph von f' ist monoton steigend.

c) Der Graph von f' schneidet die x-Achse nicht.

d) Der Graph von f' ist linksgekrümmt.

19 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -e^x + 2x + 2$.



a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

b) Der Graph von f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Bestimmen Sie ihren Flächeninhalt.

c) Ermitteln Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von f rechnerisch.

d) Der Extrempunkt sowie die Schnittpunkte mit der x-Achse bilden die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. Ermitteln Sie, um wie viel Prozent kleiner diese Fläche im Vergleich zur Fläche aus Teilaufgabe b) ist.

20 In einem Experiment wird die Entwicklung eines Krötenbestands in einem Biotop untersucht. In den ersten sechs Jahren $(0 \leq t \leq 6)$ wird von einem exponentiellen Wachstum des Bestands ausgegangen.

a) Die Funktion f mit $f(t) = 200 \cdot e^{0{,}07t}$ soll die Anzahl der Kröten in Abhängigkeit von der Zeit (in Jahren nach Beobachtungsbeginn) modellieren. Erläutern Sie die Funktionsgleichung im Sachkontext.

b) Bestimmen Sie, um wie viel Prozent der Krötenbestand laut Modell jährlich wächst.

c) Berechnen Sie, wie viele Kröten nach 3 Jahren laut Modell in etwa im Biotop leben.

d) Ermitteln Sie, nach wie vielen Jahren mit über 280 Kröten im Biotop zu rechnen ist.

e) Berechnen Sie die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit des Krötenbestands in den ersten drei Jahren.

f) Bestimmen Sie $f'(3)$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang und vergleichen Sie es mit Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe e).

Beobachtungen zeigen, dass sich die Wachstumsbedingungen des Krötenbestands mit zunehmender Krötenanzahl im Biotop verändern. Zur Modellierung der Krötenanzahl wird für $t \geq 6$ die Funktion $g(t) = 600 - 455\,e^{-0{,}072t}$ verwendet.

g) Zeigen Sie: $f(6) \approx g(6)$ und $f'(6) \approx g'(6)$.
Erläutern Sie die Notwendigkeit dieser Beziehungen innermathematisch und im Sachkontext.

h) Begründen Sie, dass für $t \geq 6$ von einem begrenzten Wachstum ausgegangen wird, und geben Sie die maximal erwartete Krötenanzahl an.

Lösungen, Seite 457

21 Die durchschnittliche Länge eines dunklen Tigerpythons (in m) wird mithilfe einer Modellfunktion l mit $l(t) = 3{,}5 - 3{,}1 \cdot e^{-kt}$ beschrieben, wobei t die Zeit in Monaten nach dem Schlüpfen aus dem Ei angibt. Die Wachstumskonstante k hängt von den Lebensbedingungen der Schlange ab.

a) Berechnen Sie die erwartete Länge eines Tigerpythons beim Schlüpfen.

b) Geben Sie an, wie groß ein ausgewachsener Tigerpython laut Modell maximal wird.

Mareikes Schlange ist nach 16 Monaten 125 cm lang.

c) Bestimmen Sie einen Wert für k.

d) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem Mareikes Schlange 3 m lang sein müsste.

e) Zeigen Sie, dass die Funktion l umkehrbar ist. Erläutern Sie, was man im Sachzusammenhang mit der Umkehrfunktion berechnen kann.

f) Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Fragestellung zur Gleichung $l(t + 2) - l(t) = 0{,}03$.

g) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Umkehrfunktion $\bar{l}$ und beschreiben Sie die Fragestellung aus Teilaufgabe f) mit $\bar{l}$.

22 Die Funktion f mit $f(t) = 8 - 8e^{-0{,}5t}$ beschreibt modellhaft die Durchflussgeschwindigkeit in Litern pro Sekunde beim Betanken eines Wassertanks (t in Sekunden ab Beginn des Füllprozesses).

a) Bestimmen Sie, nach wie vielen Sekunden die Durchflussgeschwindigkeit $4\,\frac{l}{s}$ beträgt.

b) Begründen Sie, dass die Durchflussgeschwindigkeit während des Tankprozesses monoton zunimmt, laut Modell aber stets kleiner als $8\,\frac{l}{s}$ ist.

c) Ermitteln Sie, ab wann die Durchflussgeschwindigkeit um weniger als $0{,}1\,\frac{l}{s^2}$ zunimmt.

Zu Beginn des Füllprozesses befinden sich 500 Liter Wasser im Tank.

d) Zeigen Sie, dass F mit $F(t) = 16e^{-0{,}5t} + 8t$ eine Stammfunktion von f ist.

e) Geben Sie einen integralfreien Term an, mit dem man die Menge des Wassers im Tank zum Zeitpunkt t des Füllprozesses berechnen kann.

f) Berechnen Sie, wie lange es dauert, einen Tank mit 4800 l Fassungsvermögen zu füllen.

Ein anderer, gleich großer Tank wird konstant mit $8\,\frac{l}{s}$ betankt. Auch er hat eine anfängliche Füllmenge von 500 l.

g) Vergleichen Sie die beiden Füllprozesse und geben Sie an, welcher Tank schneller gefüllt ist.

23 Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = 0{,}5(tx - \ln(x))$, $x \in \mathbb{R}^+$.

a) Bestimmen Sie den Tiefpunkt der Graphen von f_t.

Ermitteln Sie rechnerisch, für welchen Wert von t der Tiefpunkt des Graphen von f_t

(1) auf der Geraden mit der Gleichung $y = 1$ liegt,

(2) auf der x-Achse liegt.

b) Untersuchen Sie, ob es Graphen von f_t gibt, die einen Wendepunkt haben.

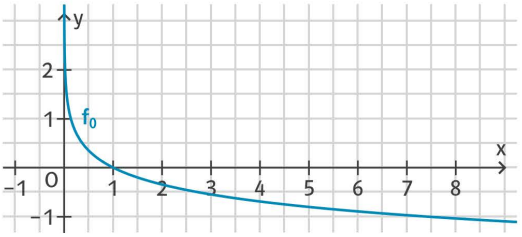
c) Zeigen Sie: Für $t = 0$ hat der Graph von f_0 genau eine Nullstelle.

d) Rechts ist der Graph von f_0 dargestellt.

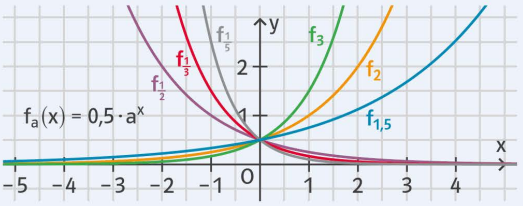
Zeigen Sie rechnerisch, dass

$$\lim_{a \to 0}\left(\int_a^1 f_0(x)\,dx\right) = 0{,}5 \text{ gilt.}$$

Verwenden Sie, dass G mit $G(x) = x - x \cdot \ln(x)$ eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = -\ln(x)$ ist.



Exponentielles Wachstum
Eine Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$ heißt Exponentialfunktion.
Der Faktor c entspricht dem Anfangsbestand $f(0)$ zum Zeitpunkt $x = 0$.
Für $a > 1$ handelt es sich um eine **exponentielle Zunahme**, für $0 < a < 1$ um eine **exponentielle Abnahme**.



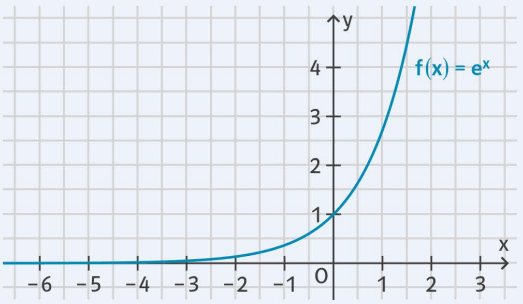
Die Lösung x einer **Exponentialgleichung** $a^x = b$ $(a, b > 0)$ bezeichnet man als **Logarithmus von b zur Basis a**.
Man schreibt $x = \log_a(b)$.

$2 \cdot 1{,}78^x = 100 \quad | : 50$
$1{,}78^x = 50 \quad | \log_{1{,}78}( )$
$x = \log_{1{,}78}(50) \approx 6{,}78$

Die natürliche Exponentialfunktion
Die natürliche Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ hat als Basis die **Euler'sche Zahl e**.
e ist eine irrationale Zahl und es gilt $e \approx 2{,}718\,28$.
Die Ableitungsfunktion von f ist f' mit $f'(x) = e^x = f(x)$.
F mit $F(x) = e^x$ ist eine Stammfunktion von f.
Für die Ableitungsfunktion f' einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^{kx+b}$ gilt $f'(x) = k \cdot e^{kx+b}$.

F mit $F(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{kx+b}$ ist eine Stammfunktion von f.

Graph der natürlichen Exponentialfunktion



Der natürliche Logarithmus
Für $a > 0$ ist die Lösung x der Exponentialgleichung $e^x = a$ der **natürliche Logarithmus** von a. Man schreibt $x = \ln(a)$.
Es gilt $e^{\ln(a)} = a$ und $\ln(e^c) = c$.
Für $a \leq 0$ ist der natürliche Logarithmus $\ln(a)$ nicht definiert.

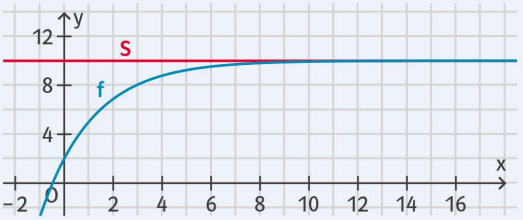
$e^{3x} = 5 \quad | \ln( )$
$3x = \ln(5) \quad | : 3$
$x = \frac{\ln(5)}{3} \approx 0{,}54$

Ableitung beliebiger Exponentialfunktionen
Exponentialfunktionen mit Gleichungen der Form $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ lassen sich mit der Basis e schreiben: $f(x) = a^x = e^{kx}$ mit $k = \ln(a)$.
Es gilt $f'(x) = \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = \ln(a) \cdot a^x$, und
F mit $F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot e^{\ln(a)x} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$ ist eine Stammfunktion von f.

$f(x) = 3^x = e^{\ln(3) \cdot x}$
$f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$
$F(x) = \frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^x$

Begrenztes Wachstum
Begrenztes Wachstum mit der **Schranke S** liegt vor, wenn die Differenz zwischen einer Schranke S und dem Bestand zum Zeitpunkt t exponentiell abnimmt.
Funktionsgleichung: $f(x) = S - c \cdot e^{-kx}$ $(k > 0)$
Es gilt $c = S - f(0)$.

Funktionsgleichung: $f(x) = 10 - 8 \cdot e^{-0{,}47x}$



Die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion
Die natürliche Logarithmusfunktion f mit $f(x) = \ln(x)$ ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.
Für ihre Ableitungsfunktion f' gilt $f'(x) = \frac{1}{x}$.
Entsprechend ist G mit $G(x) = \ln(x)$ eine Stammfunktion von g mit $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

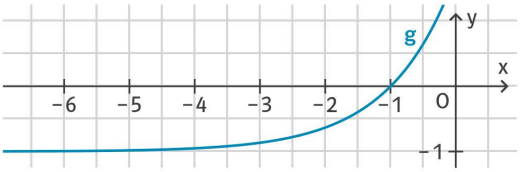
$f(x) = 2 \cdot \ln(x) + e^x$, *also ist* $f'(x) = \frac{2}{x} + e^x$.
$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

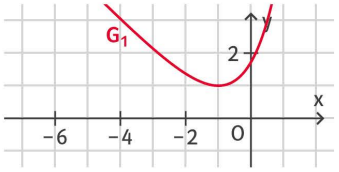
D11 Lösungen
Probeklausur
Kapitel III

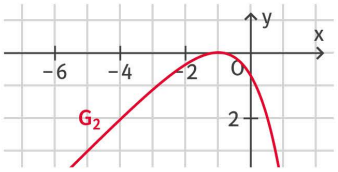
Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 1

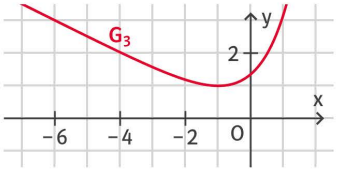
GK 30 min / LK 40 min

1 Gegeben ist der Graph der transformierten Exponentialfunktion g.
Begründen Sie, welcher der Graphen G_1, G_2 oder G_3 der Graph einer möglichen Stammfunktion der Funktion g ist.









2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$.

a) Bestimmen Sie den Funktionswert an den Stellen $x = 0$ sowie $x = 2$.

b) Schreiben Sie die Funktion f mit der Basis e.

c) Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = \frac{1}{2 \cdot \ln(2)} \cdot e^{\ln(2) \cdot x}$ eine Stammfunktion von f ist und berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

3 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 2e^{kx}$. Ihr Ableitungsgraph verläuft durch den Punkt $P(0\,|\,4)$.

a) Zeigen Sie, dass $k = 2$ gilt.

b) Begründen Sie, dass die Funktion g keine Nullstellen hat.

c) Bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 g(x)\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

d) Der Graph der Funktion g ist umkehrbar für $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Umkehrfunktion $\overline{g}$.

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 2

GK 30 min / LK 40 min

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

a) Geben Sie den Wertebereich von f an.

b) Zeigen Sie, dass f keine Nullstellen hat.

c) Begründen Sie, dass der Graph von f' stets unterhalb der x-Achse verläuft.

d) Bestimmen Sie eine mögliche Stammfunktion von f und berechnen Sie $\int_1^e f(x)\,dx$.

2 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = e^{-0{,}5x} + x$.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Ableitungsfunktionen g' und g'' der Funktion g und skizzieren Sie ihre Funktionsgraphen.

b) Zeigen Sie, dass der Graph von g einen Tiefpunkt hat, und berechnen sie seine Koordinaten.

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von g keine Wendepunkte hat.

3 **Wahr oder falsch?**
Die Abwassermenge (in Litern) in einem biologischen Klärbecken wird für $t \in [0; 120]$ durch die Funktion f mit $f(t) = 15\,000 - 11\,000 \cdot e^{-0{,}06t}$ modelliert, wobei t die Zeit in Minuten nach Beobachtungsbeginn beschreibt. Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Zu Beobachtungsbeginn sind 11 000 Liter Abwasser im Klärbecken.

b) Im betrachteten Zeitraum sind mindestens 4000 Liter Abwasser im Klärbecken vorhanden.

c) Die Füllgeschwindigkeit des Klärbeckens nimmt mit der Zeit zu.

d) Die maximale Füllgeschwindigkeit liegt bei $66\frac{\text{l}}{\text{min}}$.

e) Die Abwassermenge im Klärbecken ist stets kleiner als 15 000 Liter.

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 1

GK 90 min / LK 135 min

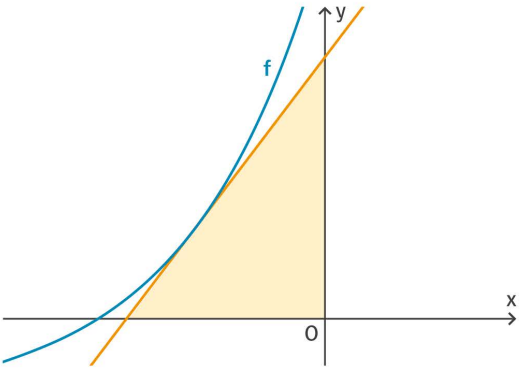
D11 Lösungen Probeklausur Kapitel III

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{8}{3} \cdot e^{0,5x+1} - \frac{4}{3}$.

a) Bestimmen Sie die Stelle x, an der die Funktion f den Wert 20 annimmt.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -2$ die Steigung $\frac{4}{3}$ hat.

c) Die Abbildung zeigt den Graphen von f mit dem Dreieck, das die Tangente an der Stelle $x = -2$ mit den Koordinatenachsen einschließt.



Zeigen Sie, dass der Umfang dieses Dreiecks viermal so groß wie seine kürzeste Seite ist.

2 In einem Experiment wird die Entwicklung einer Ameisenkolonie beobachtet. Die Anzahl der Ameisen wird für den Zeitraum $0 \le t \le 6$ modellhaft durch die Funktion f mit $f(t) = 2e^{kt}$ ($k > 0$, t in Jahren seit Beobachtungsbeginn, f(t) in 1000 Ameisen) beschrieben.

a) Geben Sie an, wie viele Ameisen die Kolonie zu Beobachtungsbeginn umfasst.

b) Bestimmen Sie den Wert von k auf zwei Nachkommastellen genau, wenn in der Kolonie nach 2 Jahren 5120 Ameisen leben.
[Kontrollergebnis: $k \approx 0,47$]

c) Ermitteln Sie, um wie viele Ameisen pro Jahr die Kolonie innerhalb der ersten drei Jahre durchschnittlich wächst.
[Kontrollergebnis: ca. 2064 Ameisen pro Jahr]

d) Berechnen Sie $f'(3)$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang und vergleichen Sie es mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe c).

e) Begründen Sie, warum die Funktion f nur für einen begrenzten Zeitraum zur Modellierung der Anzahl der Ameisen geeignet ist.

Während des Experiments wird festgestellt, dass sich die Wachstumsbedingungen der Ameisenkolonie über die Zeit verändert haben. Für $t \ge 6$ soll die Anzahl der Ameisen daher durch eine neue Funktion g mit $g(t) = 146 - 260 \cdot e^{-0,14t}$ näherungsweise beschrieben werden.

f) Zeigen Sie: $f(6) \approx g(6)$ und $f'(6) \approx g'(6)$.
Erläutern Sie die beiden Gleichungen im Sachkontext.

g) Begründen Sie anhand der Funktionsgleichung von g, dass für $t \ge 6$ von einem begrenzten Wachstum ausgegangen wird, und geben Sie die maximal erwartete Ameisenanzahl an.

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,5e^x$.

a) Begründen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist und ermitteln Sie die Gleichung einer Umkehrfunktion $\bar{f}$. Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von f und $\bar{f}$ an.
[Kontrollergebnis: $\bar{f}(x) = \ln(2x)$]

b) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente t_1 des Graphen von f im Punkt $P(0 \mid 0,5)$.

c) Der Punkt $\bar{P}$ entsteht durch Spiegelung von P an der Geraden $y = x$. S ist der Schnittpunkt der Tangente t_1 mit der x-Achse. Fertigen Sie eine Skizze an und bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $S\bar{P}P$.

d) Zeigen Sie, dass der Inhalt der Fläche, den der Graph der Funktion f im Intervall $[a; 0]$ für $a \to -\infty$ mit der x-Achse einschließt, endlich ist. Geben Sie den Flächeninhalt an.

e) Es gilt $b > 0$. Begründen Sie, dass $\lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^0 f(x)\,dx = \lim\limits_{b \to 0} \int\limits_b^{0,5} \bar{f}(x)\,dx = 0,5$ gilt.

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 2

GK 80 min / LK 120 min

D11 Lösungen
Probeklausur
Kapitel III

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$.

a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von f in der Form $f(x) = c \cdot e^{kx}$. Geben Sie k auf 3 Nachkommastellen genau an.

b) Bestimmen Sie die Stelle x, an der f den Funktionswert 20 annimmt.

c) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(2 \mid 4{,}5)$. [Kontrollergebnis: $t(x) = 1{,}82x + 0{,}86$]

d) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Tangente die x-Achse schneidet.

e) Der Graph der Funktion f, die Tangente aus Teilaufgabe c) und die y-Achse schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

f) Der Graph der Funktion $\bar{f}$ entsteht aus dem Graphen der Funktion f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden mit der Gleichung $y = x$. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung der Funktion $\bar{f}$.

2 Der größte Teil der natürlichen Radioaktivität beruht auf dem geruchlosen Edelgas Radon. Die Abbildung zeigt eine experimentell gemessene Zerfallskurve des Isotops Radon-220. Der radioaktive Zerfall von Radon kann als exponentielle Abnahme modelliert werden. Die Halbwertszeit beträgt 56 Sekunden.

a) Erläutern Sie die Aussage: $B(n) = 2^{-n}$ gibt den Anteil des nach n Halbwertszeiten noch vorhandenen Radons an.

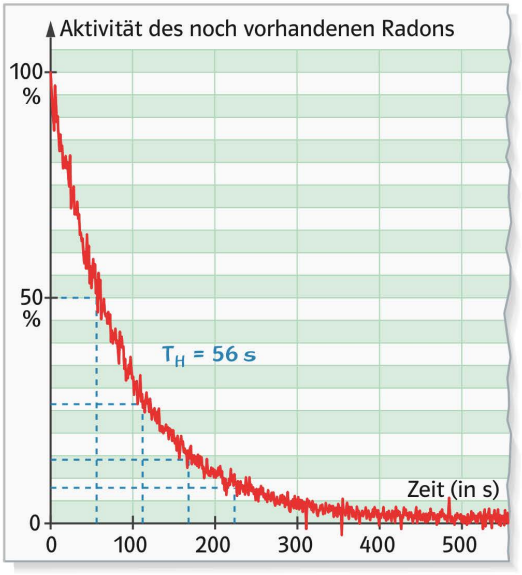
Gegeben ist die Funktion f mit $f(t) = 100 \cdot e^{-0{,}0124t}$.

b) Begründen Sie rechnerisch, dass f den exponentiellen Zerfall des Radons beschreibt, wobei t die Zeit in Sekunden und f(t) den prozentualen Anteil des noch vorhandenen Radons angibt.

c) Untersuchen Sie, wie viel Prozent des Edelgases nach 5 Minuten noch nicht zerfallen sind.

d) Berechnen Sie, nach welcher Zeit noch 1% des Anfangswerts vorhanden ist.

e) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der Radioaktivität f (in Prozent pro Sekunde) zu Beginn der Messung und nach einer Stunde. Vergleichen Sie.



3 Auf einem Weihnachtsmarkt beträgt die Temperatur einer frisch ausgeschenkten Tasse Kakao ca. 80 °C. Bei einer Umgebungstemperatur von ca. 5 °C wird die momentane Änderungsrate der Temperatur des Kakaos in $\frac{°C}{min}$ in einem Modell durch die Funktion f mit $f(t) = 3{,}75e^{-0{,}05t}$ mit $t > 0$ beschrieben, wobei t die Zeit in Minuten nach Ausschank angibt.

a) Bestimmen Sie f(5) und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

b) Begründen Sie, dass die Geschwindigkeit des Abkühlprozesses direkt nach dem Ausschank am größten ist und mit der Zeit abnimmt.

c) Bestimmen Sie die Gleichung einer möglichen Stammfunktion von f. Berechnen Sie $\int_0^{10} f(t)\,dt$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

d) Geben Sie die Gleichung einer Funktion G an, mit der man die Temperatur nach t Minuten berechnen kann. Skizzieren Sie den zugehörigen Graphen.

e) Begründen Sie, dass die Temperatur des Kakaos laut Modell nie den Wert der Umgebungstemperatur annehmen kann.

Differenzialgleichungen

In diesem Kapitel wurden die Charakteristika von exponentiellem sowie begrenztem Wachstum erarbeitet. Bei der Untersuchung entsprechender Wachstumsprozesse können Differenzialgleichungen ein sehr wichtiges mathematisches Hilfsmittel sein.

Definition von Differenzialgleichungen

Als **Differenzialgleichung** bezeichnet man eine Gleichung, die einen Zusammenhang zwischen einer Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f' beschreibt. Jede Funktion, die diese Gleichung erfüllt, nennt man **Lösung der Differenzialgleichung**.

Lösungen von Differenzialgleichungen sind keine Zahlen, sondern Funktionen.

Differenzialgleichungen bei exponentiellen oder begrenzten Wachstumsvorgängen

Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum wird durch Funktionen mit Gleichungen der Form $f(x) = c \cdot e^{kx}$ beschrieben.

Für die Ableitung f' gilt $f'(x) = k \cdot c \cdot e^{kx}$, also ist $f'(x) = k \cdot f(x)$.

Die Gleichung $\mathbf{f'(x) = k \cdot f(x)}$ ist eine Differenzialgleichung.

Sie beschreibt, dass die momentane Änderungsrate eines Bestands $f'(x)$ zu jedem Zeitpunkt x proportional zum Bestand $f(x)$ ist (vgl. Fig. 1).

Begrenztes Wachstum

Begrenztes Wachstum mit der Schranke S wird durch Funktionen mit Gleichungen der Form $f(x) = S - c \cdot e^{-kx}$ beschrieben.

Für die Ableitung f' gilt $f'(x) = k \cdot c \cdot e^{-kx}$.

Durch Umformung lässt sich begründen, dass $f'(x) = k \cdot (S - f(x))$ ist.

$k \cdot (S - f(x)) = k \cdot (S - (S - c \cdot e^{-kx})) = k \cdot c \cdot e^{-kx}$

Die Gleichung $\mathbf{f'(x) = k \cdot (S - f(x))}$ ist eine Differenzialgleichung.

Sie beschreibt, dass die momentane Änderungsrate eines Bestands $f'(x)$ zu jedem Zeitpunkt x proportional zu g mit $g(x) = S - f(x)$ ist (vgl. Fig. 2).

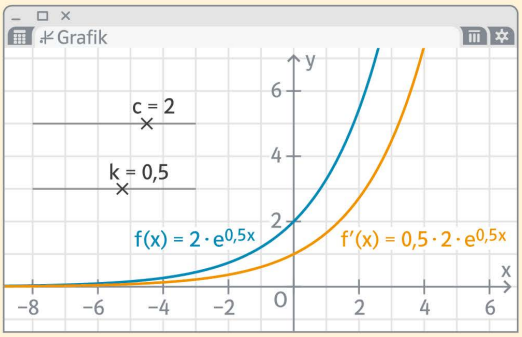


Fig. 1

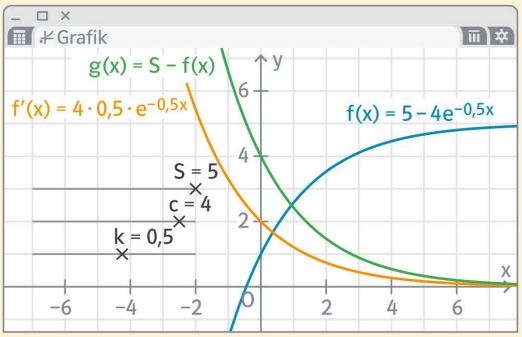


Fig. 2

1 Ordnen Sie jeder Differenzialgleichung eine passende Lösung zu.

$f'(x) = -0{,}1f(x)$ $\quad$ $f(x) = 10 - 5e^{-0{,}1x}$ $\quad$ $f'(x) = 0{,}1f(x)$

$f(x) = 10e^{0{,}1x}$ $\quad$ $f'(x) = 10 - 0{,}1f(x)$ $\quad$ $f(x) = 100 - 95e^{-0{,}1x}$

$f'(x) = 0{,}1(10 - f(x))$ $\quad$ $f(x) = 5e^{-0{,}1x}$

2 Bestimmen Sie den Wert von k.

a) $f'(x) = -f(x)$, $f(x) = 2e^{-kx}$

b) $f'(x) = 100 - f(x)$, $f(x) = 10e^{-kx} + 100$

c) $f'(x) = 1 - 0{,}2 \cdot f(x)$, $f(x) = -4e^{-kx} + 5$

Anfangswertprobleme lösen

Da in Differenzialgleichungen jeweils ein Parameter weniger vorkommt als in ihrer Lösung, kann man nur mithilfe einer zusätzlichen Bedingung eine eindeutige Lösung angeben.
Man betrachtet beispielsweise die Differenzialgleichung $f'(x) = 4 \cdot f(x)$ mit $f(0) = 2$.
Aus $f'(x) = 4 \cdot f(x)$ folgt $f(x) = c \cdot e^{4x}$. Mit $f(0) = 2$ erhält man dann $c = 2$. Die Lösung der Differenzialgleichung lautet also $f(x) = 2e^{4x}$.

Beim exponentiellen Wachstum ist $c = f(0)$, beim beschränkten Wachstum ist $c = S - f(0)$.

3 Geben Sie die Lösung der Differenzialgleichung an und zeichnen Sie den Graphen von f.

a) $f'(x) = 0{,}1 \cdot f(x)$ mit $f(0) = 1$
b) $f'(x) = -0{,}2f(x)$ mit $f(0) = 10$
c) $f'(x) = 0{,}1(5 - f(x))$ mit $f(0) = 0$
d) $f'(x) = 0{,}1(5 - f(x))$ mit $f(0) = 10$

4 Eine Population mit einem Anfangsbestand von 5000 wächst so an, dass ihre Wachstumsgeschwindigkeit proportional ist

I: zum Bestand,
II: zur Differenz zwischen einem Maximalwert $S = 100\,000$ und dem Bestand.

a) Beschreiben Sie, wie sich das Wachstum bei I und II unterscheidet. Nennen Sie Bedingungen für das Wachstum nach Gesetz I bzw. II.
b) Stellen Sie jeweils die zugehörige Differenzialgleichung auf und geben Sie die Lösung an. Bestimmen Sie die Parameter, falls die Population nach zehn Jahren auf 10 000 anwächst.

Differenzialgleichungen bei gleichzeitiger Zu- und Abnahme

Betrachtet man Kontexte, in denen sich die Änderung eines Bestands aus einem Zu- und einem Abnahmeprozess zusammensetzt, verwendet man bei der Modellierung Differenzialgleichungen.

5 Ein Behälter mit dem maximalen Fassungsvermögen von 100 Litern enthält anfangs 20 Liter einer chemischen Flüssigkeit. Es laufen pro Sekunde 5 Liter hinzu. Gleichzeitig beträgt die Ablaufgeschwindigkeit der Füllmenge $\left(\text{in } \frac{\text{l}}{\text{s}}\right)$ 10 % der vorhandenen Flüssigkeit.

a) Mithilfe der obigen Daten hat Mika eine Differenzialgleichung aufgestellt, die die Flüssigkeitsmenge in dem Behälter beschreiben soll.
Erläutern Sie, wie er vorgegangen ist.
Geben Sie an, um welche Art von Wachstum es sich handelt.

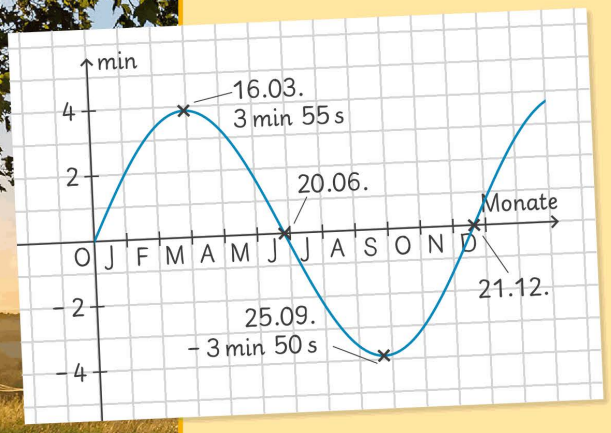
$f(t)$: Füllmenge (in l) zur Zeit t (in s)
Anfangswert: $f(0) = 20$
Differenzialgleichung: $f'(t) = 5 - 0{,}1 \cdot f(t)$
$= 0{,}1 \cdot (50 - f(t))$

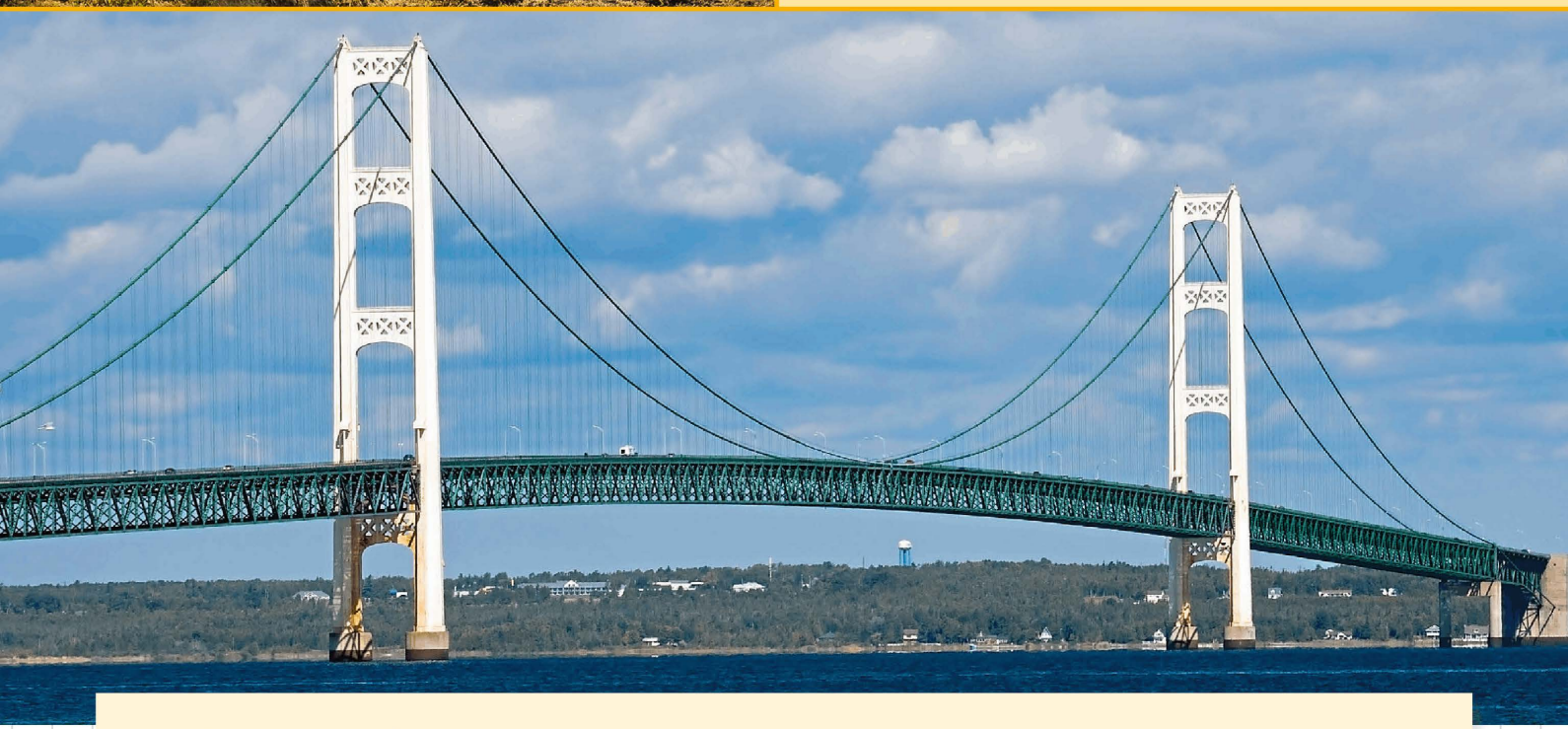
b) Geben Sie die Lösung der Differenzialgleichung an und beschreiben Sie, wie sich die Flüssigkeitsmenge mit der Zeit verändert.
c) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der Flüssigkeitsmenge bei einer Füllmenge von 45 Litern. Geben Sie auch den zugehörigen Zeitpunkt an.

6 Bei einer Tropfinfusion wird dem Blut eines Patienten ein Medikament zugeführt, das zu Beobachtungsbeginn noch nicht im Blut vorhanden ist. Pro Minute gelangt eine Menge von 3 mg ins Blut. Das Medikament wird von der Niere so abgebaut, dass die momentane Ausscheidungsrate $\left(\text{in } \frac{\text{mg}}{\text{min}}\right)$ 4 % des gerade vorhandenen Medikaments beträgt.

a) Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf, die die Menge des im Blut des Patienten vorhandenen Medikaments in Abhängigkeit von der Zeit (in min) beschreibt.
b) Geben Sie die Lösung der Differenzialgleichung an und beschreiben Sie, wie sich die Menge des Medikaments mit der Zeit verändert.
c) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate zu dem Zeitpunkt, an dem das Blut 50 mg des Medikaments enthält.

IV Weitere Funktionen





Das können Sie bald

- Sinus- und Kosinusfunktionen transformieren und ableiten
- die Produktregel anwenden
- die Kettenregel anwenden
- zusammengesetzte Funktionen untersuchen

Check-in

Schätzen Sie sich ein:

	☺	😐	☹
1. Ich kann Eigenschaften ganzrationaler Funktionen untersuchen.	☐	☐	☐
2. Ich kann Extrem- und Wendepunkte von Graphen ganzrationaler Funktionen berechnen.	☐	☐	☐
3. Ich kann Integrale berechnen und als Flächeninhalt deuten.	☐	☐	☐
4. Ich kann die Ableitung von Funktionen f mit Gleichungen der Form $f(x) = ce^{kx+b}$ berechnen.	☐	☐	☐
5. Ich kann Exponentialgleichungen lösen.	☐	☐	☐
6. Ich kann die Sinusfunktion und ihre Transformationen untersuchen.	☐	☐	☐

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen,** Seite 411
zu 2. **Grundwissen,** Seite 415
zu 3. **Lehrtext,** Seite 73
zu 4. **Beispiel 1,** Seite 109
zu 5. **Beispiel 2,** Seite 105
zu 6. **Grundwissen,** Seite 412

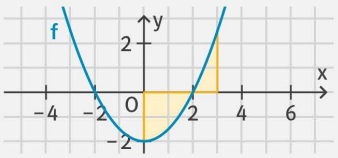
Test

Lösungen, Seite 458

1 **Ganzrationale Funktionen auf ihre Eigenschaften untersuchen**
Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen, Symmetrie und ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.
a) $f(x) = x(x-3)(x+1)$ **b)** $f(x) = x^4 - 6x^2$

2 **Extrem- und Wendepunkte von Graphen ganzrationaler Funktionen berechnen**
Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4{,}3$.
a) Berechnen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen der Funktion f.
b) Bestimmen Sie die Steigung der Wendetangenten und die Größe ihrer Steigungswinkel.

3 **Integrale berechnen und als Flächeninhalt deuten**
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^2 - 2$.
a) Ermitteln Sie einen Schätzwert für den Inhalt der gelb gefärbten Fläche.
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f und die x-Achse im Intervall $[0; 3]$ einschließen.



4 **Funktionen f mit Gleichungen der Form $f(x) = ce^{kx+b}$ ableiten**
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f. Geben Sie die Steigung der Tangente bei $x = 1$ an.
a) $f(x) = 1{,}25e^{2x}$ **b)** $f(x) = -0{,}1e^{3x+1}$ **c)** $f(x) = -0{,}4 \cdot e^{x+3}$

5 **Exponentialgleichungen lösen**
Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung mithilfe des natürlichen Logarithmus.
a) $e^{2x} = 2$ **b)** $e^{2x+1} = 1$ **c)** $e^{0{,}5x} = 0{,}5$

6 **Sinusfunktion und ihre Transformationen untersuchen**
Gegeben ist die Sinusfunktion f mit $f(x) = 2\sin(0{,}5x)$.
a) Geben Sie die Amplitude und die Periode von f an.
b) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f im Intervall $[0; 4\pi]$.
c) Die Funktion g soll aus der Funktion f durch Verschiebung entstehen. Notieren Sie die Funktionsgleichung von g und begründen Sie, welche Nullstellen g im Intervall $[0; 4\pi]$ hat.
(1) 2 Einheiten nach unten (2) um π nach rechts

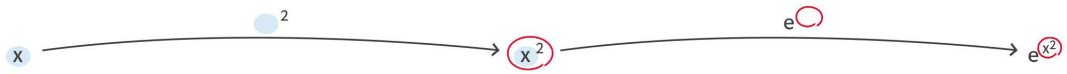
Neue Funktionen aus alten Funktionen

Lerneinheit 2
Seite 143

Gegeben sind vier Funktionen.

1 $h(x) = x^2$ 2 $i(x) = x^3$ 3 $j(x) = e^x$ 4 $k(x) = e^{-x}$

Diese Funktionen wurden miteinander kombiniert. Das heißt beispielsweise:
Auf x wurde erst die Funktion h angewendet und danach die Funktion j.



Man schreibt $j(h(x))$ oder $j \circ h$ (gesprochen „j nach h“) und nennt die neue Funktion eine Verkettung von h und j.

Auftrag 1: Werte von verketteten Funktionen berechnen

Bilden Sie die Verkettungen $j \circ h$, $k \circ h$, $j \circ i$ und $k \circ i$. Berechnen Sie die Funktionswerte für die angegebenen Stellen x und vervollständigen Sie die folgenden Tabellen.

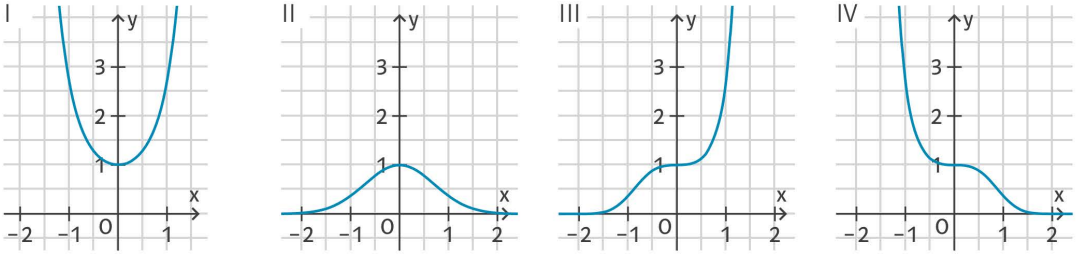
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
h(x)	9						
j(h(x))	e^9						
k(h(x))	e^{-9}						

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
i(x)	−27						
j(i(x))	e^{-27}						
k(i(x))	$e^{-(-27)}$						

Auftrag 2: Graphen verketteter Funktionen analysieren – das Grenzverhalten

Der Verlauf der Graphen der gegebenen Funktionen h, i, j und k ist jeweils bekannt.

a) Ordnen Sie die Funktionen $j \circ h$, $k \circ h$, $j \circ i$ und $k \circ i$ den Graphen I bis IV zu.



b) Skizzieren Sie die Graphen von h, i, j und k und vergleichen Sie deren Grenzwertverhalten mit dem Grenzwertverhalten der Graphen aus den Abbildungen I – IV.
Formulieren Sie mithilfe der Satzbausteine wahre Aussagen.

h strebt … | für $x \to +\infty$ | … also strebt … | $j(h(x))$ | $k(h(x))$ | gegen $-\infty$.
i strebt … | für $x \to -\infty$ | | $j(i(x))$ | $k(i(x))$ | gegen $+\infty$.
| | | | | | gegen 0.

Auftrag 3: Verkettungen und Umkehrfunktion

Yağmur behauptet: „Bei Umkehrfunktionen kann ich leicht prüfen, ob ich sie richtig gebildet habe, indem ich die Verkettungen aus f und $\bar{f}$ bilde: Es muss einfach wieder x herauskommen!“

a) Prüfen Sie Yağmurs Behauptung mithilfe der gegebenen Kärtchen.
Ordnen Sie dazu zunächst „Funktion und Umkehrfunktion“ einander zu .

$f(x) = x^2$ | $f(x) = x + 1$ | $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$ | $\bar{f}(x) = \ln(x)$
$f(x) = e^x$ | $f(x) = 0{,}5x^2$ | $\bar{f}(x) = x - 1$ | $\bar{f}(x) = \sqrt{2x}$

b) Es gibt Funktionen, die sich selbst umkehren. Die einfachste dieser Art ist die Funktion f mit $f(x) = x$. Finden Sie möglichst viele weitere dieser Funktionen.

Ableitungsregeln für Produkte

Lerneinheit 3
Seite 147

Forschungsauftrag 1: Beispiele untersuchen

Max möchte untersuchen, ob man eine Funktion faktorenweise ableiten kann, wenn der Funktionsterm ein Produkt ist.
Hierzu zerlegt er den Funktionsterm der Funktion f mit $f(x) = x^6$ in die beiden Faktoren x^2 und x^4, also $f(x) = x^2 \cdot x^4$. Leitet er die beiden Faktoren einzeln ab und bildet er dann das Produkt, so erhält er leider nicht $6x^5$, sondern $2x \cdot 4x^3 = 8x^4$.
Da sich der Exponent beim Ableiten einer Potenzfunktion immer um eins verringert, überlegt er, in einem neuen Ansatz nur einen der beiden Faktoren abzuleiten.
Aber welchen von beiden? Um das herauszufinden, stellt er eine Tabelle auf.

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x)$	$u(x) \cdot v'(x)$
$x^6 = x^1 \cdot x^5$	$1 \cdot x^5 = x^5$	$x^1 \cdot 5x^4 = 5x^5$
$x^6 = x^2 \cdot x^4$	$2x \cdot x^4 = 2x^5$	
$x^6 = x^3 \cdot x^3$		
$x^6 = x^4 \cdot x^2$		
$x^6 = x^5 \cdot x^1$		

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.

Man erkennt, dass die Potenzen der betrachteten Ableitungsfunktionen in der Tabelle mit der Potenz der Funktion f' übereinstimmen, die Vorfaktoren passen jedoch nicht.
Als Max sich die Vorfaktoren für beide Möglichkeiten noch einmal genau ansieht, findet er doch noch eine geeignete Formel, die für jede Zerlegung das richtige Ergebnis liefert.

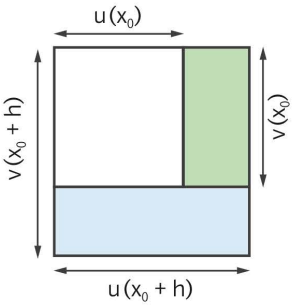
b) Wie lautet die Formel für die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$?
Stellen Sie eine Vermutung auf.

c) Untersuchen Sie, ob die Formel aus Teilaufgabe b) auch bei der Zerlegung anderer Potenzfunktionen oder von ganzrationalen Funktionen in Linearfaktorzerlegung gültig ist.

Forschungsauftrag 2: Zum Weiterdenken – Beweis der Produktregel

Formen Sie den Differenzenquotienten der Funktion f mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ so um, dass die Differenzenquotienten von u und v vorkommen.

a) Bringen Sie dazu die vier dargestellten Kärtchen in die richtige Reihenfolge.
Erläutern Sie die Rechenschritte und verwenden Sie die nebenstehende Abbildung für die Begründung des Terms auf Kärtchen D.



A $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \cdot v(x_0) + u(x_0 + h) \cdot \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}$

B $\frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h}$

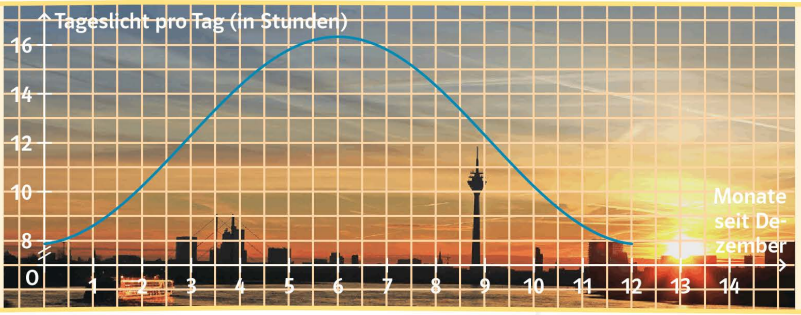
C $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

D $\frac{(u(x_0 + h) - u(x_0)) \cdot v(x_0) + u(x_0 + h) \cdot (v(x_0 + h) - v(x_0))}{h}$

b) Welche Regel erhält man für $h \to 0$? Überprüfen Sie die gefundene Regel an von Ihnen selbstgewählten Beispielen mit einem MMS.

1 Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion

„Im März werden die Tage endlich schneller länger!", meint Lenny.
Die Grafik zeigt die Tageslichtdauer pro Tag in Stunden in Düsseldorf.
Prüfen Sie Lennys Behauptung mithilfe der Grafik.



Sinus- und Kosinusfunktionen können verwendet werden, um periodische Vorgänge zu modellieren. Im Folgenden werden wichtige Eigenschaften wiederholt und Regeln zum Ableiten erarbeitet.

Eigenschaften der Sinusfunktion

Betrachtet wird die Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Es gilt $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = [-1; 1]$.

Nullstellen

$\sin(x) = 0$, wenn $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Maxima

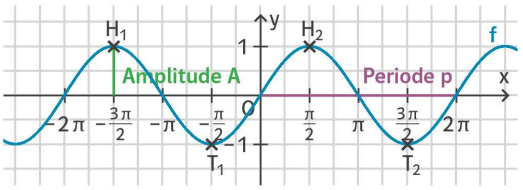
$\sin(x) = 1$, wenn $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Minima

$\sin(x) = -1$, wenn $x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Periode: $p = 2\pi$

$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin(x)$ mit $k \in \mathbb{Z}$



Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Er hat die **Amplitude** $A = 1$.

Eigenschaften der Kosinusfunktion

Betrachtet wird die Funktion g mit $g(x) = \cos(x)$. Es gilt $D_g = \mathbb{R}$ und $W_g = [-1; 1]$.

Nullstellen

$\cos(x) = 0$, wenn $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Maxima

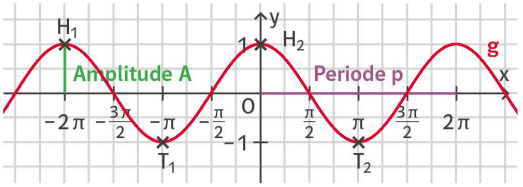
$\cos(x) = 1$, wenn $x = k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Minima

$\cos(x) = -1$, wenn $x = \pi + k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Periode: $p = 2\pi$

$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos(x)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

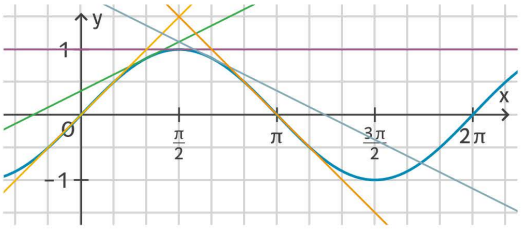


Der Graph von g ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Er hat die **Amplitude** $A = 1$.

Verschiebt man den Graphen von g mit $g(x) = \cos(x)$ um $\frac{\pi}{2}$ in positive x-Richtung, erhält man den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Es gilt $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ bzw. $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Wie man die Ableitungsfunktion der Sinusfunktion erhält, wird im Folgenden mithilfe der Tangentensteigungen an ihren Graphen veranschaulicht. Man erhält folgende Werte:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	π	...
Tangentensteigung	1	0,5	0	−0,5	−1	...

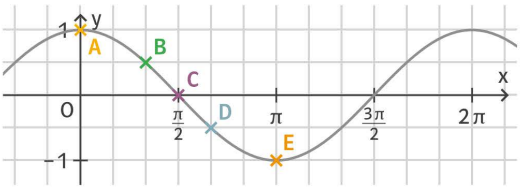


Diese Wertepaare trägt man als Punkte ins Koordinatensystem ein und erhält einen Überblick über den Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion.

Hinweis:
Hier wird das **Bogenmaß** verwendet.

I5 **interaktive Anwendung**
Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Der Verlauf der Punkte lässt die Vermutung zu, dass der Ableitungsgraph der Graph der Kosinusfunktion ist.
Analog erhält man $\cos'(x) = -\sin(x)$.



Eine Überprüfung mit einem MMS bestätigt die Vermutung bzgl. der Ableitungen. Ein rechnerischer Nachweis erfolgt in der Exkursion auf Schulbuchseite 174.

Die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion
Für die Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$ gilt $f'(x) = \cos(x)$.
Für die Kosinusfunktion g mit $g(x) = \cos(x)$ gilt $g'(x) = -\sin(x)$.

Aus den Ableitungen von Sinus und Kosinus kann man folgern, dass F mit $F(x) = -\cos(x)$ eine Stammfunktion von f mit von $f(x) = \sin(x)$ und G mit $G(x) = \sin(x)$ eine Stammfunktion von g mit $g(x) = \cos(x)$ ist.

f	f′
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$

x	sin(x)	cos(x)
0	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

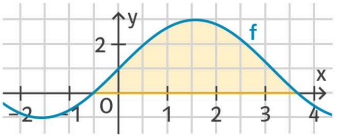
Beispiel 1 **Ableitungen von Sinus und Kosinus berechnen**
Leiten Sie ab und bestimmen Sie $f'(\pi)$.
a) $f(x) = \sin(x)$ b) $f(x) = 2\cos(x)$ c) $f(x) = 1{,}5\sin(x) + 3$

Lösung
a) $f'(x) = \cos(x)$
$f'(\pi) = \cos(\pi) = -1$

b) $f'(x) = -2\sin(x)$
$f'(\pi) = -2\sin(\pi) = 0$

c) $f'(x) = 1{,}5\cos(x)$
$f'(\pi) = 1{,}5\cos(\pi) = -1{,}5$

Beispiel 2 **Flächeninhalte berechnen**
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(x) + 1$.
Berechnen Sie mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche, die der Graph von f im Intervall $I = \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7}{6}\pi\right]$ mit der x-Achse einschließt.



Lösung
$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7}{6}\pi} (2\sin(x) + 1)\,dx = \left[-2\cos(x) + x\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7}{6}\pi} = \left(-2\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + \frac{7}{6}\pi\right) - \left(-2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \approx 7{,}65$$

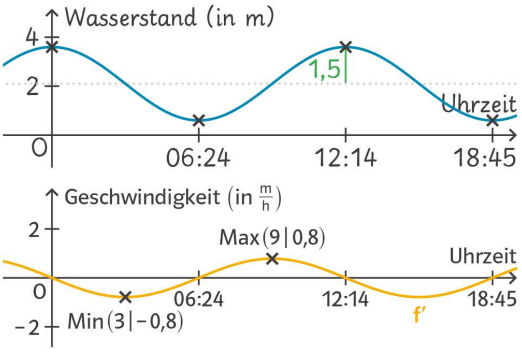
Beispiel 3 **Fragestellungen mithilfe der Sinusfunktion beantworten**
Im Hafen von Wangerooge wurden die maximalen und minimalen Wasserstände der Nordsee gemessen und in der Tabelle notiert.

Uhrzeit	00:08	06:24	12:14	18:45
Wasserstand (in m)	3,42	0,73	3,62	0,58

a) Stellen Sie die Daten aus der Tabelle grafisch dar. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion, die als Modell für den Verlauf der Wasserstände verwendet werden kann.
b) Begründen Sie, dass die Funktion f mit $f(x) = 1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2{,}1$ als Modellfunktion für den Verlauf der Gezeiten geeignet ist.
c) Ermitteln Sie die größte Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit des Wassers in $\frac{\text{cm}}{\text{min}}$.

Erinnerung:
$b = \frac{2\pi}{p}$, wobei p die Periode ist.

Lösung
a) *siehe Grafik rechts*
b) Amplitude: $(3{,}62 - 0{,}58) : 2 = 1{,}5 = a$
Verschiebung in y-Richtung:
$(3{,}62 + 0{,}58) : 2 = 2{,}1 = d$
Periode: ca. 12 Stunden, also $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$
Man erhält $f(x) = 1{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2{,}1$.
c) *Gesucht sind die Extrema von f′.*
Die maximale Geschwindigkeit der Zu- und Abnahme des Wassers beträgt ca. $0{,}8\frac{\text{m}}{\text{h}} = \frac{80}{60}\frac{\text{cm}}{\text{min}} = 1\frac{1}{3}\frac{\text{cm}}{\text{min}}$.



Aufgaben

○ **1** Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f.

Lerntipp Seite 139, Beispiel 1

a) $f(x) = 12 \cdot \sin(x)$ b) $f(x) = -2 \cdot \cos(x)$ c) $f(x) = \sqrt{5} \cdot \cos(x)$

d) $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \sin(x)$ e) $f(x) = 5x^3 - \sin(x)$ f) $f(x) = 2\cos(x) - \sin(x)$

○ **2** Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f an und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f im Intervall I mit der x-Achse einschließt.

Lerntipp Seite 139, Beispiel 2

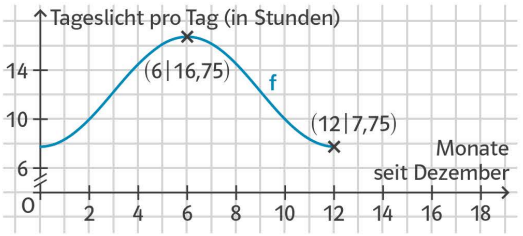
a) $f(x) = \sin(x)$; $I = [0; \pi]$ b) $f(x) = -\cos(x)$; $I = [0; \pi]$

c) $f(x) = 2\cos(x)$; $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)$; $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

e) $f(x) = x - \sin(x)$; $I = \left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$ f) $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$; $I = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi\right]$

○ **3** Abgebildet ist der Graph einer Modellfunktion f mit $f(x) = a \cdot \cos(bx) + d$, die den Jahresverlauf der Tageslichtdauer pro Tag (in Stunden) in Bielefeld beschreibt.

Lerntipp Seite 139, Beispiel 3



a) Begründen Sie, dass $b = \frac{\pi}{6}$ ist.

b) Ermitteln Sie Werte für a und d.

c) Es ist $f'(x) = \frac{3}{4}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.
Ermitteln Sie, wann die Tageslichtdauer am stärksten zunimmt.

Test 1

Lösungen, Seite 459

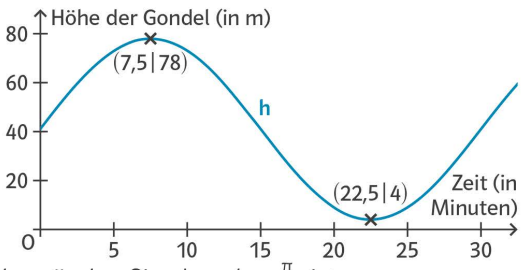
○ **4** Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = -3{,}5 \cdot \sin(x)$ b) $f(x) = 0{,}4 \cdot \cos(x)$ c) $f(x) = x + \cos(x)$

○ **5** Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f an und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f im Intervall I mit der x-Achse einschließt.

a) $f(x) = 0{,}5\cos(x) + 0{,}5$; $I = [0; \pi]$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}\sin(x) + 0{,}5$; $I = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5}{2}\pi\right]$

○ **6** Das Umadum in München ist mit einem Durchmesser von 74 m und einer Höhe von 78 m das größte Riesenrad Deutschlands. Die Höhe der Gondel kann durch die Modellfunktion $h(x) = a \cdot \sin(bx) + d$ beschrieben werden, wobei x die Zeit nach dem Start (in min) angibt. Bei $x = 0$ befindet sich die grüne Gondel im Foto an der markierten Stelle.



umadum (bayrisch): rundherum

a) Berechnen Sie den Umfang des Umadums und begründen Sie, dass $b = \frac{\pi}{15}$ ist.

b) Ermitteln Sie anhand des Graphen Werte für a und d.

c) Es ist $h'(x) = \frac{37}{15}\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15}x\right)$. Ermitteln Sie, an welchen Stellen die Gondeln am schnellsten an Höhe gewinnen bzw. verlieren.

◒ **7** Ermitteln Sie, in welchen Punkten der Graph der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[0; 2\pi]$ die gleiche Steigung hat wie die

a) 1. Winkelhalbierende mit der Gleichung $y = x$, b) x-Achse,

c) Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$, d) Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

◒ **8** a) Zeigen Sie, dass die Tangenten an den Graphen der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$ maximal die Steigung 1 haben.

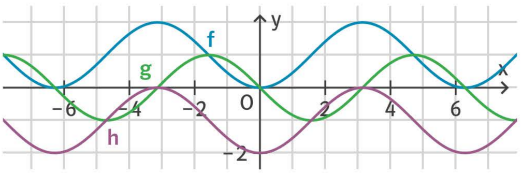
b) Machen Sie eine Aussage über die Steigung der Funktion g mit $g(x) = a \cdot \sin(x)$, $a > 0$.

9 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x + \sin(x)$ und $g(x) = x + \cos(x)$.

a) Bestimmen Sie Punkte, in denen die Graphen von f und g die Steigung 2 haben.

b) Zeigen Sie, dass beide Graphen keine Extrempunkte haben.

10 Betrachten Sie die Graphen der Funktionen f, g und h in der Grafik.
Begründen Sie, welche der Funktionen die Funktion k mit $k(x) = \sin(x)$ als Ableitungsfunktion hat.



11 Der Wasserstand des Rheins in Duisburg wurde am 5. Januar 2024 von der zuständigen Bundesverwaltung durch folgende Grafik (Fig. 1) dargestellt. Die rote Linie ist eine Vorhersage.

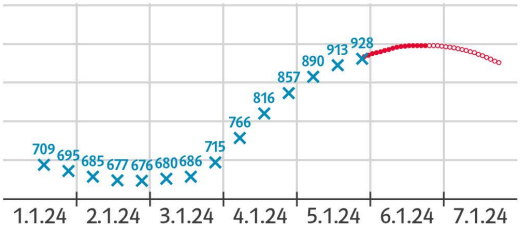


Fig. 1

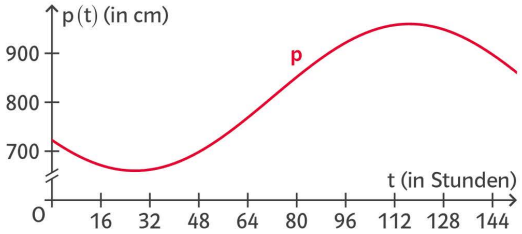


Fig. 2

Der Graph der Funktion p mit $p(t) = 150 \cdot \sin(0{,}035(t - 72)) + 810$ soll im Folgenden als Modell genutzt werden (Fig. 2). Grundlage sind die Messwerte seit dem 1.1.2024, 21 Uhr. t ist die Zeit in Stunden seit Beobachtungsbeginn und p(t) der Pegelstand in cm.

a) Ermitteln Sie die maximale prognostizierte Steiggeschwindigkeit des Wassers.

b) Der maximale Pegelstand wird in diesem Modell am 6. Januar um etwa 18 Uhr $(t \approx 117)$ erwartet. Ab 9,30 m sind Einschränkungen für die Schifffahrt notwendig, gefährlich wird es ab 9,80 m, wenn auch Gebäude und Straßen überflutet werden. Untersuchen Sie, worauf sich die Stadt Duisburg laut diesem Modell einstellen muss.

Erinnerung:
Im Term $(t - c)$ gibt c die Verschiebung in x-Richtung an.

12 Die Tabelle zeigt das Monatsmittel der Temperatur und die Luftfeuchtigkeit in Dortmund.

Monat	Jan.	Feb.	Mär.	Apr.	Mai.	Jun.	Jul.	Aug.	Sep.	Okt.	Nov.	Dez.
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temperatur (in °C)	4	5	8	13	17	19	22	22	18	14	8	5
Luftfeuchtigkeit (in %)	85	80	77	72	70	73	73	74	79	81	84	85

Für Analysen wird eine Modellfunktion T mit $T(t) = -9\cos\left(\frac{\pi}{6}(t - 1)\right) + 13$ verwendet, um den Temperaturverlauf (in °C) zu beschreiben. Die Luftfeuchtigkeit (in %) wird durch die Funktion L mit $L(t) = -7{,}5\sin\left(\frac{\pi}{6}(t - 2{,}5)\right) + 77{,}5$ modelliert. t gibt dabei die Zeit in Monaten an, wobei $t = 1$ dem Monat Januar entspricht.

a) Deuten Sie den Faktor $\frac{\pi}{6}$ sowie die Amplituden von T und L im Kontext.

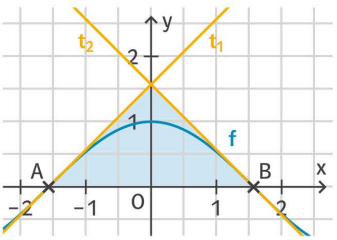
b) Ermitteln Sie, wann bei Temperatur und Luftfeuchtigkeit jeweils die größte Änderung zu verzeichnen ist.

13 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$.

a) Zeigen Sie, dass die Tangente im Punkt $A\left(-\frac{\pi}{2}\middle|0\right)$ die Steigung 1 hat.

b) Begründen Sie, dass das Dreieck, das von den beiden Tangenten t_1 und t_2 und der x-Achse eingeschlossen wird, gleichschenklig ist.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.



Test 2

→ **Lösungen**, Seite 459

14 Ermitteln Sie, in welchen Punkten $P(x_0|f(x_0))$ und $Q(x_0|g(x_0))$ die Graphen von f und g im Intervall $[0; 2\pi]$ parallele Tangenten haben. Runden Sie auf die vierte Dezimalstelle.

a) $f(x) = 2\sin(x)$; $g(x) = x^2$

b) $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$; $g(x) = x^3$

15 Im Verlauf eines Jahres ändert sich die Tageslänge. Für die Stadt Stockholm kann sie modellhaft beschrieben werden durch die Funktion L mit $L(t) = 12 + 6{,}24 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

Dabei ist t die Zeit in Monaten ab dem 21. März und L(t) die Tageslänge in Stunden.

Tageslänge meint, wie viele Stunden Tageslicht es pro Tag gibt.

a) Bestätigen Sie, dass es laut diesem Modell am 21. September genauso lange Tageslicht gibt wie am 21. März.

b) Ermitteln Sie, wie lang bei Zugrundelegen der Modellfunktion der längste und wie lang der kürzeste Tag in Stockholm ist.

c) Ermitteln Sie, wann sich die Tageslänge am schnellsten ändert. Geben Sie an, wie viele Stunden Tageslicht es dann gibt.

16 Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t durch $f_t(x) = t \cdot \cos(x) + t$ mit $-\pi \le x \le \pi$ gegeben.

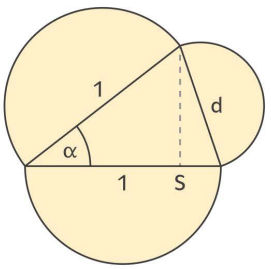
a) Skizzieren Sie die Graphen von f_t für $t = 1$ und $t = 2$ in einem Koordinatensystem.

b) Ermitteln Sie für $x > 0$ die Wendetangente des Graphen von f_t in Abhängigkeit von t.

c) Der Graph von f_t, die Wendetangente aus Teilaufgabe b) und die y-Achse begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt in Abhängigkeit von t.

d) Es sei $P(u|v)$ mit $0 < u < \pi$ ein Punkt auf dem Graphen von f_2. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch P und die Koordinatenachsen bilden ein Rechteck. Ermitteln Sie, für welchen Wert von u der Umfang des Rechtecks extremal wird. Bestimmen Sie die Art des Extremums und den Flächeninhalt des Rechtecks.

17 Für $x \in [0; \pi]$ sei A(x) der Flächeninhalt der abgebildeten Figur, x sei das Bogenmaß von α.



Erinnerung:

$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Statt $(\sin(x))^2$ schreibt man auch $\sin^2(x)$ bzw. $\sin^2 x$.

a) Zeigen Sie, dass $d^2 = 2 - 2\cos(x)$ gilt. Verwenden Sie, dass $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist.

b) Erläutern Sie, dass $A(x) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$ gilt.

c) Äußern Sie eine Vermutung, für welche Werte von x der Flächeninhalt der Figur extremal wird. Weisen Sie das Minimum und das Maximum auch rechnerisch nach.

Grundwissen Test — Lage von Punkten im Raum beschreiben

→ **Grundwissen**, Seite 420
Lösungen, Seite 459

G **18** Sortieren Sie die Punkte in die passenden Kisten. Einige Punkte können in mehrere Kisten sortiert werden, andere passen in keine Kiste.

A(0|4|1) B(0|9|0) C(−5|2,4|−6) D(1|0|7) E(2|4|0) F(0|0|0)

G(0|0|−10) H(1|0|−8) I(3|0|0) J(0|0|−1) K(6|−5|0,5) L(−1|0|0)

liegt in der x_2x_3-Ebene	liegt auf der x_2-Achse	liegt in der x_1x_2-Ebene	liegt auf der negativen x_3-Achse	liegt in der x_1x_3-Ebene

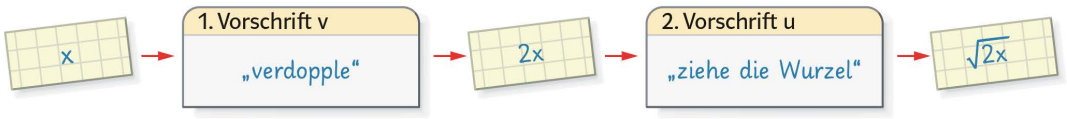
2 Verkettung von Funktionen

Für die Umrechnung einer Temperaturangabe von der Kelvin-Skala in die Celsius-Skala gilt die Vorschrift $c(k) = k - 273$.
Für die Umrechnung einer Temperaturangabe von der Celsius-Skala in die Fahrenheit-Skala gilt die Vorschrift $f(c) = 1{,}8c + 32$.
Damit kann man jede Temperaturangabe der Kelvin-Skala in zwei Schritten auch in Grad Fahrenheit umrechnen.
Wie lautet die Formel für „Kelvin in Fahrenheit“?

Links das größte Thermometer in Barcelona, rechts das größte Thermometer der Welt in Baker, Kalifornien, USA, am Tor zum Death Valley.

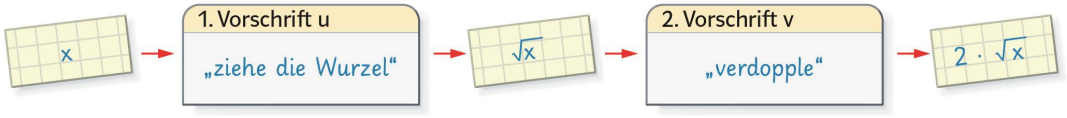
Ganzrationale Funktionen sind eine Funktionsklasse, die sich aus verschiedenen Potenzfunktionen zusammensetzen. Auch andere Funktionstypen lassen sich kombinieren.

Die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{2x}$ setzt sich aus den Funktionen u mit $u(x) = \sqrt{x}$ und v mit $v(x) = 2x$ zusammen.
Dafür benötigt man eine weitere Möglichkeit, aus vorhandenen Funktionen neue Funktionen zu erzeugen. Hier wendet man auf die Variable x zuerst die erste Zuordnungsvorschrift v „verdopple“ an. Danach wendet man auf das Zwischenergebnis $v(x) = 2x$ die zweite Vorschrift u „ziehe die Wurzel“ an.



In der Funktion u mit $u(x) = \sqrt{x}$ wird die Variable x durch den Term $v(x) = 2x$ ersetzt.
Die entstandene neue Funktion nennt man **Verkettung von u und v**, man schreibt $f = u \circ v$ mit $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) = \sqrt{2x}$. v nennt man **innere Funktion** und u **äußere Funktion**.
Wendet man auf die Variable x zuerst die Vorschrift u an und anschließend die Vorschrift v, so erhält man die Funktion $g = v \circ u$:

$u \circ v$ spricht man „u nach v“ oder „u verkettet mit v“.



Für $g = v \circ u$ gilt also $g(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = 2 \cdot \sqrt{x}$, dabei ist u mit $u(x) = \sqrt{x}$ die innere und v mit $v(x) = 2x$ die äußere Funktion. Die Funktionen $f = u \circ v$ und $g = v \circ u$ stimmen hier nicht überein.

Da die Wurzelfunktion für negative Zahlen nicht definiert ist, betrachtet man hier nur die Zahlen $x \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Auch bei anderen Verkettungen kann es notwendig sein, den Definitionsbereich einzuschränken.

Verkettung von Funktionen
Gegeben sind die Funktionen u und v.
Die Funktion $f = u \circ v$ mit $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ heißt **Verkettung** von u und v.

Beispiel 1 **Verkettung mit der Exponentialfunktion bilden**

a) Bilden Sie $u \circ v$ und $v \circ u$ für u mit $u(x) = e^x$ und v mit $v(x) = 2x + 1$.

b) Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)^2}$ zwei Funktionen g und h mit $f = g \circ h$.

Lösung

a) $u(v(x)) = u(2x + 1) = e^{2x+1}$; $v(u(x)) = v(e^x) = 2e^x + 1$

b) 1. Möglichkeit:

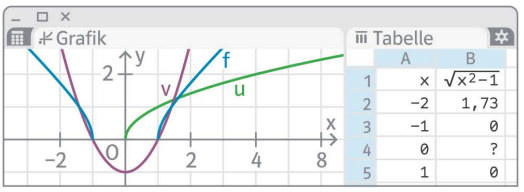
Mit $g(x) = \frac{1}{x^2}$ und $h(x) = e^x + 1$ ergibt sich $g(h(x)) = \frac{1}{(e^x + 1)^2}$.

2. Möglichkeit:

Mit $g(x) = \frac{1}{x}$ und $h(x) = (e^x + 1)^2$ ergibt sich $g(h(x)) = \frac{1}{(e^x + 1)^2}$.

Beispiel 2 **Verkettung mit einem MMS untersuchen**

Gegeben sind die Funktionen u und v mit $u(x) = \sqrt{x}$ und $v(x) = x^2 - 1$.
Bei der Verkettung $f = u \circ v$ liefert ein MMS die nebenstehende Darstellung.



a) Erläutern Sie die Tabellenanzeige für $x = 0$.

b) Geben Sie die Definitionsmenge D_f an.

Lösung

a) Es ist $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Damit erhält man für $x = 0$ eine negative Diskriminante. Die Funktion f ist für $x = 0$ somit nicht definiert.

b) Für $-1 < x < 1$ ist $x^2 - 1 < 0$. Für $x \in]-1; 1[$ wäre die Diskriminante negativ, f also nicht definiert. Also hat f die Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus]-1; 1[$.

Aufgaben

○ **1** Gegeben sind die beiden Funktionen u und v auf den roten Kärtchen. Die Funktionen f, g, h und i auf den gelben Kärtchen entstehen aus u und v auf unterschiedliche Weise.
Geben Sie an, welche der Funktionen f, g, h und i aus u und v durch eine Verkettung entstanden sind.

$u(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $h(x) = x^2(2x + 1)$

$v(x) = 2x + 1$ $\quad$ $g(x) = (2x + 1)^2$ $\quad$ $i(x) = 2x^2 + 1$

○ **2** Bilden Sie $u \circ v$, $v \circ u$, $u \circ w$ und $w \circ v$ für $u(x) = x^2$, $v(x) = x + 2$ und $w(x) = \sin(x)$. Geben Sie jeweils den Definitionsbereich der verketteten Funktionen an.

○ **3** Bilden Sie die Verkettungen $f(x) = u(v(x))$ und $g(x) = v(u(x))$.
Berechnen Sie anschließend $f(1)$ und $g(1)$.

Lerntipp
Seite 144, Beispiel 1

a) $u(x) = 1 - x^2$; $v(x) = (1 - x)^2$ $\quad$ b) $u(x) = (x - 1)^2$; $v(x) = x + 1$ $\quad$ c) $u(x) = e^x$; $v(x) = x + 1$

d) $u(x) = \sqrt{2x}$; $v(x) = x - 1$ $\quad$ e) $u(x) = \frac{1}{x+1}$; $v(x) = e^x$ $\quad$ f) $u(x) = 2 - x$; $v(x) = e^x$

g) $u(x) = \cos(x)$; $v(x) = -x$ $\quad$ h) $u(x) = -\sin(x)$; $v(x) = x^2$ $\quad$ ■ i) $u(x) = \ln(x)$; $v(x) = 2x$

○ **4** Gegeben sind $f(x) = u(v(x))$ und $g(x) = v(u(x))$ mit $u(x) = x^2 + 1$ und $v(x) = \frac{1}{x-1}$.

Lerntipp
Seite 144, Beispiel 2

a) Bilden Sie $f(x)$ und $g(x)$. Skizzieren Sie die Graphen von u und v.

b) Geben Sie die Definitionsmenge der Funktionen f und g an. Begründen Sie, warum v nicht für $x = 1$ definiert ist, $v \circ u$ hingegen schon.

c) Zeichnen Sie die Graphen von f und g mithilfe einer Wertetabelle.

Test 1

Lösungen, Seite 459

○ **5** Gegeben sind die Funktionen u, v und w mit $u(x) = (x + 7)^3$, $v(x) = 2x$ und $w(x) = \sin(x^2 + 1)$. Bilden Sie $u \circ v$, $v \circ u$, $u \circ w$ und $w \circ v$.

○ **6** Stellen Sie die Funktion f als Verkettung zweier Funktionen u und v dar.

a) $f(x) = (2x + 3)^3$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ **c)** $f(x) = e^{x^2}$ **d)** $f(x) = \sin(\pi x - 2)$

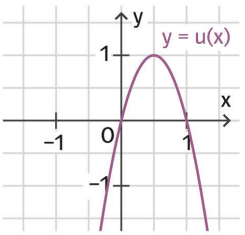
◒ **7** Die Funktion f kann als Verkettung $u \circ v$ aufgefasst werden. Nennen Sie mögliche Funktionen u und v. Geben Sie die Definitionsmenge von f an.

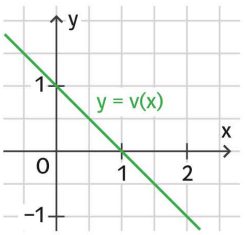
a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ **c)** $f(x) = (e^x - 5)^2$ **d)** $f(x) = e^{x^2 + 1}$

e) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ **f)** $f(x) = \sqrt{3x}$ **g)** $f(x) = 2^{x - 3}$ **h)** $f(x) = 3e^{\sqrt{x + 2}}$

i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ **j)** $f(x) = e^{x + 1} + 2$ ■ **k)** $f(x) = 2 \cdot \ln(x)$ ■ **l)** $f(x) = \ln(x - 1)$

◒ **8** Gegeben sind die Graphen der Funktionen u und v.

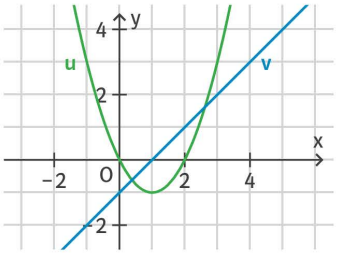




a) Bestimmen Sie für $x_0 = 0$, $x_0 = 0{,}5$ und $x_0 = 1$ näherungsweise $u(v(x_0))$ und $v(u(x_0))$.

b) Es ist $u(x) = -4(x - 0{,}5)^2 + 1$ und $v(x) = -x + 1$. Überprüfen Sie damit Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe a) rechnerisch.

◒ **9** Gegeben sind die Graphen der Funktionen u und v.



a) Ermitteln Sie x_0 so, dass $u(v(x_0)) = -1$ ist.

b) Geben Sie eine Funktion w so an, dass $w(v(x)) = u(x)$.

◒ **10** Gegeben sind die Funktionen u_a und v_a mit $u_a(x) = ax^2 + 1$ und $v_a(x) = x + a$ $(a \in \mathbb{R})$.
Bestimmen Sie alle Werte für a so, dass $u_a \circ v_a(5) = 1$ gilt.

◒ **11** **a)** Bestimmen Sie eine Funktion u so, dass $f = u \circ v$ ist, wenn $f(x) = (2x + 6)^3$ und $v(x) = 2x + 6$ ist. Erläutern Sie, was sich im Term von u ändert, wenn $v(x) = x + 3$ ist.

b) Stellen Sie die Funktionen g, h und j mit $g(x) = \frac{4}{(2x + 1)^2}$, $h(x) = (3x + 6)^2$ und $j(x) = \sqrt{(x + 2)^3}$ auf zwei Weisen als Verkettung zweier Funktionen u und v dar.

◒ **12** **Wahr oder falsch?**
Beurteilen Sie für die Funktionen u, v und $f = u \circ v$, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Die Funktion f kann nicht mehr Nullstellen haben als u.

b) Die Funktion f kann nicht mehr Nullstellen haben als v.

c) Hat die Funktion u keine Nullstellen, so hat auch f keine Nullstellen.

Tipp:
Ein Gegenbeispiel kann auch durch einen Graphen gegeben werden.

◒ **13** Gegeben sind die Funktionen u und v mit $u(x) = -1 - x^2$ und $v(x) = \sqrt{x}$.
Untersuchen Sie, ob die Verkettungen $f = u \circ v$ und $g = v \circ u$ zu Funktionen mit einem sinnvollen Definitionsbereich führen.

◒ **14** Unter einem defekten Tank breitet sich ein kreisförmiger Ölfleck aus, der zur Zeit $t = 0$ eine Fläche von $30\,cm^2$ bedeckt. Diese Fläche vergrößert sich gleichmäßig um $6\,cm^2$ pro Minute. Bestimmen Sie einen Term $r(t)$ für den Radius des Kreises in Abhängigkeit von der Zeit.

15 Marlows Oma findet im Geheimfach einer alten Handtasche einen 50-D-Mark-Schein. Diesen möchte sie ihm als Taschengeld für seine Fahrt nach Südengland schenken.

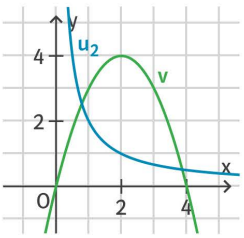
a) Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion h für den Umtauschkurs D-Mark in Britische Pfund, wenn die Funktion f mit $f(x) = 0{,}51129\,x$ (x in D-Mark) den Wechselkurs von D-Mark in Euro und die Funktion g mit $g(x) = 0{,}8579\,x$ (x in Euro) den Wechselkurs von Euro in Britische Pfund angibt (Wechselkurs EUR-GBP am 27.03.2024).

b) Berechnen Sie mit der Funktion h, wie viele Britische Pfund Marlow vom Geld seiner Oma ausgeben kann.

Test 2

Lösungen, Seite 460

16 Gegeben sind die Funktionen u_a mit $u_a(x) = \frac{a}{x}$ $(a > 0)$ und die quadratische Funktion v.
Für jedes $a > 0$ ist die Funktion $f_a = u_a \circ v$ die Verkettung von u_a und v.



a) Ermitteln Sie $f_2(x)$ für $x = 0{,}5$ und $x = 2$.

b) Begründen Sie, dass die Definitionsmenge D_{f_a} unabhängig von a ist.

c) Bestimmen Sie alle Stellen x, für die $f_a(x) = \frac{a}{3}$ ist.

d) Bestimmen Sie denjenigen Wert für a mit $f_a(2) = 5$.

17 Gegeben ist die Funktion v mit $v(x) = x - c$.

a) Bilden Sie $f \circ v$, wenn $f(x) = x^2$ ist. Skizzieren Sie die Graphen für $c = -1$ und $c = 1$.

b) Wählen Sie drei verschiedene Funktionen g. Bilden Sie $g \circ v$ und skizzieren Sie die Graphen. Variieren Sie dabei auch c. Beschreiben Sie Ihre Beobachtung.

18 Geben Sie Funktionsgleichungen für u, v und w so an, dass $f = u \circ v \circ w$ gilt.

a) $f(x) = e^{2x^2+1}$ b) $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}$ c) $f(x) = \cos(x^2 + 5)$

19 a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \cos(x^3)$ auf Symmetrie.

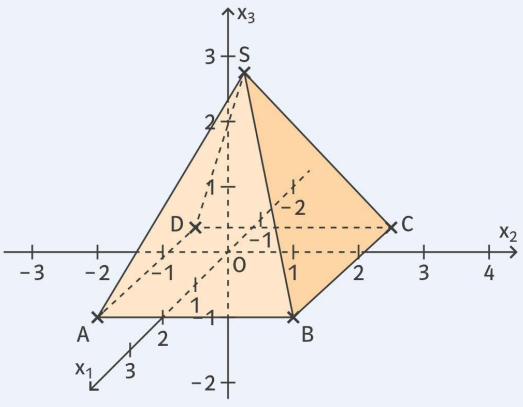
b) Gegeben sind die Funktionen u, v und g mit $g = u \circ v$.
Zeigen Sie: Wenn der Graph von u achsensymmetrisch zur y-Achse und der Graph von v punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist, dann ist der Graph von g achsensymmetrisch zur y-Achse.

c) Formulieren Sie zwei weitere Aussagen wie in Teilaufgabe b) und weisen Sie diese nach.

Grundwissen Test — Punkte und Figuren im Raum

Grundwissen, Seite 420
Lösungen, Seite 460

G **20** Die Grundfläche ABCD einer quadratischen Pyramide liegt in der x_1x_2-Ebene. Gegeben sind die Eckpunkte $A(2|-1|0)$ und $B(2|2|0)$. Die Höhe der Pyramide beträgt 3 cm.



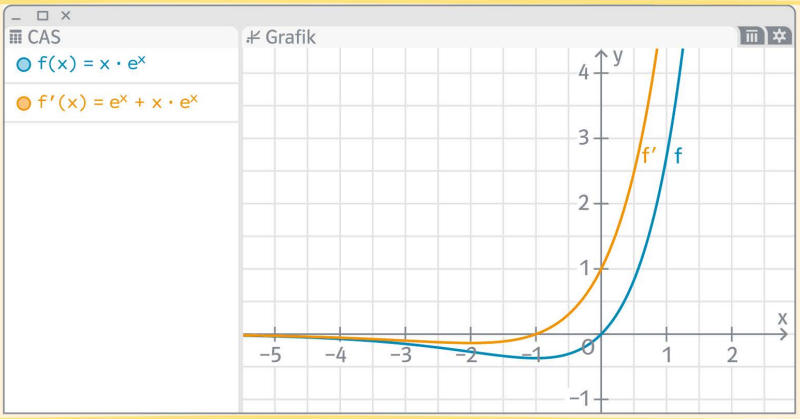
a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte C und D sowie der Spitze S an.

b) Bestimmen Sie die Länge der Kanten der Pyramide.

c) Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide.

3 Produktregel

Mona möchte $f(x) = x \cdot e^x$ ableiten.
Dazu lässt sie sich die Graphen von f und f' von einem MMS anzeigen.
Mit den beiden Graphen kommt sie zurecht, nur der Funktionsterm von f' wundert sie:
„Wenn ich f faktorenweise ableiten würde, käme für den Term der Ableitungsfunktion $1 \cdot e^x$ heraus. So kann es also nicht gehen."
Äußern Sie mithilfe des angezeigten Terms für f' eine Vermutung für die Ableitungsregel für Produkte.



Summen von Funktionen werden summandenweise abgeleitet (Summenregel).
Bei Produkten zweier Funktionen darf man nicht faktorenweise ableiten, wie das obige Beispiel zeigt. Im Folgenden wird eine Regel zum Ableiten von Produkten erarbeitet.

Will man die Ableitung eines Produktes $f = u \cdot v$ zweier Funktionen u und v bestimmen, deren Ableitung man kennt, so muss man den Differenzenquotienten von f auf die Differenzenquotienten von u und v zurückführen.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h}$$

Um den Zähler geschickt umformen zu können, bedient man sich eines Tricks. Man ergänzt den Term $-u(x_0) \cdot v(x_0 + h) + u(x_0) \cdot v(x_0 + h)$. Dieser Term ergibt 0 und verändert den Wert des Bruches nicht.

$$= \frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0 + h) + u(x_0) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h}$$

die ersten beiden und die letzten beiden Terme im Zähler zusammenfassen

$$= \frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0 + h)}{h} + \frac{u(x_0) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h}$$

$v(x_0 + h)$ bzw. $u(x_0)$ ausklammern

$$= \frac{(u(x_0 + h) - u(x_0)) \cdot v(x_0 + h)}{h} + \frac{u(x_0) \cdot (v(x_0 + h) - v(x_0))}{h}$$

Differenzenquotienten von u und v notieren

$$= \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \cdot v(x_0 + h) + u(x_0) \cdot \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}$$

Strategie:
Den Differenzenquotienten von f so umformen, dass die bekannten Differenzenquotienten $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$ und $\frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}$ vorkommen, da man deren Grenzwert kennt.

Man erhält $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \cdot v(x_0 + h) + u(x_0) \cdot \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \right)$

$$= u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0).$$

Produktregel
Sind die Funktionen u und v differenzierbar, so ist auch die Funktion $f = u \cdot v$ mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ differenzierbar und es gilt:

$$\mathbf{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

Beispiel 1 Produktregel anwenden

Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion f.

a) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{-3x+7}$ b) $f(x) = 2x \cdot \sin(x)$

Lösung

a) 1. Ableitung:

$u(x) = x^2 + 1$, $v(x) = e^{-3x+7}$

$u'(x) = 2x$, $v'(x) = -3 \cdot e^{-3x+7}$

$f'(x) = 2x \cdot e^{-3x+7} + (x^2 + 1) \cdot (-3) \cdot e^{-3x+7}$

$= e^{-3x+7}(-3x^2 + 2x - 3)$

2. Ableitung:

$u(x) = -3x^2 + 2x - 3$, $v(x) = e^{-3x+7}$

$u'(x) = -6x + 2$, $v'(x) = -3 \cdot e^{-3x+7}$

$f''(x) = (-6x + 2) \cdot e^{-3x+7}$

$+ (-3x^2 + 2x - 3) \cdot (-3) \cdot e^{-3x+7}$

$= e^{-3x+7}(9x^2 - 12x + 11)$

b) 1. Ableitung:

$u(x) = 2x$, $v(x) = \sin(x)$

$u'(x) = 2$, $v'(x) = \cos(x)$

$f'(x) = 2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x)$

1. Ableitung von g mit $g(x) = 2x \cdot \cos(x)$

$u(x) = 2x$, $v(x) = \cos(x)$

$u'(x) = 2$, $v'(x) = -\sin(x)$

$g'(x) = 2 \cdot \cos(x) - 2x \cdot \sin(x)$,

Die 2. Ableitung von f ist damit

$f''(x) = 2\cos(x) + 2 \cdot \cos(x) - 2x \cdot \sin(x)$

$= 4\cos(x) - 2x\sin(x)$

Strategie:
Das Ausklammern des Terms e^{-3x+7} in Teilaufgabe a) ist wichtig für die weitere Arbeit mit der Ableitungsfunktion. Man erhält erneut das Produkt zweier Funktionen.

Beispiel 2 Flächeninhalte berechnen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (2x - 1) \cdot e^x$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = (2x - 3) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[-5; 0{,}5]$ eingeschlossen wird, mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung.

c) Überprüfen Sie Ihre Lösungen mithilfe eines MMS.

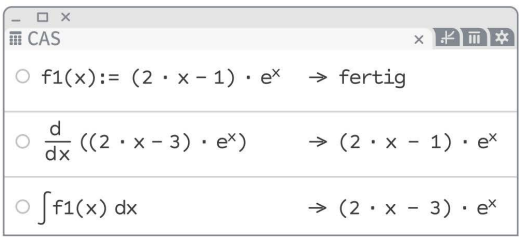
Lösung

a) Mit $u(x) = 2x - 3$ und $v(x) = e^x$ ergibt sich $u'(x) = 2$ und $v'(x) = e^x$.

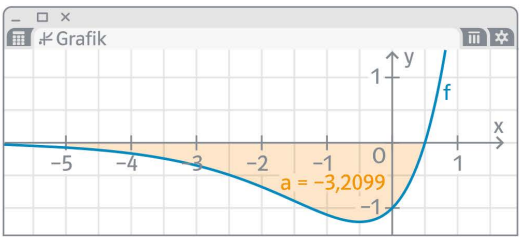
Man erhält $F'(x) = 2 \cdot e^x + (2x - 3) \cdot e^x = e^x(2x - 1) = f(x)$.

b) $\int_{-5}^{0{,}5} f(x)\,dx = \left[(2x - 3)e^x\right]_{-5}^{0{,}5} = (2 \cdot 0{,}5 - 3)e^{0{,}5} - (2 \cdot (-5) - 3)e^{-5} \approx -3{,}2$, also $A \approx 3{,}2$.

c) Kontrolle der Stammfunktion



Kontrolle des Flächeninhalts



D1 **MMS-Anleitung**
Ableitungsfunktion, Flächeninhalt bestimmen

Aufgaben

○ **1** Ergänzen Sie.

a) $g(x) = x^2 \cdot \sin(x)$; $g'(x) = \square \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \triangle$

b) $h(x) = \sqrt{x} \cdot (4x + 1)$; $h'(x) = \square \cdot (4x + 1) + \triangle \cdot 4$

c) $k(x) = (2x - 3) \cdot \cos(x)$; $k'(x) = \square \cdot \cos(x) - (2x - 3) \cdot \triangle$

→ **Lerntipp**
Seite 148, Beispiel 1

○ **2** Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.

a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$ b) $f(x) = 3x \cdot \cos(x)$ c) $f(x) = (3x + 2) \cdot \sqrt{x}$

d) $f(x) = (2x - 3) \cdot \sqrt{x}$ e) $f(x) = \frac{3}{x} \cdot \sin(x)$ f) $f(x) = (5 - 3x) \cdot \sin(x)$

g) $f(x) = \frac{2}{x} \cdot \cos(x)$ h) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ i) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

○ **3** Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = x \cdot e^{x+1}$ b) $f(x) = 2x \cdot e^x$ c) $f(x) = (4x - 1) \cdot e^{2x}$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^{0{,}5x - 5}$ ■ e) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ ■ f) $f(x) = x^2 \cdot 0{,}5 \cdot \ln(x)$

○ **4** Ordnen Sie die Stammfunktionen ihren Funktionen zu.

$F_A(x) = (x - 1) \cdot e^x$ $F_B(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$ $F_C(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^x$ $F_D(x) = x \cdot e^x$ $F_E(x) = (x - 2) \cdot e^x + 1$

$f_1(x) = (x^2 - 2) \cdot e^x$ $f_2(x) = x \cdot e^x$ $f_3(x) = x^2 e^x$ $f_4(x) = (x + 1) \cdot e^x$ $f_5(x) = (x - 1) \cdot e^x$

○ **5** Bestimmen Sie die erste Ableitung mit den beiden angegebenen Möglichkeiten.
Welche finden Sie am effizientesten? Tauschen Sie sich im Kurs darüber aus.

Produktregel

erst ausmultiplizieren, dann ableiten

a) $f(x) = (2x^3 + x) \cdot \frac{1}{x}$ b) $f(x) = (2x^3 + x) \cdot (x + 5)$ c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2 + 1)$

○ **6** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse.
b) Ermitteln Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1|f(1))$.
c) Zeigen Sie, dass der Graph von f für $x = \frac{1}{3}$ eine waagerechte Tangente hat.
d) Skizzieren Sie den Graphen von f und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einem MMS.

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 460

○ **7** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x - 1)e^x$.

a) Ermitteln Sie die Stelle x, an der der Graph von f die x-Achse schneidet.
b) Ermitteln Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1|f(1))$.
c) Geben Sie an, in welchen Punkten der Graph von f waagerechte Tangenten hat.
d) Skizzieren Sie den Graphen von f und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einem MMS.

◒ **8** Maris notiert eine Merkhilfe zur Produktregel.
Formulieren Sie eine Erklärung dazu.

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$
$u(x)$ $u'(x)$
$v(x)$ $v'(x)$

◒ **9** **Finden Sie den Fehler!**
Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie die richtige Lösung.

a) $f(x) = (2x - 8) \cdot e^x$
$f'(x) = 2 \cdot e^x$

b) $f(x) = (3x + 8) \cdot \cos(x)$
$f'(x) = 3 \cdot \cos(x) + (3x + 8) \cdot \sin(x)$

◒ **10** Geben Sie jeweils alle Regeln an, die zum Ableiten benötigt werden und leiten Sie ab.

$f(x) = x^2 + \sin(x)$ A $f(x) = (x + 1)^2$ B $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{x}$ C $f(x) = 2\cos(x)$ D
$f(x) = (x - 2)e^x$ E $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ F $f(x) = 4\sqrt{x} + 1$ G $f(x) = x \cdot \cos(x) + e^x$ H

I Potenzregel II Faktorregel III Summenregel IV Produktregel

◒ **11** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^x$.

a) Bestimmen Sie rechnerisch jeweils die Steigung der beiden Tangenten an den Graphen von f in den Schnittpunkten des Graphen mit der x-Achse.
b) Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist.
c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

→ **Lerntipp**
Seite 148, Beispiel 2

12 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist.

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(x) = 2x \cdot \cos(x) + (x^2 - 2) \cdot \sin(x)$ eine Stammfunktion von f ist.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ mit der x-Achse einschließt.

13 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$.

a) Bestimmen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung der Funktion f.

b) Äußern Sie eine Vermutung, wie die vierte, fünfte, …, n-te Ableitung lautet.

c) Kontrollieren Sie Ihre Vermutung mit einem MMS.

14 a) Betrachten Sie die Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot v(x)$.
Zeigen Sie, dass $f'(x) = e^x \cdot (v(x) + v'(x))$ ist.

b) Ermitteln Sie mithilfe von Teilaufgabe a) eine Stammfunktion für die Funktion g mit $g(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x)$.

c) Finden Sie weitere Aufgaben, die mithilfe von Teilaufgabe a) gelöst werden können.

Test 2

Lösungen, Seite 460

15 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin(x)$.

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Koordinatenursprung.

b) Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = \sin(x) - x \cdot \cos(x)$ eine Stammfunktion von f ist.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die im Intervall $[-\pi; \pi]$ vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

16 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Wenn die Graphen der Funktionen f und g an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente haben, so hat auch der Graph von $f \cdot g$ an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente.

b) Wenn $g'(x_0) = -g(x_0)$ für eine Stelle x_0 gilt, dann hat die Funktion f mit $f(x) = g(x) \cdot e^x$ bei x_0 eine Extremstelle.

c) Wenn der Graph einer Funktion f die x-Achse im Punkt $P(2|0)$ berührt, dann berührt der Graph der Funktion g mit $g(x) = x \cdot f(x)$ die x-Achse ebenfalls im Punkt P.

17 Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = (x^2 + a)\sqrt{x}$ $(a \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^{\geq 0})$.

a) Ermitteln Sie, für welche Werte von a der Graph der Funktion f_a mehr als eine Schnittstelle mit der x-Achse hat.

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktion F_a mit $F_a(x) = \left(\frac{2}{7}x^3 + \frac{2}{3}ax\right)x^{\frac{1}{2}}$ eine Stammfunktion von f_a ist.

Tipp:
$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

c) Ermitteln Sie für $a < 0$ den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_a mit der x-Achse einschließt.

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt aus Teilaufgabe c) für $a = -1$.

Grundwissen Test — Vektoren berechnen und einzeichnen

Grundwissen, Seite 420
Lösungen, Seite 460

G **18** Gegeben sind die Punkte $A(2|0|1)$, $B(3|-3|3)$ und $C(-1|-2|-3)$.

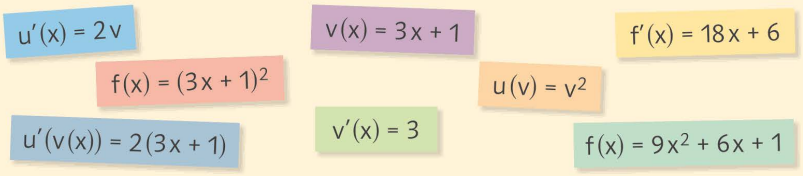
a) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ und seine Länge $|\vec{v}|$.

b) Geben Sie an, auf welchen Punkt D der Vektor $\vec{v}$ den Punkt C verschiebt.

c) Zeichnen Sie zwei Pfeile, die zum Vektor $\vec{v}$ gehören, in ein Koordinatensystem.

4 Kettenregel

Erläutern Sie, wie die einzelnen Kärtchen zusammenhängen.
Erstellen Sie entsprechende Kärtchen für die Funktionen f und g mit $f(x) = (x + 2)^2$ und $g(x) = (e^x - 1)^2$.



Wie für Funktionen, die Produkte anderer Funktionen sind, benötigt man für Verkettungen ein besonderes Verfahren, um die Ableitung bilden zu können. Im Folgenden wird eine Regel erarbeitet, mit der man beliebige differenzierbare, verkettete Funktionen ableiten kann.

Für die verkettete Funktion f mit $f(x) = u(v(x))$ ist $\frac{u(v(x_0 + h)) - u(v(x_0))}{h}$ der Differenzenquotient.

Ähnlich wie bei der Produktregel wird er auf bekannte Differenzenquotienten zurückgeführt.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$f(x) = u(v(x))$

$$= \frac{u(v(x_0 + h)) - u(v(x_0))}{h}$$

Mit $v(x_0 + h) - v(x_0) \neq 0$ erweitern

$$= \frac{u(v(x_0 + h)) - u(v(x_0))}{v(x_0 + h) - v(x_0)} \cdot \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}$$

$v(x_0 + h) - v(x_0) = d$ festlegen und umformen zu $v(x_0 + h) = v(x_0) + d$

$$= \frac{u(v(x_0) + d) - u(v(x_0))}{d} \cdot \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}$$

Für $h \to 0$ gilt $d = v(x_0 + h) - v(x_0) \to 0$. Man erhält $f'(x_0) = u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)$.

Kettenregel
Ist $f = u \circ v$ eine Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen u und v mit $f(x) = u(v(x))$, so ist auch f differenzierbar und es gilt:

$$\mathbf{f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$$

Merkregel:
„äußere Ableitung“
mal
„innere Ableitung“

Die Kettenregel kann verwendet werden, um die Gültigkeit der Potenzregel für Potenzfunktionen mit ganzzahligen bzw. rationalen Exponenten zu beweisen.

Der Nachweis soll auf Schulbuchseite 154 in Aufgabe 19 und 20 geführt werden.

Erinnerung:
$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

Beispiel 1 **Kettenregel anwenden**
Leiten Sie ab und vereinfachen Sie das Ergebnis.

a) $f(x) = 4e^{2x-1}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 2}$

c) $f(x) = 3\ln(2x)$

Lösung

a) $u(v) = 4e^v$
$u'(v) = 4e^v$
$v(x) = 2x - 1$
$v'(x) = 2$
$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
$= 4e^{2x-1} \cdot 2$
$= 8e^{2x-1}$

b) $u(v) = \sqrt[3]{v} = v^{\frac{1}{3}}$
$u'(v) = \frac{1}{3}v^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}$
$v(x) = x^4 - 2$
$v'(x) = 4x^3$
$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
$= \frac{1}{3}(x^4 - 2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x^3$
$= \frac{4}{3}x^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x^4 - 2)^2}}$
$= \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(x^4 - 2)^2}}$

c) $u(v) = 3\ln(v)$
$u'(v) = \frac{3}{v}$
$v(x) = 2x$
$v'(x) = 2$
$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
$= \frac{3}{2x} \cdot 2$
$= \frac{3}{x}$

Beispiel 2 **Produkt- und Kettenregel anwenden**

Bestimmen Sie die Ableitung von f mit $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{4x^2 - 3}$.

Lösung

Es handelt sich um ein Produkt von $(x^2 - 1)$ und $e^{4x^2 - 3}$, daher ist die Produktregel notwendig. Um $e^{4x^2 - 3}$ abzuleiten, wird aber zunächst die Kettenregel benötigt. Deswegen erfolgt die Ableitung von f in zwei Schritten.

Schritt 1: $e^{4x^2 - 3}$ ableiten

$u(v) = e^v$, $u'(v) = e^v$

$v(x) = 4x^2 - 3$, $v'(x) = 8x$

$g'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = e^{4x^2 - 3} \cdot 8x = 8x e^{4x^2 - 3}$

Schritt 2: $f(x)$ ableiten

$u(x) = x^2 - 1$, $u'(x) = 2x$

$v(x) = e^{4x^2 - 3}$, $v'(x) = 8x e^{4x^2 - 3}$

$f'(x) = 2x \cdot e^{4x^2 - 3} + (x^2 - 1) \cdot 8x e^{4x^2 - 3} = e^{4x^2 - 3}(2x + 8x(x^2 - 1)) = e^{4x^2 - 3}(8x^3 - 6x)$

Aufgaben

1 Füllen Sie die Lücken mithilfe der Kärtchen. Die übrig gebliebenen Kärtchen ergeben in der richtigen Reihenfolge ein Lösungswort.

a) $f(x) = 2\sin(4x)$ b) $g(x) = 0{,}5(1 - 3x)^4$ c) $h(x) = -\sqrt[3]{x^2}$ d) $i(x) = 2e^x$

$f'(x) = \square \cos(\square x)$ $g'(x) = \square (1 - 3x)^{\square}$ $h'(x) = \frac{\square}{3\sqrt[3]{x}}$ $i'(x) = \square e^x$

O −1	S 8	L −3	A −4	D 4	E −6	M 3	V 6	K −2	R 2

2 Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion f'.

a) $f(x) = \sin(3x)$ b) $f(x) = 2\cos(0{,}5x)$ c) $f(x) = -\sin(2x)$

d) $f(x) = -\cos(3x - 1)$ e) $f(x) = -2\sin(x^2)$ f) $f(x) = -0{,}5\sin(x^3)$

3 Bestimmen Sie die erste Ableitung und vereinfachen Sie das Ergebnis. Geben Sie D_f an.

Lerntipp Seite 151, Beispiel 1

a) $f(x) = e^{2x}$ b) $f(x) = e^{-4x}$ c) $f(x) = 4 \cdot e^{2x - 3}$ d) $f(x) = \frac{e^{1 - x}}{2}$

e) $f(x) = \ln(2x)$ f) $f(x) = 8 \cdot \ln(x + 3)$ g) $f(x) = \ln(x^2)$ h) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

4 Bestimmen Sie D_f und bestimmen Sie eine Gleichung der Ableitungsfunktion f'.

a) $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^3}$ b) $f(x) = \frac{1}{(1 - x)^3}$ c) $f(x) = \frac{1}{(3x + 2)^2}$ d) $f(x) = \frac{1}{3}(x + 2)^{-2}$

e) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ f) $f(t) = \sqrt{3t + 1}$ g) $f(x) = \sqrt{5x^2 + 1}$ h) $f(t) = \sqrt{\frac{2}{t}}$

5 Bestimmen Sie die erste Ableitung mit jeder der drei Möglichkeiten. Welche finden Sie am effizientesten? Tauschen Sie sich im Kurs darüber aus.

a) $f(x) = (3x + 1)^2$ b) $f(x) = (3x^2 + x)^2$

Kettenregel | Produktregel | erst ausmultiplizieren, dann ableiten

Test 1

Lösungen, Seite 461

6 Bestimmen Sie die erste Ableitung und vereinfachen Sie das Ergebnis. Geben Sie D_f an.

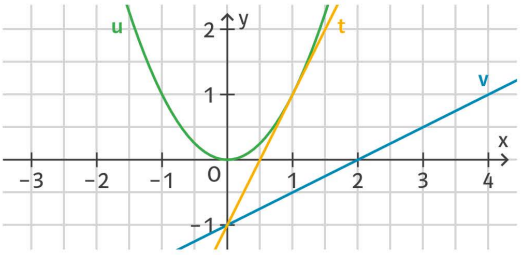
a) $f(x) = 4\sin(0{,}2x)$ b) $f(x) = -3\cos(x^2 + 2)$ c) $f(x) = 0{,}7e^{-2x + 1}$

d) $f(x) = e^{-0{,}2x + 3}$ e) $f(x) = 3\ln(x + 1)$ f) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(3x)$

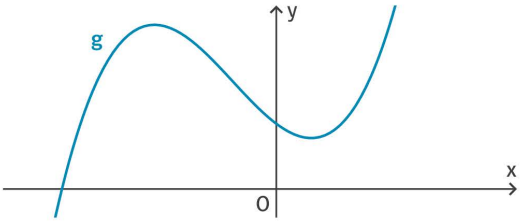
7 Bestimmen Sie D_f und bestimmen Sie eine Funktionsgleichung der Ableitung von f.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ b) $f(x) = (4x + 0{,}5)^{-\frac{1}{2}}$ c) $f(x) = \sqrt{\frac{3}{x}}$

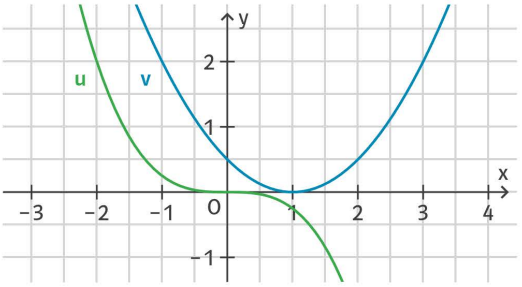
8 a) Gegeben sind die Graphen der Funktionen u und v.
Bilden Sie $f(x) = u(v(x))$ und erläutern Sie mithilfe der Grafik und der Kettenregel, dass $f'(4) = u'(v(4)) \cdot v'(4) = 1$ gilt.
b) Arbeiten Sie zu zweit und stellen Sie sich gegenseitig ähnliche Aufgaben.



9 Rechts ist der Graph einer differenzierbaren Funktion g abgebildet. Für den Definitionsbereich von g gilt $D_g = \mathbb{R}$. Betrachtet werden eine differenzierbare Funktion f sowie ihre Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = e^{g(x)}$.
a) Begründen Sie, dass f keine Extremstellen hat.
b) Untersuchen Sie f auf Wendestellen.



10 Gegeben sind die Graphen der kubischen Funktion u und der quadratischen Funktion v. Weiterhin sei die Funktion $f = u \circ v$ gegeben.
a) Bestimmen Sie näherungsweise die Werte von $f(3)$ und $f'(3)$.
b) Begründen Sie, welchen Grad die Funktion f und f' jeweils haben.
c) Begründen Sie, dass $x = 1$ die einzige Nullstelle der Ableitungsfunktion f' ist.



11 a) Zeigen Sie: Die Funktion f mit $f(x) = g(x^2)$ hat die Ableitung $f'(x) = 2x \cdot g'(x^2)$.
b) Leiten Sie entsprechend ab: $f_1(x) = g(3x)$; $f_2(x) = g(1 - x)$; $f_3(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$.

12 **Wahr oder falsch?**
Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.
a) Wenn die Ableitung einer Funktion g an einer Stelle x_0 gleich null ist, dann ist auch die Ableitung von $f \circ g$ für eine Funktion f an der Stelle x_0 gleich null.
b) Wenn für zwei Funktionen f und g gilt, dass $g(x) = f(x + 1)$, dann gilt auch $g'(x) = f'(x + 1)$.
c) Wenn für zwei Funktionen f und g gilt, dass $f(x) = g(x^2)$, dann hat der Graph von f an der Stelle $x = 0$ eine waagerechte Tangente.
d) Für die Funktionen f und g mit $g(x) = (f(x))^2$ gilt: Wenn $f'(x_0) = 0$, dann folgt $g'(x_0) = 0$, aber nicht umgekehrt.

Wenn eine Schlussfolgerung für ein einziges Beispiel falsch ist, dann ist sie nicht allgemein gültig.

13 Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f und bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = x \cdot \sin(3x)$
b) $f(x) = (3x + 4)^2 \cdot \sin(x)$
c) $f(x) = 1{,}5x \cdot \cos(2x^2)$
d) $f(x) = (5 - x^4)^3 \cdot (1 - 4x)$
e) $f(x) = (5 - 4x)^3 \cdot x^{-2}$
f) $f(x) = (7 + x^2)^2 \cdot (2x)^{\frac{3}{2}}$
g) $f(x) = (1 + x^{-3})^2 \cdot e^{5x}$
h) $f(x) = (x^2 + x) \cdot e^{0{,}5x}$
i) $f(x) = \cos(2x) \cdot e^{2x}$
j) $f(x) = e^x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
k) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}} \cdot \ln(2x)$
l) $f(x) = \sin(2x) \cdot \ln(x^2)$

→ **Lerntipp**
Seite 152, Beispiel 2

14 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{(1 + 2x)^2}$.
a) Geben Sie die Definitionsmenge von f an.
b) Ermitteln Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ f streng monoton abnehmend ist.
c) Begründen Sie, warum f keine Extremstellen haben kann.
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(0 \mid f(0))$.

15 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x \cdot e^{x^2-2}$.

a) Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = e^{x^2-2}$ eine Stammfunktion von f ist.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ einschließen.

c) Begründen Sie, dass das Integral $\int_{-a}^{a} (2x e^{x^2-2})\,dx$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ null ist.

16 Gegeben sind die Funktionen u, v und w mit $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = x^2 + 1$ und $w(x) = \frac{1}{x}$.

a) Bilden Sie vier Verkettungen von je zwei der Funktionen und bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion.

b) Bilden Sie drei verschiedene Verkettungen von u, v und w und leiten Sie diese ab.

Test 2

Lösungen, Seite 461

17 Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f, und berechnen Sie die erste Ableitung. Vereinfachen Sie gegebenenfalls das Ergebnis.

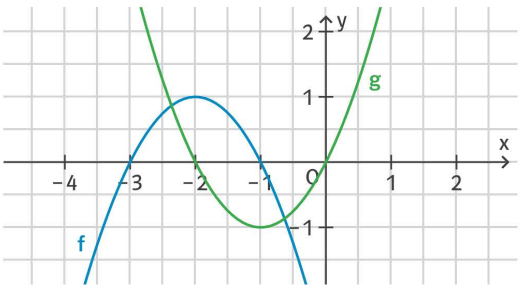
a) $f(x) = 5x^3 \cdot e^{x^2-2x}$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot \cos(3x)$ **c)** $f(x) = \sin(x^2) + \sqrt{7}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-3)^2}$ **e)** $f(x) = e^x \cdot (3x+1)^{-\frac{1}{5}}$ **f)** $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(x^2 - 2)$

18 Gegeben sind die beiden Graphen der quadratischen Funktionen f und g sowie ihre Verkettungen $h(x) = f(g(x))$ und $k(x) = g(f(x))$.
Begründen Sie die Aussage.

a) Der Graph der Funktion h hat an der Stelle $x = -1$ ein Extremum.

b) Die Tangente an den Graphen von k hat im Punkt $P(-1|k(-1))$ die Steigung -4.



19 **Nachweis der Potenzregel für ganzzahlige Exponenten mithilfe der Kettenregel**

Es wurde bereits gezeigt, dass die Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = n x^{n-1}$ hat und dass diese Potenzregel auch für $n = -1$ gilt. Zeigen Sie, dass die Potenzregel für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Gehen Sie wie folgt vor:

(1) Für $n < 0$ lässt sich f auch als $f(x) = x^n = x^{-k} = \frac{1}{x^k}$ mit $k = -n > 0$ schreiben.

(2) Wenden Sie auf die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^k}$ die Kettenregel an.

20 **Nachweis der Potenzregel für rationale Exponenten mithilfe der Kettenregel**

Zeigen Sie, dass die Potenzregel zur Ableitung von Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^r$ auch gilt, wenn der Exponent r rational ist. Gehen Sie wie folgt vor:

(1) Schreiben Sie $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

(2) Potenzieren Sie beide Seiten der Gleichung aus (1) mit n.

(3) Leiten Sie beide Seiten mithilfe der Kettenregel ab.

(4) Setzen Sie für f(x) den Funktionsterm aus (1) ein.

(5) Lösen Sie nach f'(x) auf.

Erinnerung:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Grundwissen Test — Mit Vektoren rechnen

Grundwissen, Seite 420
Lösungen, Seite 462

G **21** Die Grundfläche ABCD einer quadratischen Pyramide mit der Spitze S liegt in der x_1x_2-Ebene.

Gegeben sind der Punkt $A(1|-1|0)$ und die Vektoren $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte der Pyramide.

b) Berechnen Sie die Längen der Grundkanten und der Seitenkanten.

c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

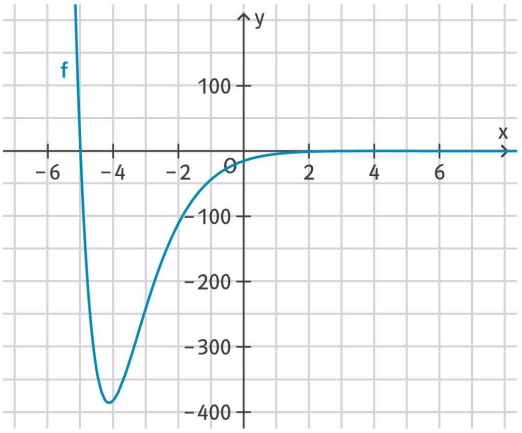
5 Zusammengesetzte Funktionen untersuchen

Der angegebene Term soll null werden. Finden Sie möglichst viele verschiedene geeignete Belegungsmöglichkeiten für die Variablen c und k.

$$c \cdot (e^k - 1) \cdot \frac{3 - c}{k + 1}$$

Die Eigenschaften ganzrationaler Funktionen wurden mithilfe ihres Funktionsterms sowie mit Mitteln der Differenzial- und Integralrechnung systematisch untersucht. Nachdem die zusammengesetzten Funktionen gebildet und wichtige Ableitungsregeln erarbeitet wurden, lassen sich auch deren charakteristische Punkte und Merkmale bestimmen. Im Folgenden liegt der Fokus auf Zusammensetzungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen.

Betrachtet wird die Funktion f mit $f(x) = (x^2 + 2x - 15) \cdot e^{-x}$.
Die Ableitungen f' und f'' werden mithilfe der bekannten Ableitungsregeln gebildet:
$f'(x) = (-x^2 + 17) \cdot e^{-x}$ und
$f''(x) = (x^2 - 2x - 17) \cdot e^{-x}$



Null-, Extrem- und Wendestellen
Ein Produkt ist dann gleich null, wenn einer der Faktoren null ist.
Da $e^{-x} \neq 0$ ist für $x \in \mathbb{R}$, werden jeweils die Nullstellen der ganzrationalen Faktoren von f, f' und f'' gesucht.

$f(x) = 0$, wenn $(x^2 + 2x - 15) = (x + 5)(x - 3) = 0$,
also sind $x_1 = -5$ und $x_2 = 3$ die **Nullstellen** von f.

$f'(x) = 0$, wenn $(-x^2 + 17) = 0$, also für $x_3 = \sqrt{17}$ und für $x_4 = -\sqrt{17}$.
$f''(\sqrt{17}) = \left((\sqrt{17})^2 - 2\sqrt{17} - 17\right) \cdot e^{-\sqrt{17}} = -2\sqrt{17} \cdot e^{-\sqrt{17}} < 0$,
also hat der Graph von f bei $x_3 = \sqrt{17}$ einen **Hochpunkt**.
$f''(-\sqrt{17}) = \left((-\sqrt{17})^2 - 2(-\sqrt{17}) - 17\right) \cdot e^{-(-\sqrt{17})} = 2\sqrt{17} \cdot e^{\sqrt{17}} > 0$,
also hat der Graph von f bei $x_4 = -\sqrt{17}$ einen **Tiefpunkt**.

Analog erhält man für $x_5 \approx 5{,}24$ und $x_6 \approx -3{,}24$ je einen Wendepunkt des Graphen von f.

Grenzverhalten
In der Tabelle wird exemplarisch der Einfluss der Faktoren $x^2 + 2x - 15$ und e^{-x} auf den Verlauf des Graphen von f betrachtet. Man erkennt, dass e^{-x} für große Werte von x schnell sehr klein wird.

	2	10	50
$x^2 + 2x - 15$	−7	105	2585
e^{-x}	0,135	0,000 045	$1{,}9 \cdot 10^{-22}$
$(x^2 + 2x - 15) \cdot e^{-x}$	−0,947	0,0048	$5 \cdot 10^{-19}$

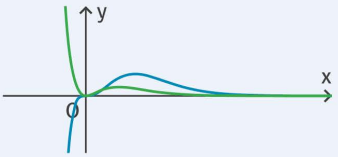
Ebenso wird das Produkt, also der Funktionsterm von f für große Werte von x sehr klein.
Der Graph von f nähert sich daher für große Werte von x der x-Achse an.
Insgesamt gilt:
$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2x - 15) \cdot e^{-x} = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 2x - 15) \cdot e^{-x} = 0$.

Für das Grenzverhalten von zusammengesetzten Funktionen gilt allgemein:
Für $x \to \pm\infty$ dominiert e^x.

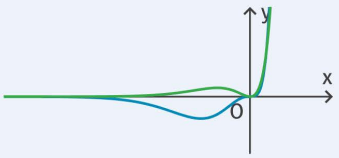
Zusammengesetzte Funktionen untersuchen

Beim Bestimmen der charakteristischen Punkte von zusammengesetzten Funktionen werden häufig die Nullstellen der ganzrationalen Faktoren von Funktionstermen bestimmt, da $e^x \neq 0$ ist für $x \in \mathbb{R}$.

Für $x \to +\infty$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:
$x^n \cdot e^{-x} \to 0$



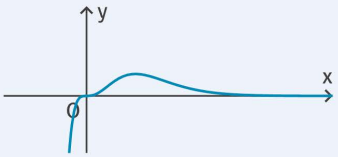
und $x^n \cdot e^x \to +\infty$.



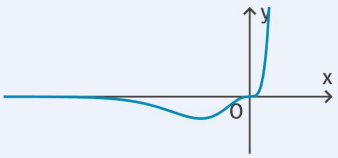
Für $x \to -\infty$ gilt für gerade $n \in \mathbb{N}$:
$x^n \cdot e^{-x} \to +\infty$

und $x^n \cdot e^x \to 0$.

Für $x \to -\infty$ gilt für ungerade $n \in \mathbb{N}$:
$x^n \cdot e^{-x} \to -\infty$



und $x^n \cdot e^x \to 0$.



Bei zusammengesetzten Funktionen braucht man manchmal auch Strategien, die bisher nicht benötigt wurden. Beispielsweise nutzt man zur Lösung der **Exponentialgleichung** $e^{2x} - 8e^x = 0$ ein Potenzgesetz:

$e^x \cdot e^x - 8e^x = 0 \quad | e^x$ ausklammern

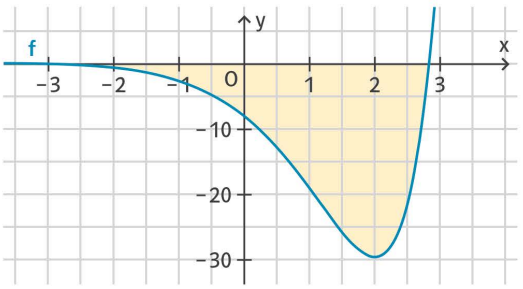
$e^x(e^x - 8) = 0 \quad | e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$e^x = 8$ bzw. $x = \ln 8$

$e^{2x} = e^x \cdot e^x$

Beispiel 1 **Nullstellen bestimmen – Integrale berechnen**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x - 8e^x$.



a) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Koordinatenursprung ist.

b) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von f für $x \to -\infty$.

c) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

d) Zeigen Sie rechnerisch, dass F mit $F(x) = (x^2 - 2x - 6)e^x$ eine Stammfunktion von f ist.

e) Berechnen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche A, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Lösung

a) $f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-x} - 8e^{-x} \neq f(x)$, f ist also nicht symmetrisch zur y-Achse.
$-f(-x) = -x^2 \cdot e^{-x} + 8e^{-x} \neq f(x)$, f ist also auch nicht symmetrisch zum Koordinatenursprung.

b) Für $x \to -\infty$ strebt $(x^2 - 8)$ gegen $+\infty$ und e^x gegen 0. Es gilt also $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

c) Nullstellen: $x^2 \cdot e^x - 8e^x = (x^2 - 8)e^x = 0 \quad | e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$x^2 - 8 = 0 \quad | + 8$

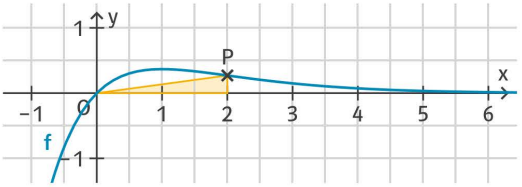
$x^2 = 8$, also $x_1 = -\sqrt{8}$ und $x_2 = \sqrt{8}$

d) Mit $u(x) = x^2 - 2x - 6$ und $v(x) = e^x$ erhält man mithilfe der Produktregel
$F'(x) = (2x - 2) \cdot e^x + (x^2 - 2x - 6)e^x = (x^2 - 8)e^x = f(x)$.

e) $\int\limits_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} f(x) = [F(x)]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} = (8 - 2\sqrt{8} - 6)e^{\sqrt{8}} - (8 + 2\sqrt{8} - 6)e^{-\sqrt{8}} \approx -62{,}32$, also ist $A \approx 62$ FE.

Beispiel 2 **Extremwertprobleme mit zusammengesetzten Funktionen lösen**

Der Punkt $P(u|v)$ liegt im Intervall $[0; 5]$ auf dem Graphen von f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$.
Ermitteln Sie, für welches u der Flächeninhalt A des in der Grafik eingezeichneten Dreiecks maximal wird.
Geben Sie den gesuchten Flächeninhalt an.



Lösung

1. Gesuchte Größe durch eine Formel beschreiben: $A = \frac{1}{2} \cdot u \cdot v$
2. Nebenbedingung formulieren: $v = f(u) = u \cdot e^{-u}$
3. Zielfunktion, die nur von einer Variablen abhängt: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot u \cdot e^{-u} = \frac{1}{2}u^2 \cdot e^{-u}$
4. Mithilfe der Produktregel erhält man $A'(u) = u \cdot e^{-u} + \frac{1}{2}u^2 \cdot (-e^{-u}) = u\left(1 - \frac{1}{2}u\right)e^{-u}$.
   notwendige Bedingung für Extremstellen: $A'(u) = 0$ für $u_1 = 0$ und $u_2 = 2$
   Weiter erhält man mit $A''(u) = (1 - u)e^{-u} + \left(u - \frac{1}{2}u^2\right) \cdot (-e^{-u}) = \left(\frac{1}{2}u^2 - 2u + 1\right)e^{-u}$ die hinreichende Bedingung:
   $A''(0) = e^0 > 0$. Man erhält also für das Randextremum ein Minimum mit $A(0) = 0$.
   $A''(2) = \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 1\right)e^{-2} = -e^{-2} < 0$. Man erhält ein lokales Maximum mit $A(2) \approx 0{,}27$.
   Für $u = 5$ ist $A(5) \approx 0{,}08$.
   Die Randwertbetrachtung zeigt: Der gesuchte maximale Flächeninhalt beträgt 0,27 FE.

Aufgaben

pq-Formel
binomische Formeln
Linearfaktorzerlegung
Substitution

○ **1** Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.
Die Kärtchen auf dem Rand liefern Tipps für die Lösungsstrategie.

a) $f(x) = (x^2 - 4x + 4)e^x$ b) $f(x) = (x^2 - 7x + 6)e^{-x}$ c) $f(x) = (2x^2 - 10x + 8)e^{2x}$

■ d) $f(x) = e^{x+1}(x^4 - 3x^2 - 4)$ ■ e) $f(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{2e^x}$ ■ f) $f(x) = 2e^{-x}(x^4 + 2x^2 + 1)$

○ **2** Berechnen Sie die Extremstellen der Funktion f.

a) $f(x) = x \cdot e^x$ b) $f(x) = (x + 2) \cdot e^x$ c) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$
d) $f(x) = (x^2 - 15)e^x$ e) $f(x) = x \cdot e^x - 3 \cdot e^x$ f) $f(x) = x \cdot e^{3x+1} + e^{3x+1}$

○ **3** Ermitteln Sie, ob der Graph von f symmetrisch zur y-Achse oder zum Koordinatenursprung ist.

a) $f(x) = e^x + e^{-x}$ b) $f(x) = e^{2x-5}$ c) $f(x) = e^{x^2}$ d) $f(x) = x^3 \cdot e^{3x}$

→ **Lerntipp** Seite 156, Beispiel 1a)

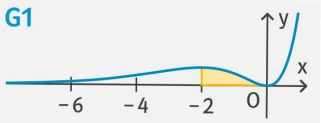
○ **4** a) Ordnen Sie der Funktion f jeweils ihre Stammfunktion F und ihren Graphen zu.
b) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

→ **Lerntipp** Seite 156, Beispiel 1c) und d)

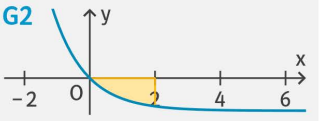
I $f(x) = (-x^2 + 1) \cdot e^x$ II $f(x) = e^{-x} - 1$ III $f(x) = x^2 \cdot e^x$

A $F(x) = -e^{-x} - x$ B $F(x) = (-x^2 + 2x - 1)e^x$ C $F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

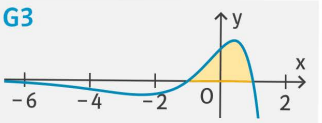
G1



G2



G3



○ **5** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x - 1)^2 \cdot e^x$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.
b) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = (x^2 - 4x + 5) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist.
c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit den Koordinatenachsen einschließt.
d) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.

Test 1

Lösungen, Seite 462

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 4x + 4) \cdot e^x$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie zum Koordinatenursprung und zur y-Achse.

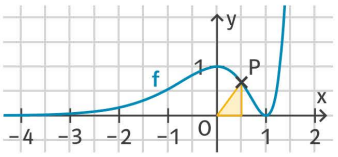
b) Bestimmen Sie Null- und Extremstellen von f.

c) Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = (x^2 - 6x + 10) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist.

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit den Koordinatenachsen einschließt.

e) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.

7 Für jedes $u \in [0; 1]$ ist durch $P(u|v)$ ein Punkt auf dem Graphen von f mit $f(x) = (x - 1)^2 \cdot e^{2x}$ gegeben.
Ermitteln Sie, für welchen Wert von u der Flächeninhalt A des in der Grafik eingezeichneten Dreiecks maximal wird. Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

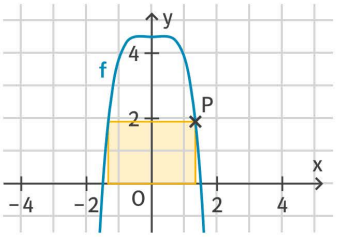


Lerntipp
Seite 157, Beispiel 2

8 Der Punkt $P(u|f(u))$ liegt im Intervall $[0; 1{,}5]$ auf dem Graphen von f mit $f(x) = (-x^2 + 2{,}25) \cdot (e^x + e^{-x})$.

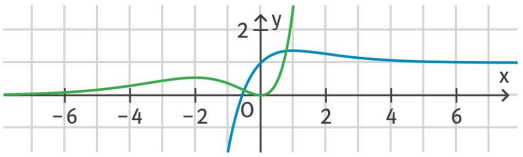
a) Zeigen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist.

b) Ermitteln Sie, für welchen Wert von u der Flächeninhalt A des in der Grafik eingezeichneten Rechtecks maximal wird. Geben Sie den gesuchten Flächeninhalt an.



9 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = xe^{-x} + 1$ und $g(x) = x^2 \cdot e^x$ und ihre Graphen.

a) Ordnen Sie begründet die Funktionsgleichungen ihren Graphen zu.



b) Zeigen Sie, dass die Funktionen F und G mit $F(x) = -(x + 1)e^{-x} + x$ und $G(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$ Stammfunktionen von f bzw. g sind.

c) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die von den beiden Funktionsgraphen eingeschlossen wird.

d) Begründen Sie, dass die Fläche, die im Intervall $[0; a]$ vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird, für $a \to +\infty$ unendlich groß wird.

e) Begründen Sie, dass die Fläche, die im Intervall $[b; 0]$ vom Graphen von g und der x-Achse eingeschlossen wird, für $b \to -\infty$ einen endlichen Inhalt hat.

10 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 10x \cdot e^{-0{,}5x^2}$.

a) Ermitteln Sie Null-, Extrem- und Wendestellen von f.

b) Weisen Sie nach, dass der Graph von f symmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

Die Funktion F mit $F(x) = -10 \cdot e^{-0{,}5x^2}$ ist eine Stammfunktion von f.

c) Zeigen Sie, dass $F' = f$ gilt.

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f im Intervall $[0; 4]$ mit der x-Achse einschließt.

e) Zeigen Sie, dass der Inhalt der Fläche, die der Graph von f im Intervall $[-a; a]$ mit der x-Achse einschließt, für $a \to +\infty$ endlich ist.

11 Gegeben ist die Funktionsschar g_b mit $g_b(x) = (x^3 + 2x^2 + bx + 1) \cdot e^x$.
Ermitteln Sie, für welche $b \in \mathbb{R}$ die Bedingungen auf den Kärtchen erfüllt sind.

A Die Funktion g_b hat für $x = -2$ eine Nullstelle.

B Der Graph von g_b hat bei $x = -3$ einen Tiefpunkt.

C Der Graph von g_b hat bei $x = -3$ eine Wendestelle.

12 Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = e^x - tx$ $(t \in \mathbb{R})$.

a) Geben Sie die Funktionsgleichungen der ersten und zweiten Ableitung an.

b) Begründen Sie: (I) Für $t \leq 0$ hat f_t kein Extremum.

(II) Es gibt kein $t \in \mathbb{R}$, sodass der Graph von f_t einen Wendepunkt hat.

c) Zeigen Sie: Für alle $t \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $P(0|1)$ auf dem Graphen von f_t.

d) Begründen Sie mithilfe des Grenzverhaltens von f_t, dass f_t für $t < 0$ eine Nullstelle hat.

e) Begründen Sie, dass f_t für $t < 0$ genau eine Nullstelle hat.

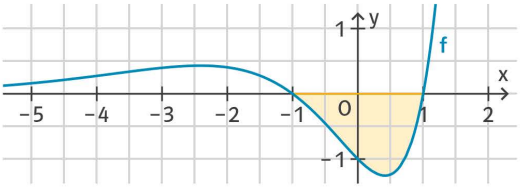
13 Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = (x^2 + k) \cdot e^x$ $(k \in \mathbb{R})$.

Lerntipp Seite 156, Beispiel 1b)

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f_{-1}, f_0 und f_1. Ziehen Sie Rückschlüsse über die Anzahl der Nullstellen für $k < 0$ bzw. $k > 0$.

b) Ermitteln Sie die Anzahl der Extrema in Abhängigkeit von k.

c) Der Graph von f_{-1} schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Ermitteln Sie den zugehörigen Flächeninhalt.



Test 2

Lösungen, Seite 462

14 Gegeben ist die Funktionsschar $f_k(x) = (x^2 + kx + 1) \cdot e^x$ $(k \in \mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass f_k für $k = 2$ genau eine Nullstelle hat. Geben Sie die Nullstelle an.

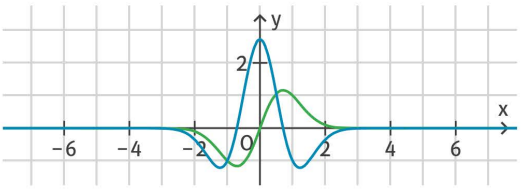
b) Zeigen Sie, dass die Nullstelle von f_2 auch eine Extremstelle ist. Ermitteln Sie, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

c) Zeigen Sie, dass der Graph von f_k für $x = -1$ für alle $k \in \mathbb{R}$ eine waagerechte Tangente hat. Prüfen Sie, in welchen Fällen ein Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt vorliegt.

d) Bestimmen Sie das Verhalten für $x \to \pm\infty$ von f_k.

15 Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$ und die Graphen von f und f'.

a) Begründen Sie, welcher Graph zu f und welcher zu f' gehört.



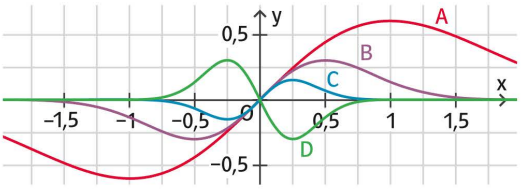
Gegeben ist weiter die Funktion g mit $g(x) = (x - 1) \cdot e^{1-(x-1)^2} + 2$.

b) Stellen Sie den Funktionsterm von g mithilfe des Funktionsterms von f auf. Beschreiben Sie, wie der Graph von g schrittweise aus dem Graphen von f hervorgeht.

c) Begründen Sie, dass die Funktion g keine Nullstellen hat.

16 Gegeben ist die Funktionsschar $g_{a;b}$ mit $g_{a;b}(x) = ax \cdot e^{-bx^2}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ b > 0)$.

a) Untersuchen Sie die Graphen der Schar auf Symmetrie.



Die Ableitung von $g_{a;b}$ ist $g'_{a;b}$ mit $g'_{a;b}(x) = ae^{-bx^2}(1 - 2bx^2)$.

b) Weisen Sie nach, dass $g'_{a;b}$ die Ableitungsfunktion ist.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte der Graphen in Abhängigkeit von a und b.

d) Beschreiben Sie die Wirkung einer Erhöhung der Parameter a und b auf den Graphen.

e) Geben Sie jeweils die Werte von a und b zu den vier abgebildeten Graphen an.

Grundwissen Test — Mittelpunkte mit Vektoren berechnen

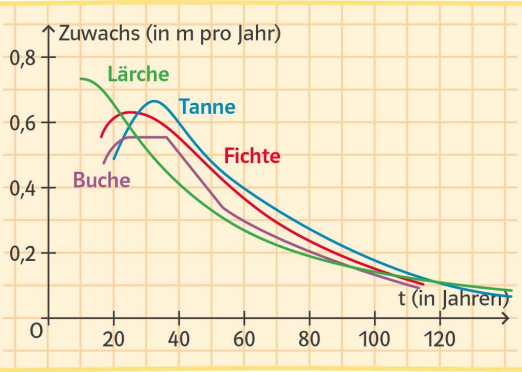
Grundwissen, Seite 420
Lösungen, Seite 463

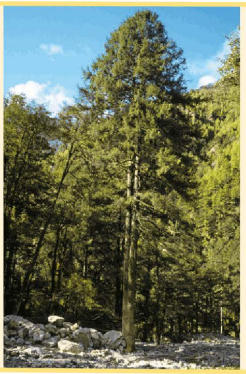
G **17** a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ für die Punkte $A(1|3)$ und $B(3|2)$.

b) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$. Bestimmen Sie für $C(2|3|4)$ und $M(2{,}5|4|3)$ die Koordinaten des Punktes D.

6 Zusammengesetzte Funktionen im Kontext

Die Figur zeigt artspezifische Unterschiede des Zuwachses in Metern pro Jahr von Lärchen, Fichten, Tannen und Buchen.
Beurteilen Sie die folgenden Aussagen.
Felix: „Die Kurven sind fast gleich."
Carlo: „Komisch, die Bäume werden ja immer kleiner."
Shaya: „Die Lärche wird am größten."
Olivia: „Die Bäume sind nach 80 Jahren alle etwa 32 Meter hoch."

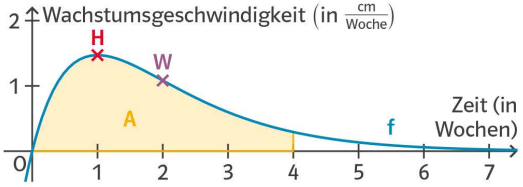




Die Verwendung von zusammengesetzten Funktionen ermöglicht die Beschreibung einer größeren Bandbreite von Sachzusammenhängen. Neben Zusammensetzungen mit Exponentialfunktionen werden auch solche mit trigonometrischen Funktionen betrachtet.

Wenn Änderungsraten Ausgangspunkt der Fragestellungen sind, ist es wichtig, sich zunächst Klarheit über die Bedeutung charakteristischer Punkte zu verschaffen, um dann die Fragen aus dem Sachzusammenhang in mathematische Fragen zu übersetzen.

Eine Modellfunktion f soll verwendet werden, um die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze zu beschreiben (vgl. Grafik).
Es ergeben sich für die Funktion f z. B. folgende Fragen im Kontext, zu denen eine mathematische Frage formuliert wird:



Frage im Kontext	mathematische Frage	möglicher Lösungsansatz
Wann wächst die Pflanze nicht?	Wo hat die Funktion f Nullstellen?	Lösen der Gleichung $f(t) = 0$
Wann ist die Wachstumsgeschwindigkeit am größten?	An welcher Stelle erreicht die Funktion f ihr globales Maximum?	globalen Hochpunkt H des Graphen von f bestimmen, Randextrema berücksichtigen
Wann nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit am stärksten ab?	An welcher Stelle erreicht die Ableitung von f ihr globales Minimum?	Bestimmen des globalen Minimums von f' bzw. des Wendepunkts W des Graphen von f
Wie viel ist die Pflanze in den ersten vier Wochen gewachsen?	Welchen orientierten Flächeninhalt A schließt der Graph von f mit der x-Achse im Intervall $[0; 4]$ ein?	Berechnung des Integrals $\int_0^4 f(t)\,dt$
Welche Höhe hat die Pflanze nach vier Wochen?	Welche Höhe hat die Pflanze zu Beginn der Beobachtung? Diese kommt zum Flächeninhalt A hinzu.	Addition der Anfangshöhe zum Wert des Integrals $\int_0^4 f(t)\,dt$

Tipp:
Um die Bedeutung des Integrals zu erkennen, kann man die Einheiten der beiden Achsen miteinander multiplizieren.

Mathematisieren bei zusammengesetzten Funktionen
Wenn eine Funktion f den Zusammenhang von Größen beschreibt, kann man in folgender Weise Fragen im Kontext beantworten.
1. Fragen aus dem Kontext in mathematische Fragen übersetzen.
2. Mathematische Lösungen mithilfe geeigneter Ansätze bestimmen.
3. Mathematische Lösungen im Kontext interpretieren und überprüfen.

Beispiel **Zusammengesetzte Funktion im Kontext untersuchen**

Auf einer Teststrecke wurde die Geschwindigkeit v eines Testfahrzeugs für $t \in [0; 30]$ mithilfe der Modellfunktion v mit $v(t) = \frac{25}{9}t^2 \cdot e^{-0,25t}$ (t in s, $v(t)$ in $\frac{m}{s}$) dargestellt.

a) Geben Sie den Zeitpunkt der maximalen Geschwindigkeit an und ermitteln Sie die maximale Geschwindigkeit des Testfahrzeugs in $\frac{km}{h}$.

b) Ermitteln Sie die Strecke, die das Fahrzeug in den ersten 30 Sekunden zurücklegt.

c) Ermitteln Sie, wann im vorliegenden Modell die maximale Beschleunigung erreicht wird.

Lösung

a) Der Hochpunkt $H(8\,|\,24{,}06)$ zeigt an, zu welchem Zeitpunkt die Geschwindigkeit maximal ist.
Nach 8 Sekunden beträgt die Geschwindigkeit ca. $24{,}1\frac{m}{s}$ (vgl. Fig. 1).
$24{,}1\frac{m}{s} = \frac{241\,m}{10\,s} = \frac{86\,760\,m}{3600\,s} = \frac{86\,760}{1}\frac{m}{h}$
Die Geschwindigkeit beträgt also knapp $87\frac{km}{h}$.

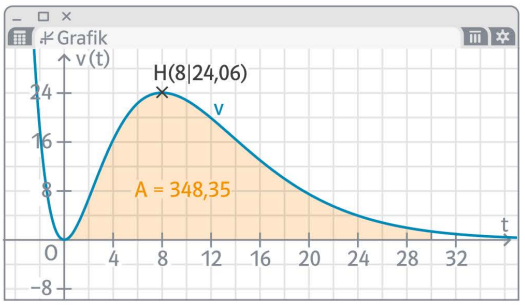


Fig. 1

b) Die gesuchte Strecke erhält man mithilfe des Integrals (vgl. Fig. 1):
$\int_0^{30} v(t)\,dt \approx 348{,}35$
Das Testfahrzeug legt in den ersten 30 Sekunden ca. 348,4 m zurück.

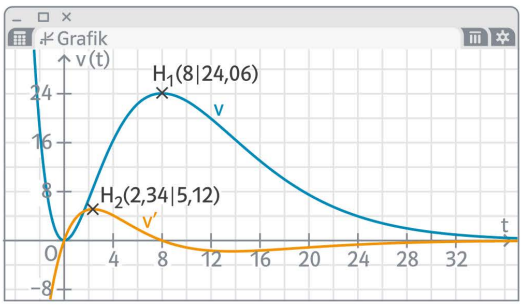


Fig. 2

c) Die Beschleunigung entspricht der Änderungsrate der Geschwindigkeit. Daher ist das Maximum der ersten Ableitung gesucht. Mithilfe eines MMS erhält man die Maximalbeschleunigung zum Zeitpunkt $t \approx 2{,}3$ Sekunden (vgl. Fig. 2).

Aufgaben

○ **1** Ein Fußballverein verwendet die Modellfunktion f mit $f(x) = 20x \cdot e^{-0,05x+2}$, um näherungsweise die Anzahl der Zuschauer zu beschreiben, die pro Minute zu einer bestimmten Uhrzeit in ein Stadion kommen.

→ **Lerntipp** Seite 161, Beispiel

Der Wert $x = 0$ entspricht 16 Uhr. Das Spiel beginnt um 18 Uhr.

a) Bestimmen Sie, um wie viel Uhr der Besucherandrang an den Eingängen am größten ist.

b) Ermitteln Sie, wie viele Zuschauer bei Anpfiff des Spiels laut Modell im Stadion sind, wenn man davon ausgeht, dass das Stadion um 16 Uhr noch leer ist.

○ **2** Die Funktion f mit $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)e^{-\frac{1}{4}x}$ beschreibt den Querschnitt eines Grabens. Die Füllhöhe des Wassers im Normalzustand wird im Modell durch die x-Achse angezeigt (1 LE ≙ 1 m).

a) Bestimmen Sie die Querschnittsfläche des Wassers im Graben im Normalzustand.

b) Berechnen Sie, wie lang ein Graben mit dem durch f gegebenen Querschnitt ist, wenn er im Normalzustand 190 m^3 Wasser enthält.

c) Erläutern Sie kurz, welche Modellannahmen bei der Aufgabe getroffen werden.

3 Eine Kleinstadt hat im Jahr 2016 mehrere Bauprojekte umgesetzt, da die Einwohneranzahl der Kleinstadt zugenommen hatte. Zählungen haben ergeben, dass sich die Zunahme der Einwohner mit der Funktion f mit $f(x) = 1000x^2 \cdot e^{-x}$ modellieren lässt ($x = 0$ entspricht 2016).

a) Berechnen Sie, wann die Anzahl der Einwohner in der Kleinstadt laut Modell am stärksten zunimmt.

b) Berechnen Sie, wie sich die Einwohnerzahl der Kleinstadt von 2016 bis 2024 verändert hat.

c) Ermitteln Sie, um wie viele Personen die Einwohnerzahl laut Modell auf lange Sicht steigen wird.

Lerntipp
Seite 161, Beispiel

Test 1

Lösungen, Seite 463

4 Nach einem Brand in einer Chemiefabrik steigt die Konzentration von perflourierten Tensiden (PFT) in einem nahegelegenen See deutlich an. Durch Zu- und Ablauf von Wasser verringert sich die PFT-Konzentration im See wieder. Die PFT-Konzentration im See wurde in den ersten Wochen mithilfe der Funktion k mit $k(x) = 250x^2 \cdot e^{-0{,}5x} + 20$ modelliert (x: Anzahl der Wochen nach dem Brand, k: Konzentration in $\frac{ng}{l}$).

a) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die PFT-Konzentration am größten war. Geben Sie das Maximum an.

b) Bestimmen Sie, wann die PFT-Konzentration erstmals nach dem Brand unter $50\frac{ng}{l}$ fällt.

c) Ermitteln Sie, welche PFT-Konzentration sich laut Modell auf lange Sicht einstellen wird.

Perfluorierte Tenside werden wegen ihrer besonderen physikalisch-chemischen Eigenschaften in einer Vielzahl von Produkten verwendet. PFT stehen im Verdacht, krebserregend zu sein.

ng: Nanogramm

5 Ein Fahrradhersteller modelliert die Verkaufszahlen eines neu eingeführten E-Bikes in den ersten Monaten nach Markteinführung mit der Funktionsschar f_k mit $f_k(t) = 10t \cdot e^{-kt}$ ($k > 0$, $t > 0$ in Monaten nach der Markteinführung, $f_k(t)$ in 100 E-Bikes).

a) Einen Monat nach der Markteinführung sind 600 E-Bikes verkauft worden. Bestimmen Sie ein passendes k für diese Modellierung.

b) Geben Sie die Gleichungen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion von f_k an.

c) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k den Zeitpunkt, an dem die Verkaufszahlen am stärksten abnehmen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Zeitpunkt der maximalen Verkaufszahl.

d) Interpretieren Sie die Gleichung $f_k(3 + t) = 0{,}8 \cdot f_k(t)$ im Sachzusammenhang.

6 Ein Unternehmen möchte eine neue große Rutsche bauen. Es modelliert bei der Planung mögliche Verläufe der Rutschbahn durch die Funktion f_a mit $f_a(x) = 10x \cdot e^{-ax}$, $1 \leq a \leq 2$, x und $f_a(x)$ in Metern.

a) Geben Sie die Funktionsgleichungen der ersten beiden Ableitungen an.

b) Ermitteln Sie für $a = 1$ und $a = 2$, wie hoch die Rutsche maximal wird.

Im Folgenden sei $a = 1$ und $0 \leq x \leq 8$.

c) Bestimmen Sie das durchschnittliche Gefälle der Rutsche im Intervall $[1; 6]$.

d) Bestimmen Sie die Steigung der Wendetangente und beurteilen Sie unter Berücksichtigung Ihrer Ergebnisse aus Teilaufgabe c), ob die Rutschbahn den Sicherheitsanforderungen genügt.

Aus einer Sicherheitsanforderung für Rutschbahnen:
Der Neigungswinkel des Rutschteils zur Horizontalen darf an keiner Stelle 60° überschreiten und der Durchschnittswert darf 40° nicht überschreiten.

7 Bei einer neu eröffneten Bäckerei wird die Anzahl der verkauften Brötchen in den ersten Wochen nach der Eröffnung durch die Modellfunktion f mit $f(x) = 2000x \cdot e^{-0{,}5x} + 2500$ beschrieben. Hierbei ist x die Anzahl der Wochen seit der Eröffnung der Bäckerei.

a) Bestimmen Sie, in welcher Woche die meisten Brötchen verkauft werden.

b) Ermitteln Sie, mit welchen Verkaufszahlen man auf lange Sicht rechnen kann.

c) Bestimmen Sie näherungsweise, wie viele Brötchen in den ersten acht Wochen verkauft werden.

8 Der Verlauf eines Tragseils einer Hängebrücke wird in einem Modell durch die Funktion $f_{a;\,c}(x) = \frac{a}{2c}(e^{cx} + e^{-cx})$ beschrieben $(a, c \in \mathbb{R}^{>0}$, x und f(x) in Metern).

a) Untersuchen Sie den Graphen von $f_{a;\,c}$ auf Symmetrie.

b) Berechnen Sie den Tiefpunkt des Graphen der Funktion $f_{a;\,c}$.

c) Bestimmen Sie a und c so, dass das Seil den tiefsten Punkt 10 Meter über dem Boden erreicht, die beiden Aufhängepunkte einen Abstand von 200 Metern haben und jeweils ca. 37,6 Meter hoch sind.

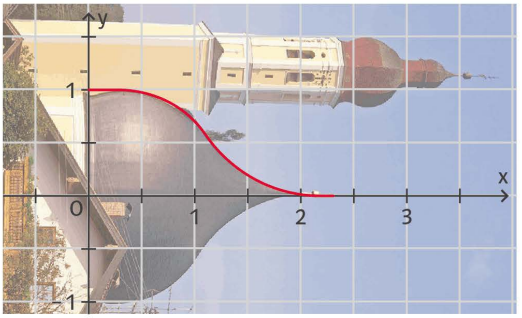
Im Folgenden soll mit der Funktion $f_{0,2;\,0,02}$ gearbeitet werden.

d) Geben Sie einen sinnvollen Definitions- und Wertebereich für die Funktion $f_{0,2;\,0,02}$ an.

e) 💻 Bestimmen Sie eine Stelle x, an der das Seil 20 m Abstand zum Boden hat.

f) Ermitteln Sie, wie viel Prozent Gefälle das Seil an den Aufhängepunkten hat.

9 Durch Rotation des Graphen von f mit $f(x) = e^{-0{,}35x^4}$ über dem Intervall $[0; 2]$ um die x-Achse entsteht der Umriss eines Zwiebeldachs. Eine Längeneinheit entspricht 10 Metern.
Der kreisförmige Grundriss des Hauptraums hat einen Durchmesser von 20 Metern, bis zur Zwiebelkuppel ist er 11 m hoch.
Bestimmen Sie das Volumen des gesamten Innenraums der Kirche.



Die barocke Wallfahrtskirche St. Johann Baptist und Heilig Kreuz in Westerndorf am Wasen bei Rosenheim hat laut heimischer Touristeninformation Deutschlands größtes Zwiebeldach.

10 Eine Fahrradrampe soll im Querschnitt durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = e^{-0{,}12x^2} - 0{,}05$ zwischen den Schnittpunkten mit der x-Achse modelliert werden (x und f(x) in m).

a) Geben Sie die maximale Höhe h und die Breite b der Rampe an.

b) 💻 Ermitteln Sie, an welchen Stellen die Steigung der Rampe am größten ist.

c) Unter der Rampe gibt es einen 3 m langen und 50 cm hohen Hohlraum. Berechnen Sie das Volumen der Rampe, wenn sie eine Tiefe t von 2,5 m hat.

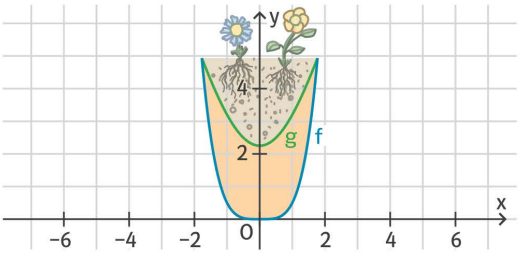
11 In einem Biotop beobachtet eine Forschergruppe die natürliche Neubesiedlung durch die gebänderte Prachtlibelle.
Ausgehend von ihren Beobachtungen modellieren sie die momentane Änderungsrate des Bestands mithilfe der Funktion f mit
$f_a(t) = a \cdot \frac{e^t}{(1 + e^t)^2}$, für $a > 0$ und $t \geq 0$.
(t in Monaten seit Beobachtungsbeginn, $f_a(t)$ Zuwachs pro Monat)

a) 💻 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_{40} und beschreiben Sie seinen Verlauf im Sachzusammenhang.

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F_a mit $F_a(t) = \frac{-a}{1 + e^t}$ eine Stammfunktion von f_a ist.

c) Die Forscher gehen davon aus, dass für $a = 40$ der Bestand der Libellen bei gleichbleibenden Bedingungen auf lange Sicht bei 20 Tieren liegen wird. Prüfen Sie diese Prognose.

12 Der Querschnitt eines Pflanzgefäßes soll für $-1{,}77 < x < 1{,}77$ durch die Funktionsgraphen der Funktionen f mit $f(x) = 0{,}5x^4$ und g mit $g(x) = x^2 \cdot e^{-0{,}05x^2} + 2{,}25$ dargestellt werden. Eine Längeneinheit entspricht 1 dm.



a) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g eingeschlossen wird.

b) Bestimmen Sie das Volumen des Gefäßes, wenn seine Länge 70 cm beträgt.

c) Ermitteln Sie, wie viel Erde man benötigt, wenn das Gefäß bis zum Rand gefüllt wird.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 463

13 Die Beschleunigung eines Fahrzeugs kann in den ersten 10 Sekunden mit der Funktion a mit $a(t) = (-t^2 + 6t) \cdot e^{-2t+1}$ modelliert werden (t in Sekunden, a(t) Beschleunigung in $\frac{m}{s^2}$). Zum Zeitpunkt $t = 0$ steht das Fahrzeug.

Üblich sind die Bezeichnungen
$s(t)$ – Weg
$s'(t) = v(t)$ – Geschwindigkeit
$v'(t) = a(t)$ – Beschleunigung

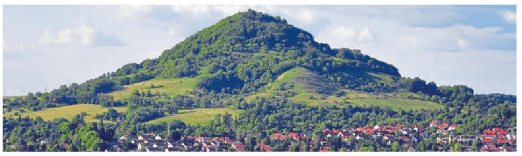
a) Ermitteln Sie, wann die Beschleunigung des Fahrzeugs laut Modell maximal ist und geben Sie den maximalen Wert für die Beschleunigung an.

b) Bestimmen Sie $\int_0^3 a(t)\,dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

c) Bestimmen Sie die erwartete Geschwindigkeit des Fahrzeugs nach 6 Sekunden.

d) Geben Sie einen Funktionsterm für a(t) an, wenn die Geschwindigkeit des Fahrzeugs in den ersten 10 Sekunden durch die Funktion v mit $v(t) = 6t^2 \cdot 4e^{-2t+1}$ modelliert wird.

14 Der Höhenverlauf eines Berges wird durch die Modellfunktion h mit $h(x) = e^{a(b-x^2)}$ beschrieben. Hierbei ist x der horizontale Abstand von der Bergmitte und h(x) die Höhe des Berges gegenüber der Umgebung (1 LE entspricht 100 m).



a) Bestimmen Sie a und b so, dass der Berg in 200 m Höhe einen Durchmesser von 200 m hat und in 100 m Höhe einen Durchmesser von 400 m.

b) Berechnen Sie, wie hoch ein Turm auf der Bergspitze sein muss, damit man von seiner Spitze aus den gesamten Berghang einsehen kann.

15 In der Pharmakokinetik wird die Konzentration K eines Medikaments im Blut in Abhängigkeit von der Zeit seit Einnahme durch die Bateman-Funktion K mit $K(t) = \frac{ac}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$ beschrieben (t in Stunden seit Einnahme, K(t) in $\frac{mg}{l}$). Hierbei sind a, b und c Parameter mit $a > b > 0$ und $c > 0$. Für ein spezielles Medikament ist $a = 0{,}8$, $b = 0{,}2$ und $c = 18{,}75$.

Die **Pharmakokinetik** beschäftigt sich mit den Prozessen, denen ein Medikament im Körper unterliegt.

a) Berechnen Sie die maximale Konzentration des Medikaments im Blut.

b) Das Medikament wirkt, wenn die Konzentration über $7\frac{mg}{l}$ liegt. Ermitteln Sie näherungsweise den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt.

c) Zeigen Sie, dass die momentane Änderungsrate der Konzentration direkt nach der Einnahme unabhängig vom Wert des Parameters b ist.

d) Begründen Sie, dass die maximale Wirkstoffkonzentration zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{\ln(a) - \ln(b)}{a-b}$ erreicht wird, und dass die Konzentration zum Zeitpunkt $t_2 = 2t_1$ am stärksten abnimmt.

Verwenden Sie, dass
$\ln(a \cdot e^{-at})$
$= \ln(a) + \ln(e^{-at})$
$= \ln(a) - at$ gilt.

e) Es sei $a - b = 0{,}6$. Bestimmen Sie den Wert von b, für den die maximale Konzentration nach 1,5 Stunden erreicht wird.

Grundwissen Test – Vektoren auf Kollinearität überprüfen

→ **Grundwissen**, Seite 420
Lösungen, Seite 463

G **16** Prüfen Sie, ob die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ kollinear sind.

a) A(1|2|3), B(4|2|0), C(2|2|2)

b) A(2|0|5), B(5|1|7), C(3|4|6)

Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion

→ Lösungen, Seite 463

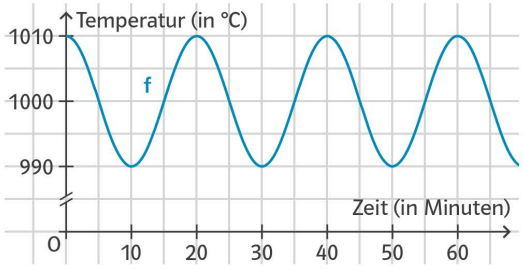
1 Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = 2\sin(x)$ **b)** $f(x) = -3\cos(x)$ **c)** $f(x) = x^2 + \cos(x)$

2 Geben Sie eine mögliche Stammfunktion F von f an und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f im Intervall I mit der x-Achse einschließt.

a) $f(x) = -0{,}1\sin(x) + 0{,}1;\ I = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ **b)** $f(x) = \cos(x);\ I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3 Keramische Fasern kommen für Wärme- und Hitzeisolation zum Einsatz. Sie werden bei hohen Temperaturen isoliert. Die Funktion f wird vereinfacht zur Modellierung des Temperaturverlaufs innerhalb der Faserprobe bei der Isolierung verwendet.



a) Bestimmen Sie zum Graphen von f eine Gleichung der Form $f(t) = a \cdot \cos(bt) + d$, dabei ist t die Zeit in Minuten seit Beginn der Messung.

b) Es ist $f'(t) = -\pi\sin(0{,}1\pi t)$. Zeigen Sie, dass der Temperaturabfall bzw. -anstieg alle 10 Minuten am stärksten ist.

Verkettung von Funktionen

4 Gegeben sind die Funktionen u, v und w mit $u(x) = (x+1)^2$, $v(x) = \sqrt{x}$ und $w(x) = e^x$. Bilden Sie $u \circ v$, $v \circ u$, $u \circ w$ und $w \circ v$.

5 Stellen Sie die Funktion f als Verkettung zweier Funktionen u und v dar.

a) $f(x) = (3x+1)^4$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+7}$ **c)** $f(x) = e^{0{,}5x+2}$ **d)** $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

6 **a)** Bilden Sie $f(x) = u(v(x))$ und $g(x) = v(u(x))$ für $u(x) = \sqrt{x}$ und $v(x) = x^2 + 1$ und skizzieren Sie die Graphen der Funktionen u und v.

b) Geben Sie die Definitionsmenge der Funktionen f und g an. Begründen Sie, warum u nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, $u \circ v$ hingegen schon.

c) Skizzieren Sie die Graphen von f und g mithilfe einer geeigneten Wertetabelle.

Produktregel

7 Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion f'.

a) $f(x) = (x^4 + 2x^5) \cdot \frac{1}{x}$ **b)** $f(x) = e^{x+1} \cdot (x^2 + 2{,}5)$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{0{,}5x}$ **d)** $f(x) = x \cdot \sin(x)$

e) $f(x) = (3x^2 + 0{,}2x) \cdot (x+5)$ **f)** $f(x) = (x^2 - 2{,}5) \cdot (x^2 + 2{,}5)$

g) $f(x) = \frac{2}{x} \cdot e^{4x}$ **h)** $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$

Tipp:
In manchen Fällen ist es vorteilhaft, den Term zu vereinfachen, statt die Produktregel anzuwenden.

8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{x-1}$.

a) Ermitteln Sie, an welchen Stellen der Graph von f waagerechte Tangenten hat.

b) Begründen Sie, dass der Graph von f die x-Achse im Koordinatenursprung berührt.

c) Skizzieren Sie den Graphen von f und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einem MMS.

D13 Check-out

Kettenregel

Lösungen, Seite 465

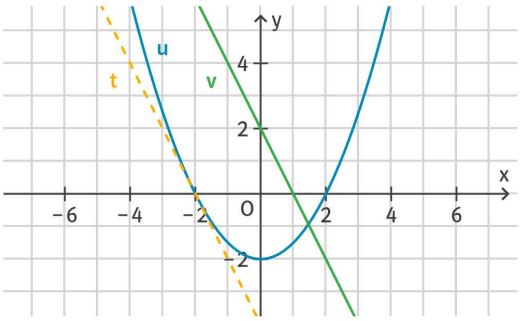
9 Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an und bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion. Vereinfachen Sie gegebenenfalls das Ergebnis.

a) $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$ **b)** $f(x) = 2\ln(3x + 1)$ **c)** $f(x) = x^2 \cdot \sin(2x)$ **d)** $f(x) = 2x + e^{0{,}1x^2}$

10 Gegeben sind die Funktionen $u(x) = 0{,}5x^2 - 2$ und $v(x) = -2x + 2$.

a) Bilden Sie $f(x) = u(v(x))$ und erläutern Sie mithilfe der Grafik und der Kettenregel, dass $f'(2) = u'(v(2)) \cdot v'(2) = 4$ gilt.

b) Betrachtet werden soll eine differenzierbare Funktion g sowie ihre Ableitungsfunktion g' mit $g'(x) = e^{v(x)}$. Begründen Sie, dass g keine Extremstellen hat.



Zusammengesetzte Funktionen untersuchen

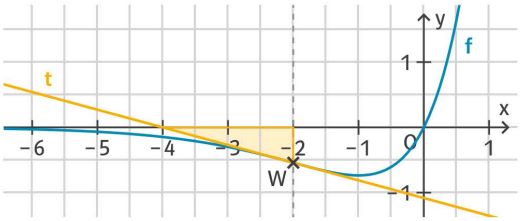
11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x \cdot e^x$.

a) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Funktionsgraphen.

c) Die Wendetangente t von f schließt mit der Geraden $x = -2$ und der x-Achse eine Fläche ein. Ermitteln Sie den zugehörigen Flächeninhalt.

d) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die die Gerade $x = -2$ und der Graph von f mit der x-Achse einschließen.



Zusammengesetzte Funktionen im Kontext

12 Mithilfe der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$ kann für $0 \le x \le 5$ der Querschnitt durch ein Gelände modelliert werden (x in km, $f(x)$ in km über NN).

a) Skizzieren Sie den Querschnitt des Geländes und markieren Sie in Ihrer Skizze alle Punkte, die 2 km über Normalnull (NN) liegen.

b) Beschreiben Sie den Verlauf der Steigung im Intervall $[0; 2]$.

c) Vergleichen Sie die mittlere Steigung des Geländes im Bereich $1{,}5 \le x \le 2{,}5$ mit der Steigung an der Stelle $x = 2$.

13 Nach Eröffnung einer neuen Attraktion werden die täglich erwarteten Besucheranzahlen eines Vergnügungsparks mit der Funktion f mit $f(x) = 100(x - 10) \cdot e^{-0{,}05x} + 10\,000$ berechnet. x steht in diesem Modell für die Anzahl der Tage nach Eröffnung der Attraktion.

a) Beschreiben Sie den Verlauf des Funktionsgraphen im Kontext.

b) Ermitteln Sie, an welchem Tag man mit der höchsten Besucheranzahl rechnet. Geben Sie an, wie viele Personen erwartet werden.

c) Die Attraktion rentiert sich, wenn die tägliche Besucheranzahl über 10 000 liegt. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem das der Fall ist.

Weiterführendes Training

→ **Lösungen**, Seite 466

14 💻 Die Höhe h (in Metern) eines Bungee-Springers über dem Boden soll zum Zeitpunkt t mithilfe der Funktion h mit $h_a(t) = a \cdot e^{-0{,}1t} \cdot \cos(1{,}5t) + 20$ (t in s, $a \in \mathbb{R}^{>0}$) modelliert werden. Der Bungee-Springer springt zum Zeitpunkt $t = 0$ ab.

Im Jahr 2023 sprang der Neuseeländer Mike Heard an einem Tag 941-mal von der Auckland Bridge. Er stellte damit einen neuen Weltrekord auf.

a) Bestimmen Sie den Parameter a für die Absprunghöhe 40 m.

Im Folgenden sei $a = 20$.

b) Fertigen Sie eine grobe Skizze des Graphen von h_{20} an.

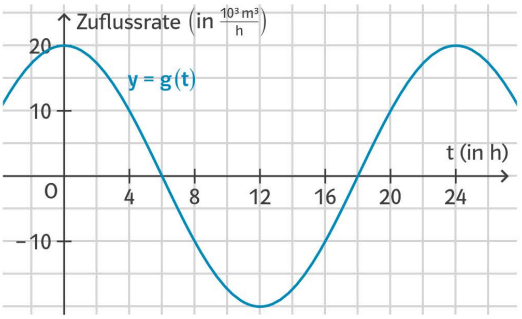
c) Bestimmen Sie die maximale Fallgeschwindigkeit.

d) Ermitteln Sie, wie hoch der tiefste Punkt über dem Boden ist.

e) Geben Sie an, wie viele Auf- und Abbewegungen der Springer in den ersten 21 Sekunden ausführt. Begründen Sie, warum diese Anzahl nicht von a abhängt.

f) Begründen Sie, in welcher Höhe der Springer schließlich zur Ruhe kommt.

15 Bei einem Überschuss an elektrischer Energie wird Wasser in einen Speichersee hochgepumpt. Mit diesem Wasser kann man bei Bedarf wieder elektrische Energie erzeugen. Die Grafik zeigt das Modell einer Zuflussrate eines Speichersees an einem Werktag zwischen 0 und 24 Uhr.



a) Geben Sie an, zu welchen Zeitpunkten am meisten bzw. am wenigsten Wasser im Speicher ist.

b) Lesen Sie am Graphen ab, wann sich das Volumen im See am schnellsten bzw. am langsamsten verändert.

Zur Beschreibung der Zuflussrate verwenden die Stadtwerke die Modellfunktion g mit $g(t) = 20\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ (t in Stunden, $g(t)$ in Tausend Kubikmetern pro Stunde).

Die Funktion G mit $G(t) = \frac{240}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ ist eine Stammfunktion von g.

c) Zeigen Sie, dass G eine Stammfunktion von g ist.

d) Ermitteln Sie, wie groß die Volumendifferenz im See im Tagesverlauf ist.

e) Begründen Sie, wie viel Wasser zu Beginn der Beobachtung mindestens im See enthalten sein muss.

f) Bestimmen Sie mithilfe von G eine Funktion f, die das Volumen des Sees beschreibt, wenn das Volumen um Mitternacht $5 \cdot 10^5 m^3$ betrug.

16 Ein Regenrückhaltebecken hat einen Zu- und einen Abfluss. Die Zuflussrate wird mit der Funktion z mit $z(t) = e^{t-2}$ modelliert, die Abflussrate mit der Funktion a mit $a(t) = t^2$ (z und a in $\frac{m^3}{h}$, t in h). Zu Beginn der Messung befinden sich $25\,m^3$ Wasser im Becken.

a) Geben Sie die Gleichung einer Funktion f an, die die Gesamtänderung beschreibt.

b) Ermitteln Sie, in welchem Zeitraum mehr Wasser in das Becken hinein- als hinausfließt.

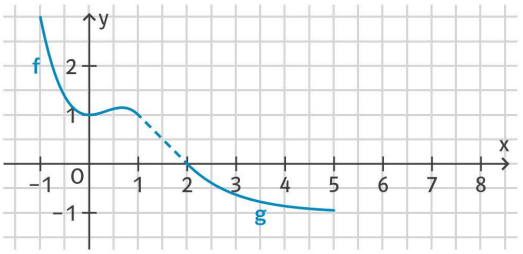
c) Begründen Sie, dass in diesem Modell das Wasservolumen im Becken durch die Funktion F mit $F(t) = e^{t-2} - \frac{1}{3}t^3 + (25 - e^{-2})$ angegeben wird.

d) Berechnen Sie das Wasservolumen nach 2 Stunden.

e) 💻 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem das Wasservolumen im Becken $5\,m^3$ beträgt.

Lösungen, Seite 466

17 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^3 + x^2 + 1$ für $-1 \le x \le 1$ und $g(x) = e^{-(x-2)} - 1$ für $2 \le x \le 5$.



a) Die beiden Funktionsgraphen sollen im Intervall $[1; 2]$ durch eine Gerade ohne Knick verbunden werden. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung für die zugehörige lineare Funktion h für $1 < x < 2$.

b) Für $x < 1$ gibt es einen Punkt auf dem Graphen von f, dessen Tangente parallel zur Geraden h ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes.

c) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Funktionsgraphen von f, g und h und der x-Achse im Intervall $[-1; 5]$ eingeschlossen wird.

18 Durch die Funktionsschar f_a mit $f_a(t) = 20a \cdot t \cdot e^{-0{,}5t}$ wird für $t \in [0; 12]$ und $a \in \mathbb{R}^{>0}$ die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben (t in Stunden seit der Einnahme und $f_a(t)$ in $\frac{mg}{l}$). Der Parameter a hängt von der Höhe der Wirkstoffdosis ab.

a) Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt, zu dem die Konzentration des Medikaments am größten ist, nicht vom Parameter a abhängt. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt.

b) Berechnen Sie, für welches a die maximale Konzentration im Blut $20\frac{mg}{l}$ beträgt.

c) Berechnen Sie für $a = \frac{1}{2}$ den Zeitpunkt, an dem die Wirkstoffkonzentration am stärksten abfällt. Geben Sie die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt in $\frac{mg}{l}$ pro Stunde an.

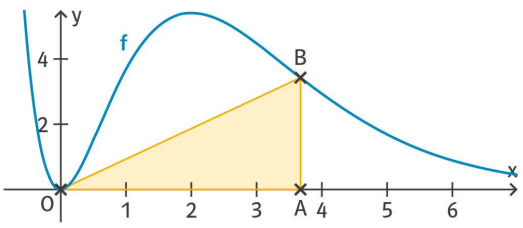
Gegeben ist eine Stammfunktion F_a mit $F_a(t) = -(40a \cdot t + 80a) \cdot e^{-0{,}5t}$.

d) Zeigen Sie, dass F_a eine Stammfunktion von f_a ist.

e) Berechnen Sie $\frac{1}{12}\int_0^{12} f_a(t)\,dt$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

f) Für $t > 12$ kann die Konzentration des Medikaments durch die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $P(12 \mid f_a(12))$ beschrieben werden. Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente und berechnen Sie, wann das Medikament vollständig abgebaut ist.

19 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 10x^2e^{-x}$ schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, die ins Unendliche reicht.



a) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = -(10x^2 + 20x + 20) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.

b) Berechnen Sie den Inhalt der nach rechts offenen Fläche im Intervall $[0; b]$ mit $b \to +\infty$.

c) Begründen Sie anschaulich, dass das Dreieck OAB mit $A(u \mid 0)$ und $B(u \mid f(u))$ $(u > 0)$ nicht vollständig in der Fläche liegt.

d) Ermitteln Sie, für welches u das Dreieck OAB den maximalen Flächeninhalt hat.

20 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x+1}$.

a) Begründen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist. Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $\bar{f}$ und bestimmen Sie für f und für $\bar{f}$ die Definitions- und Wertebereiche.

b) Zeigen Sie, dass f und $\bar{f}$ im Punkt $P(1 \mid 1)$ die gleiche Tangente haben.

c) Weisen Sie nach, dass $\bar{F}$ mit $\bar{F}(x) = 2x - x \cdot \ln(x)$ eine Stammfunktion von $\bar{f}$ ist.

d) Die Graphen von f und $\bar{f}$ schließen mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein. Geben Sie die Schnittstellen von f bzw. $\bar{f}$ mit den Koordinatenachsen an und ermitteln Sie den Flächeninhalt.

e) Zeigen Sie, dass der Inhalt der Fläche, die die Funktion f für $x > 0$ mit der x-Achse einschließt, endlich ist. Geben Sie den Flächeninhalt an.

f) Begründen Sie, dass $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_1^a f(x)\,dx = 0{,}5 \cdot \lim\limits_{b \to 0} \int_b^1 \bar{f}(x)\,dx$ gilt.

→ **Lösungen**, Seite 468

21 Fig. 1 zeigt die Graphen von drei Funktionen.

a) Begründen Sie, welcher der Graphen C, G und K der Graph der Funktion f mit $f(x) = 3x \cdot e^{-x^2}$ ist.

b) Geben Sie die Funktionsgleichungen für die beiden anderen Graphen an.

c) Skizzieren Sie den Graphen von f' und erklären Sie Ihr Vorgehen.

d) Die drei Graphen gehören zu einer Funktionsschar f_t. Geben Sie eine Gleichung von f_t an.

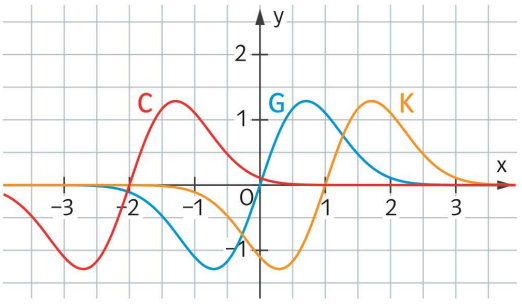


Fig. 1

22 Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = -x \cdot e^{-ax^2}$ $(a \in \mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f_1 punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

b) Berechnen Sie die Extremstellen von f_1.

c) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph von f_1 drei Wendepunkte haben muss.

d) Zeigen Sie, dass die Funktion F_a mit $F_a(x) = \frac{1}{2a} \cdot e^{-ax^2}$ eine Stammfunktion von f_a ist.

e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_1 mit der x-Achse im Intervall $[0; b]$ für $b > 0$ einschließt. Begründen Sie, dass diese Fläche stets kleiner als 0,5 FE ist.

f) Begründen Sie, dass $\lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^0 f_1(x)\,dx - \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_0^b f_1(x)\,dx = 1$ gilt.

23 Eine neue Achterbahn wird so geplant, dass nach einer Auffahrt eine steile Abfahrt folgt. Der zugehörige Graph wird von den Herstellern durch die Modellfunktion f_t mit $f_t(x) = 100t^2x^2 \cdot e^{-tx}$ beschrieben $(t \in \mathbb{R}^{>0})$.
Hierbei starten die Wagen bei $x = 0$.
$f_t(x)$ ist die Höhe der Bahn beim horizontalen Abstand x vom Start.
Alle Angaben sind in m.

a) Ermitteln Sie für $t = 0{,}1$, in welchen Abständen vom Start die Bahn 40 Meter hoch ist.

b) Berechnen Sie für $t = 0{,}1$ den steilsten Anstieg und Abfall („drop") der Bahn in Prozent.

c) Bestimmen Sie für ein beliebiges t die Steigung der Bahn am Start.

d) Zeigen Sie, dass die höchste Bahnhöhe unabhängig von t ist, und bestimmen Sie diese.

e) Die maximale Größe des Neigungswinkels der Abfahrt soll 70° betragen. Ermitteln Sie, für welchen Parameter t dies erfüllt wird.

24 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{0{,}2(x-3)^3}$.

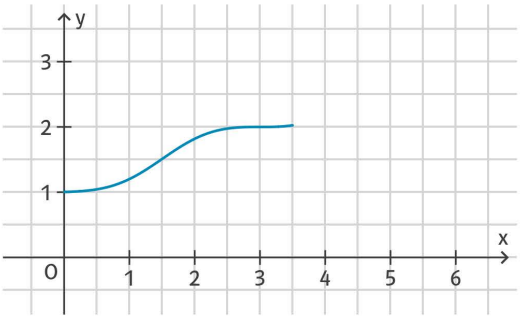
a) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der Funktion f an.

b) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von f für $x \to \pm\infty$.

c) Weisen Sie nach, dass der Graph von f keinen Extrempunkt, wohl aber einen Sattelpunkt hat.

d) Der Graph der Funktion h entsteht durch Verschiebung des Graphen von f um eine Einheit nach oben. Geben Sie die Funktionsgleichung von h an.

e) Durch Rotation des Graphen von h über dem Intervall $[0; 3{,}5]$ um die x-Achse entsteht ein Gefäß.
Bestimmen Sie das Volumen des Gefäßes, wenn eine Längeneinheit einem Zentimeter entsprechen soll.



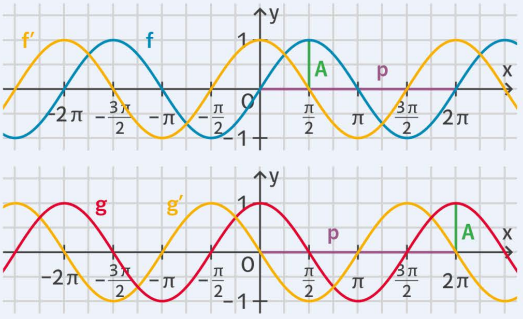
Die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion

Bei der transformierten Sinusfunktion h mit $h(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ wird der Graph im Vergleich zu dem von $f(x) = \sin(x)$

- in y-Richtung gestreckt durch a **(Amplitude $A = |a|$)**,
- in x-Richtung gestreckt durch $b = \frac{2\pi}{p}$ (**p** ist die **Periode**),
- in y-Richtung verschoben durch d,
- in x-Richtung verschoben durch c.

Dies gilt entsprechend für die Kosinusfunktion $k(x) = a \cdot \cos(b(x - c)) + d$.

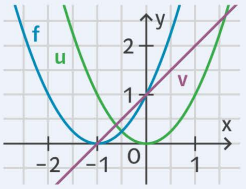
Für die Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$ gilt $f'(x) = \cos(x)$.
Für die Kosinusfunktion g mit $g(x) = \cos(x)$ gilt $g'(x) = -\sin(x)$.



Verkettung von Funktionen

Gegeben sind die Funktionen u und v. Die Funktion $u \circ v$ mit $(u \circ v)(x) = u(v(x))$ heißt **Verkettung** von u und v.

$u(x) = x^2,\ v(x) = x + 1,$
$f(x) = u(v(x))$
$= u(x + 1)$
$= (x + 1)^2$



Produktregel

Sind die Funktionen u und v differenzierbar, so ist auch die Funktion $f = u \cdot v$ mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ differenzierbar und es gilt
$\mathbf{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$.

$f(x) = (x^2 + 4) \cdot e^x$
$u(x) = x^2 + 4;\ u'(x) = 2x,\ v(x) = e^x;\ v'(x) = e^x$
$f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 + 4)e^x = e^x(x^2 + 2x + 4)$

Kettenregel

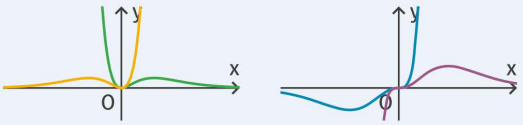
Ist $f = u \circ v$ eine Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen u und v mit $f(x) = u(v(x))$, so ist auch f differenzierbar und es gilt
$\mathbf{f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$.

$f(x) = 0{,}5e^{x^2 + 1}$
$u(v) = 0{,}5e^v,$ $\quad v(x) = x^2 + 1$
$u'(v) = 0{,}5e^v,$ $\quad v'(x) = 2x$
$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = 0{,}5e^{x^2 + 1} \cdot 2x = x \cdot e^{x^2 + 1}$

Zusammengesetzte Funktionen untersuchen

Beim Bestimmen der charakteristischen Punkte von zusammengesetzten Funktionen werden häufig die Nullstellen der ganzrationalen Faktoren von Funktionstermen bestimmt, da die Funktion $e^x \neq 0$ ist für $x \in \mathbb{R}$.

Für $x \to +\infty$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $x^n \cdot e^{-x} \to 0$ und $x^n \cdot e^x \to +\infty$
Für $x \to -\infty$ gilt für gerade $n \in \mathbb{N}$: $x^n \cdot e^{-x} \to +\infty$ und $x^n \cdot e^x \to 0$
Für $x \to -\infty$ gilt für ungerade $n \in \mathbb{N}$: $x^n \cdot e^{-x} \to -\infty$ und $x^n \cdot e^x \to 0$

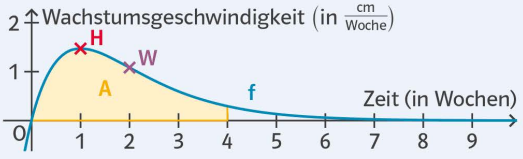


Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
für $x \to +\infty$: $x^n \cdot e^{-x} \to 0$ und $x^n \cdot e^x \to +\infty$,
Für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt für $x \to -\infty$: $x^n \cdot e^{-x} \to +\infty$ und $x^n \cdot e^x \to 0$
Für ungerade $n \in \mathbb{N}$ gilt für $x \to -\infty$: $x^n \cdot e^{-x} \to -\infty$ und $x^n \cdot e^x \to 0$

Mathematisieren bei zusammengesetzten Funktionen

Wenn eine Funktion f den Zusammenhang von Größen beschreibt, kann man in folgender Weise Fragen im Kontext beantworten.

1. Fragen aus dem Kontext in mathematische Fragen übersetzen.
2. Mathematische Lösungen mithilfe geeigneter Ansätze bestimmen.
3. Mathematische Lösungen im Kontext interpretieren und überprüfen.



Im Hochpunkt H erreicht die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze ihr Maximum. Der Wendepunkt W zeigt auch das Minimum von f'; die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze nimmt dort am stärksten ab.
Der Flächeninhalt A zeigt, wie viel die Pflanze in den ersten 4 Wochen gewachsen ist.

D14 Lösungen
Probeklausur
Kapitel IV

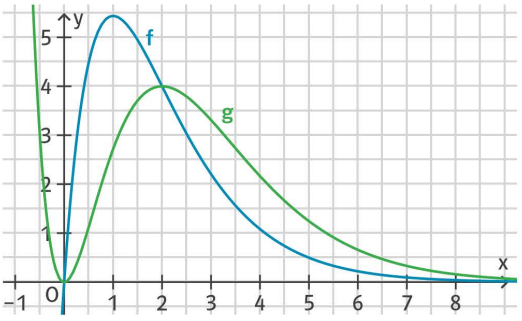
Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 1

60 min

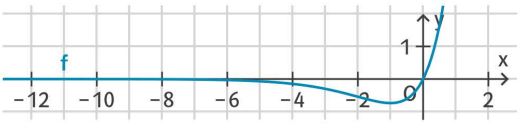
1 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = 2x \cdot e^{2-x}$ und $g(x) = x^2 \cdot e^{2-x}$.
In der Figur sind die zugehörigen Funktionsgraphen dargestellt.

a) Begründen Sie, dass die Graphen zu den Funktionen f und g gehören.

b) Untersuchen Sie, ob der Hochpunkt des Graphen von g und der Wendepunkt des Graphen von f zusammenfallen.



2 Gegeben ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = 2x \cdot e^x$.
F sei eine Stammfunktion von f.



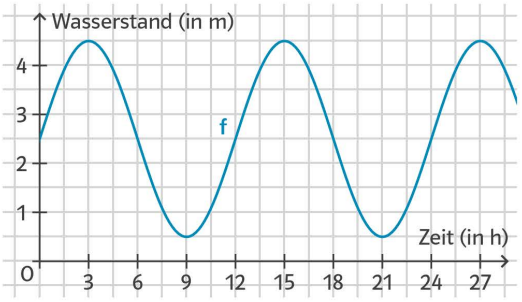
a) Begründen Sie mithilfe des Graphen von f:
(I) Der Graph von F hat bei $x = -1$ einen Wendepunkt.
(II) Für $x < -1$ ist der Graph von F rechtsgekrümmt, für $x > -1$ ist er linksgekrümmt.
(III) Der Graph von F ist für $x < 0$ streng monoton fallend.

b) Skizzieren Sie den Graphen von F.

3 Deutlich vereinfacht kann der Wasserstand der Gezeiten in Bremen an einem Tag im Mai durch eine Sinusfunktion f der Form $f(x) = a \cdot \sin(bx) + d$ dargestellt werden.

a) Lesen Sie die Parameter a, b und d für die Funktion f aus der Grafik ab.

b) Es ist $f''(x) = -\frac{\pi^2}{18}\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$. Ermitteln Sie für $x \in [0; 20]$ rechnerisch, wann der Wasserstand am schnellsten steigt bzw. sinkt.



Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 2

50 min

1 Gegeben sind die Graphen der Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$, ihrer Ableitungsfunktion f', einer Stammfunktion F von f und der Funktion g mit $g(x) = -f(x)$.

a) Begründen Sie, dass nur der in Fig. 1 dargestellte Graph zu f gehören kann.

b) Ordnen Sie die Funktionen g, f' und F begründet den übrigen Graphen zu.

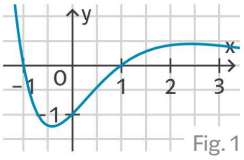


Fig. 1

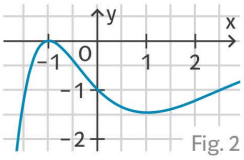


Fig. 2

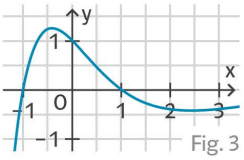


Fig. 3

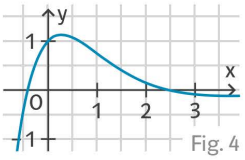


Fig. 4

2 Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = kx \cdot e^{-kx^2}$ $(k \in \mathbb{R})$.

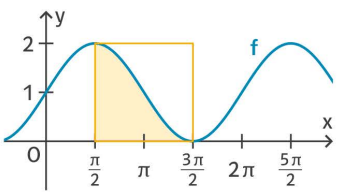
a) Zeigen Sie, dass f_k für $k < 0$ kein Extremum hat.

b) Weisen Sie nach, dass die Tangente t bei $x_0 = 0$ die Gleichung $t(x) = kx$ hat.

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(x) + 1$.

a) Begründen Sie mithilfe des eingezeichneten Rechtecks: Der Graph von f schließt im Intervall $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ mit der x-Achse eine Fläche der Größe π ein.

b) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe a) rechnerisch mithilfe eines Integrals.



Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 1

140 min

D14 Lösungen
Probeklausur
Kapitel IV

1 Für ein Forschungsprojekt wird über 30 Jahre lang die Wachstumsgeschwindigkeit eines Baumes beobachtet. Nach den erfolgten Messungen gehen die Forscher davon aus, dass die Wachstumsgeschwindigkeit des Baumes mit der Funktion f_a mit $f_a(t) = 10t^2 \cdot e^{-0{,}1t-a}$, $t \geq 0$ (t in Jahren, $f_a(t)$ in cm pro Jahr, $a \in \mathbb{R}^{>0}$) modelliert werden kann.

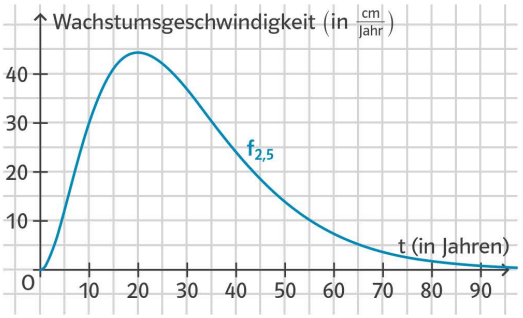
a) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f_a im Kontext.

b) Bestimmen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit des Baumes nach 5 Jahren in Abhängigkeit von a.

c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist. Begründen Sie, dass dieser Zeitpunkt nicht von a abhängt.

d) Zeigen Sie, dass der Baum für $a = 2{,}5$ nach 20 Jahren eine Wachstumsgeschwindigkeit von etwa 0,44 Meter pro Jahr hat.

e) Ermitteln Sie für $a = 2{,}5$ mithilfe der Abbildung näherungsweise, um wie viele Meter der Baum in den ersten zwanzig Jahren gewachsen ist.



Rechnerisch ergibt sich, dass der Baum in den ersten 20 Jahren ca. 5,30 m gewachsen ist.

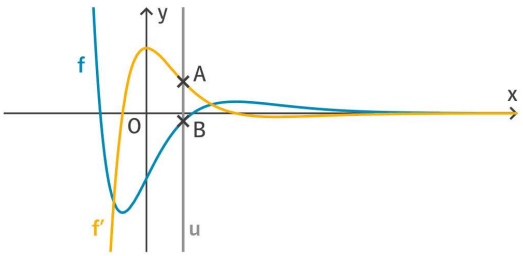
f) Berechnen Sie, um wie viel Prozent Ihre Schätzung aus Teilaufgabe e) vom rechnerisch ermittelten Wert abweicht.

g) Bestimmen Sie mithilfe des rechnerischen Ergebnisses für das Wachstum des Baumes in den ersten 20 Jahren die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit in diesem Zeitraum und vergleichen Sie sie mit dem Wert aus Teilaufgabe d).

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 2)e^{-x}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung von f' und zeigen Sie rechnerisch, dass die Graphen von f und f' sich zweimal schneiden. Geben Sie die Schnittstellen an. [Kontrollergebnis: $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$]

b) Begründen Sie, dass der blaue Graph zu f und der orange Graph zu f' gehört.



c) Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = (-x^2 - 2x) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.

d) Die Graphen von f und f' schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt.

e) Die Gerade $x = u$ mit $u \in [-1; 2]$ schneidet den Graphen von f' im Punkt A und den Graphen von f im Punkt B. Bestimmen Sie u so, dass die Strecke $\overline{AB}$ möglichst groß wird.

3 Bei einem täglich ablaufenden Produktionsprozess wird einem Tank in den ersten zwölf Stunden Flüssigkeit entnommen und in den nächsten zwölf Stunden wieder zugeführt.

Die Zuflussrate der Flüssigkeit wird durch die Funktion f_a mit $f_a(x) = -\frac{6a}{\pi}\sin(ax)$ modelliert.

Dabei wird x in Stunden, $f_a(x)$ in $100\frac{l}{h}$ angegeben.

a) Bestimmen Sie einen Wert für den Parameter a.

Im Folgenden soll die Funktion f mit $f(x) = f_{\frac{\pi}{12}}(x) = -0{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)$ als Modell dienen.

b) Bestimmen Sie die Menge an Flüssigkeit, die sich zu Beginn der ersten zwölf Stunden mindestens im Tank befinden muss.

Zu Beginn des Füllvorgangs befinden sich 500 Liter im Tank. Die Füllmenge wird modelliert durch die Funktion F mit $F(x) = \frac{6}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 5 - \frac{6}{\pi}$.

c) Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von $f_{\frac{\pi}{12}}$ ist.

d) Ermitteln Sie die Zeitpunkte in den ersten 24 Stunden, zu denen die Hälfte der Ausgangsmenge im Tank enthalten ist.

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 2

GK 110 min / LK 180 min

D14 Lösungen
Probeklausur
Kapitel IV

Hinweis für den Grundkurs:
Rechnen Sie ab Teilaufgabe b) mit $t = 4$.
Teilaufgabe d):
Verwenden Sie $u = 3$.

1 Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2}$ $(t \in \mathbb{R}^{+0})$.

a) Zeigen Sie, dass alle Graphen von f_t die Koordinatenachsen nur im Punkt $O(0|0)$ schneiden.

b) Untersuchen Sie die Funktionsschar f_t auf mögliche Symmetrieeigenschaften und bestimmen Sie das Verhalten der Graphen von f_t für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

Die Funktion F_t mit $F_t(x) = -\frac{t}{2} \cdot e^{-x^2}$ ist eine Stammfunktion von f_t.

c) Zeigen Sie, dass F_t eine Stammfunktion von f_t ist.

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_t, die von der x-Achse, dem Graphen von f_t und der Geraden $x = u$ mit $u > 0$ eingeschlossen wird.

[Kontrollergebnis: $A_t(u) = \frac{t}{2}(1 - e^{-u^2})$]

e) Zeigen Sie, dass der Inhalt der Fläche A_t aus Teilaufgabe d) für $u \to +\infty$ einen endlichen Wert annimmt.

f) Verwenden Sie $f_t''(x) = 2t \cdot (-3x + 2x^3) \cdot e^{-x^2}$ und ermitteln Sie die Wendepunkte von f_t in Abhängigkeit von t. Die hinreichende Bedingung braucht nicht geprüft zu werden.

[Kontrollergebnis: $W_1\left(-\sqrt{1{,}5} \,\middle|\, -\sqrt{1{,}5}\, t e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $W_2(0|0)$ und $W_3\left(\sqrt{1{,}5} \,\middle|\, \sqrt{1{,}5}\, t e^{-\frac{3}{2}}\right)$]

g) Eine Gerade g schneidet den Graphen der Funktion f_4 in allen Wendepunkten. Erstellen Sie eine Skizze von f_4 und g. Bestimmen Sie die Gleichung von g rechnerisch.

Die Punkte $A(0|0)$, $B(a|0)$ und $C(a|f_4(a))$ bilden ein Dreieck $(a > 0)$. Für seinen Flächeninhalt gilt $A(a) = 2a^2 \cdot e^{-a^2}$. Die Ableitung lautet $A'(a) = (-4a^3 + 4a)e^{-a^2}$.

h) Bestätigen Sie die Funktionsgleichungen von A und A' rechnerisch.

i) Berechnen Sie den Wert von a, für den das Dreieck einen maximalen Flächeninhalt hat.

2 Durch Rotation des Graphen von f mit $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-0{,}5(x+1)} + 1{,}2$ über dem Intervall $[0; 21]$ entsteht der Glaszylinder einer antiken Petroleumlampe (x und f(x) in Zentimetern).

a) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to +\infty$.

b) Ermitteln Sie den maximalen Durchmesser des Glaszylinders.

c) Skizzieren Sie den Graphen von f.

d) Bestimmen Sie das Volumen des Glaszylinders.

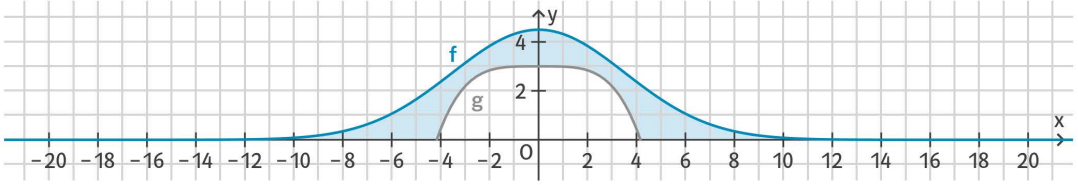
e) Der Graph von f soll über dem Intervall $[0; z]$ um die x-Achse rotieren. Begründen Sie, dass das Volumen des Drehkörpers für $z \to +\infty$ unendlich groß wird.

3 Gegeben sind die Funktionen f und $g_{a;b}$ mit $f(x) = 4{,}5 \cdot e^{-0{,}04x^2}$ und $g_{a;b}(x) = ax^4 + b$, $(a, b \in \mathbb{R})$.

a) Begründen Sie rechnerisch, dass die Graphen von f und $g_{a;b}$ symmetrisch zur y-Achse sind.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte von f und $g_{a;b}$ mit den Koordinatenachsen.

c) Die Abbildung zeigt die Graphen von f und g. Begründen Sie, dass $a < 0$ und $b > 0$ ist.



Im Folgenden sind alle Koordinaten in Metern angegeben.

d) Die Fläche unterhalb des Graphen von $g_{-0{,}01;\,3}$ soll den Querschnitt einer Unterführung darstellen. Berechnen Sie das Volumen der Unterführung, wenn sie 20 Meter lang ist.

e) Die blau gefärbte Fläche im Intervall $[-11; 11]$ soll gestaltet werden. Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise für wie viele Quadratmeter geplant werden muss.

Der Graph von f hat an seiner steilsten Stelle eine Steigung bzw. ein Gefälle von ca. 77%.

f) Zeigen Sie, dass das stärkste Gefälle bei $x = 2{,}5\sqrt{2}$ erreicht wird.

g) Nehmen Sie Stellung zu folgender Behauptung: „Die durchschnittliche Steigung im Intervall $[-10; 0]$ ist um ca. $\frac{1}{3}$ geringer als an der steilsten Stelle des Graphen von f bei $x = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$."

Trigonometrie trifft Differenzialrechnung: Die Sinusfunktion ableiten

Wenn man die Ableitung der Sinusfunktion mithilfe des Differenzenquotienten bestimmen möchte, erhält man den Term $\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$.

Um den Grenzwert des Differenzenquotienten zu bestimmen, verwendet man ein sogenanntes Additionstheorem: $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
Der Beweis dieses Theorems soll im Folgenden erarbeitet werden.

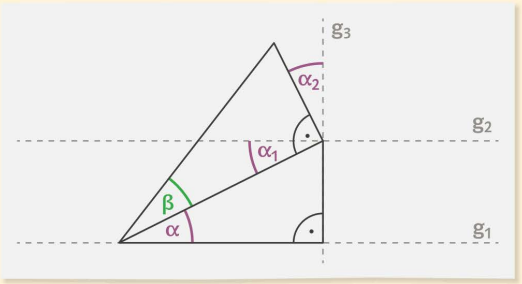
Forschungsauftrag 1: Additionstheorem für den Sinus beweisen
Die Gültigkeit des Additionstheorems soll mithilfe trigonometrischer Überlegungen und dem Wissen über Winkelbeziehungen verifiziert werden.
a) Vollziehen Sie dazu folgende Grafiken und Erläuterungen nach.

Gedanke 1

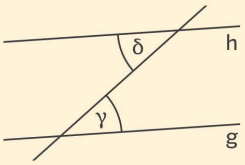
Es gilt: $g_1 \parallel g_2$, $g_2 \perp g_3$

$\alpha = \alpha_1$, denn sie sind Wechselwinkel an parallelen Geraden.
α_2 geht durch eine Rechtsdrehung um 90° aus α_1 hervor.

Also gilt: $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$



Erinnerung:
Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.



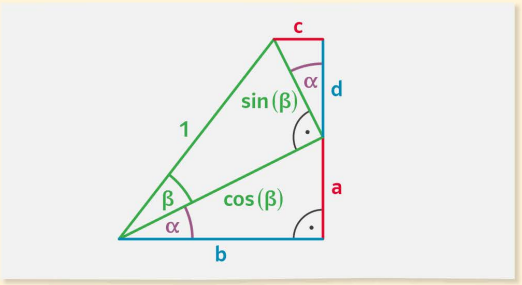
Gedanke 2

Im grünen Dreieck sind die Längen der Katheten $\sin(\beta)$ bzw. $\cos(\beta)$, wenn die Hypotenuse die Länge 1 hat.
In den anderen Dreiecken gilt:

$\sin(\alpha)=\frac{a}{\cos(\beta)}$ und $\cos(\alpha)=\frac{b}{\cos(\beta)}$

und

$\sin(\alpha)=\frac{c}{\sin(\beta)}$ und $\cos(\alpha)=\frac{d}{\sin(\beta)}$



Erinnerung:

$\sin(\alpha)=\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos(\alpha)=\frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Gedanke 3

Äquivalenzumformungen ergeben:

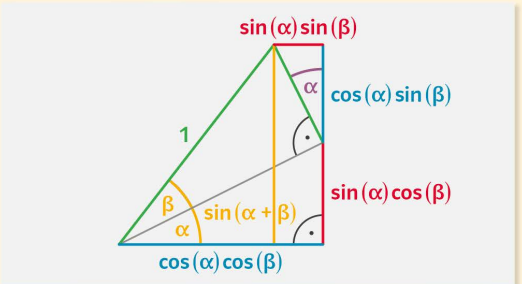
$\sin(\alpha)=\frac{a}{\cos(\beta)}$, also $a=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)$

$\cos(\alpha)=\frac{d}{\sin(\beta)}$, also $d=\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$.

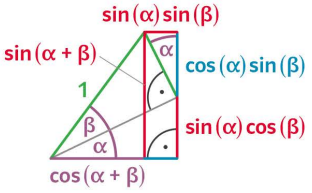
Man erhält:

$\sin(\alpha+\beta) = a + d$

$= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$



b) Formulieren Sie das entsprechende Additionstheorem für $\cos(\alpha+\beta)$. Orientieren Sie sich an der nebenstehenden Grafik.



Forschungsauftrag 2: Grenzwert des Differenzenquotienten bestimmen

Die geometrischen Ergebnisse werden auf die Sinusfunktion übertragen und das Additionstheorem für $x, y \in \mathbb{R}$ verwendet.
Das Differenzial, also der Grenzwert des Differenzenquotienten, soll mithilfe des Grenzwertes für $h \to 0$ berechnet werden.
Die Winkel werden hierbei im Bogenmaß angegeben.

a) Notieren Sie die Rechnung und ordnen Sie den einzelnen Schritten die richtige Erläuterung zu.

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$= \frac{(\sin(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\sin(h))-\sin(x)}{h}$$

$$= \frac{\sin(x)\cdot(\cos(h)-1)+\cos(x)\cdot\sin(h)}{h}$$

$$= \sin(x)\frac{(\cos(h)-1)}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}$$

A Additionstheorem anwenden

B Terme sortieren: Abhängigkeit von x bzw. von h

C $\sin(x)$ ausklammern

D Differenzenquotient aufstellen

b) Ergänzen Sie Ihre Lösung durch den Grenzwert für $h \to 0$.

Nutzen Sie zum Ermitteln der beiden Grenzwerte $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(\cos(h)-1)}{h}$ und $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$ die Überlegungen auf den Kärtchen, um die Lösung $\sin'(x) = \cos(x)$ zu erhalten.

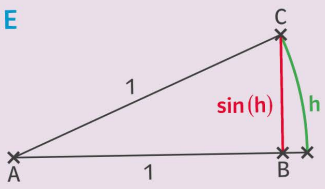
A $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(0+h)-\cos(0)}{h}$

B $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$

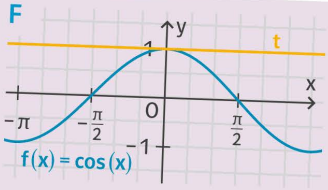
C $\cos'(0) = 0$

D Je kleiner h, desto stärker nähern sich die Werte von $\sin(h)$ und h einander an.

E



F



Weiterführende Forschungsaufträge

1 Ableitung der Kosinusfunktion

Berechnen Sie die Ableitung der Kosinusfunktion analog zu Forschungsauftrag 2.
Verwenden Sie dazu das in Forschungsauftrag 1b) hergeleitete Additionstheorem für den Kosinus: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$.

2 Additionstheorem für den Tangens

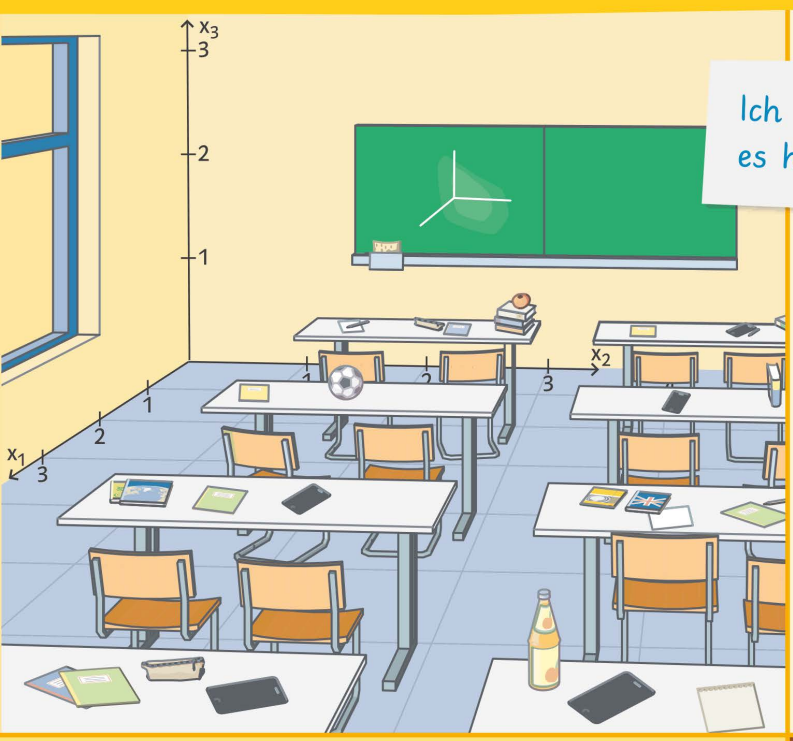
Begründen Sie, dass $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ gilt.

Betrachten Sie folgenden Umformungen für das Additionstheorem für den Tangens und erläutern Sie die beiden zentralen Ideen.

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cos(x)+\cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)}$$

$$= \frac{\cos(x)\cos(y)\cdot\left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right]}{\cos(x)\cos(y)\cdot\left[1-\frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}\right]} = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\cdot\tan(y)}$$

V Vektoren, Geraden und Winkel



Ich sehe was, was du nicht siehst, und es hat die Koordinaten (2|3|1).

Das Reflexionsgesetz besagt, dass der Einfallswinkel und der Ausfallswinkel gleich groß sind.

Das können Sie bald

- Vektoren auf Orthogonalität prüfen
- die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren bestimmen
- die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei Geraden bestimmen

Check-in

Schätzen Sie sich ein:

	☺	😐	☹
1. Ich kann Drei- bzw. Vierecke auf besondere Eigenschaften überprüfen.	☐	☐	☐
2. Ich kann Seitenlängen und die Größe von Winkeln in rechtwinkligen Dreiecken berechnen.	☐	☐	☐
3. Ich kann Punkte und Vektoren im Raum darstellen.	☐	☐	☐
4. Ich kann mit Vektoren rechnen.	☐	☐	☐
5. Ich kann überprüfen, ob zwei Vektoren kollinear sind.	☐	☐	☐

Lerntipps

zu 2. **Grundwissen,** Seite 418
zu 3. **Grundwissen,** Seite 420
zu 4. **Grundwissen,** Seite 420
zu 5. **Grundwissen,** Seite 420

Test

Lösungen, Seite 469

1 **Eigenschaften besonderer Drei- bzw. Vierecke prüfen**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Ein Rechteck ist auch ein Quadrat.
b) Eine Raute ist auch ein Quadrat.
c) Ein rechtwinkliges Dreieck ist auch gleichseitig.
d) Ein gleichseitiges Dreieck ist auch gleichschenklig.

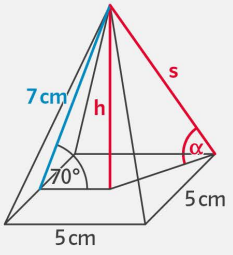
2 **Seitenlängen und Größe von Winkeln in rechtwinkligen Dreiecken berechnen**

Bestimmen Sie die farbig markierten Größen.

a)

b)

c)



3 **Punkte und Vektoren im Raum darstellen**

Gegeben sind die Punkte $A(0|-2|0)$, $B(1|2|0)$ und $C(0|1|3)$.

a) Zeichnen Sie die Punkte A, B und C in ein dreidimensionales Koordinatensystem.
b) Zeichnen Sie die Ortsvektoren zu den Punkten A, B und C sowie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CB}$ ein. Geben Sie die Koordinaten der eingezeichneten Vektoren an.
c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke $\overline{AC}$.

4 **Mit Vektoren rechnen**

Berechnen Sie die Linearkombination.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$ c) $\frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - 8 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}125 \\ -0{,}25 \\ -0{,}375 \end{pmatrix}$

5 **Kollinearität von Vektoren prüfen**

Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind. Geben Sie gegebenenfalls die Zahl an, mit der $\vec{a}$ multipliziert werden muss, um $\vec{b}$ zu erhalten.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2{,}5 \\ -25 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$

D15 Check-in

Alles im Lot? Rechte Winkel zwischen Geraden

Lerneinheit 2
Seite 186

1. Darstellung von Geraden in der Ebene mithilfe von Parameterformen

Gegeben sind die beiden Geraden f_1 und f_2 mit $f_1(x) = -2x + 1$ und $f_2(x) = \frac{3}{4}x - 1{,}5$.

- Es sind verschiedene Richtungsvektoren gegeben. Ordnen Sie diese den Geraden f_1 und f_2 begründet zu.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2{,}3 \\ -4{,}6 \end{pmatrix}$ $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

- g sei die Gerade mit der Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Sie lässt sich auch mit der Gleichung $g(x) = m \cdot x + b$ darstellen. Drücken Sie m allgemein durch die Koordinaten des Richtungsvektors $\vec{u}$ aus. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis anhand der Steigungen der Geraden f_1 und f_2 und der zugeordneten Richtungsvektoren.

2. Orthogonalität von Geraden in der Ebene

Aus der Analysis ist für zwei Geraden f und g mit $f(x) = m_1 \cdot x + b_1$ und $g(x) = m_2 \cdot x + b_2$, die zueinander orthogonal sind (beispielsweise für Tangente und Normale), bekannt, dass das Produkt ihrer Steigungen -1 ist, also $m_1 \cdot m_2 = -1$ gilt.

Gegeben sind die Geraden g_1, g_2 und g_3 jeweils durch eine Parameterform:

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Notieren Sie die Geradengleichungen jeweils in der Form $g(x) = m \cdot x + b$.
- Entscheiden Sie mithilfe des Kriteriums $m_1 \cdot m_2 = -1$, welche der Geraden g_1 bis g_3 zueinander orthogonal sind.
- Untersuchen Sie, wie man die Orthogonalität zweier Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ direkt anhand ihrer Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ erkennen kann.
- Die Zahl $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$ nennt man das Skalarprodukt $\vec{u} \circ \vec{v}$ der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Formulieren Sie ein Kriterium für die Untersuchung der Orthogonalität zweier Geraden mithilfe des Skalarprodukts.

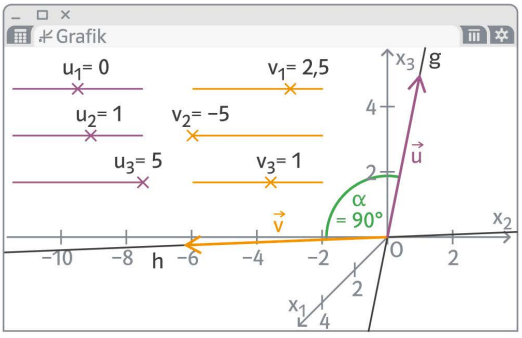
3. Orthogonalität von Geraden im Raum

Erforschen Sie mithilfe eines MMS, ob sich das Skalarprodukt-Kriterium für die Orthogonalität zweier Geraden auf den Raum übertragen lässt.

Zeichnen Sie zwei Ursprungsgeraden

$g: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Messen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.



16 **interaktive Anwendung** Orthogonalität von Geraden im Raum

- Variieren Sie die Koordinaten der Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ so, dass die Vektoren zueinander orthogonal sind.
- Prüfen Sie anhand dieser Beispiele, ob sich das Kriterium zur Überprüfung auf Orthogonalität zweier Geraden in der Ebene auf Ursprungsgeraden im Raum übertragen lässt.
- Begründen Sie, dass sich das Kriterium für die Orthogonalität zweier Geraden, die sich im Ursprung schneiden, auf zwei beliebige sich schneidenden Geraden übertragen lässt.

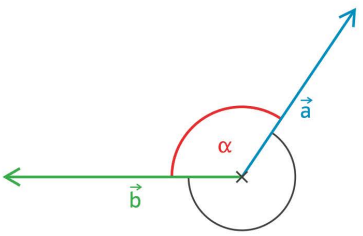
4. Orthogonalität von Vektoren im Raum

Begründen Sie mithilfe des Satzes von Pythagoras, dass zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ im Raum genau dann orthogonal sind, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

Winkel zwischen Vektoren

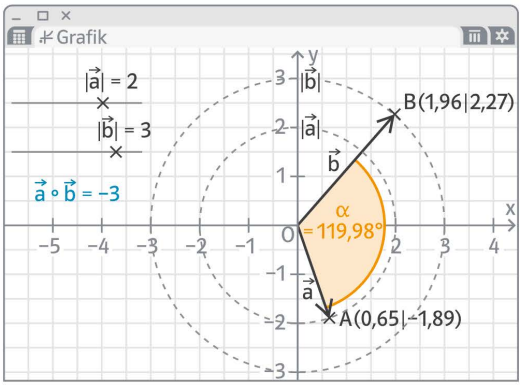
Lerneinheit 3
Seite 191

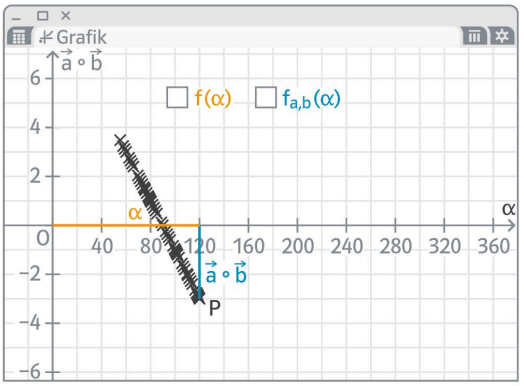
Gegeben sind zwei Punkte $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$ und deren Ortsvektoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Diese Vektoren schließen zwei Winkel ein. Den kleineren dieser Winkel bezeichnet man als den Winkel zwischen den Vektoren.



I7 **interaktive Anwendung**
Winkel zwischen zwei Vektoren

In der interaktiven Anwendung (siehe Grafik) kann man die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf dem jeweiligen Kreis verschieben.
Die Längen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ können mithilfe der Schieberegler variiert werden. Es wird der Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gemessen und das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ berechnet. In der rechten Grafik wird der Wert des Skalarprodukts $\vec{a} \circ \vec{b}$ in Abhängigkeit vom Winkel α dargestellt.





1. Setzen Sie die Schieberegler auf $|\vec{a}| = 1$ und $|\vec{b}| = 1$. Verändern Sie in der linken Grafik die Größe des Winkels α, indem Sie die Position der Punkte A bzw. B verändern.
Wählen sie anschließend $|\vec{a}| = 2$ und $|\vec{b}| = 3$ und verändern Sie die Größe des Winkels α. Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen zur Veränderung des Punktes P in der rechten Grafik.

2. Formulieren Sie eine Vermutung für eine Gleichung der Funktion f, die das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ in Abhängigkeit vom Winkel α für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $|\vec{a}| = 2$ und $|\vec{b}| = 3$ beschreibt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe der Check-Box f(α) (s. rechte Grafik).

3. Blenden Sie f(α) mithilfe der Check-Box aus und $f_{a,b}(\alpha)$ ein. Variieren Sie $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ mithilfe der Schieberegler. Beschreiben Sie die Veränderungen des jeweils entstehenden Funktionsgraphen.

4. Stellen Sie eine Funktionsgleichung von $f_{a,b}$ mit allgemeinem $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ auf und überprüfen Sie diese an selbst gewählten Beispielen.

5. Mithilfe der Funktionsgleichung von $f_{a,b}$ und des Skalarprodukts können Winkelgrößen zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt werden. Berechnen Sie für folgende Vektoren die Größe des Winkels α zwischen den beiden Vektoren und überprüfen Sie mit einem MMS.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

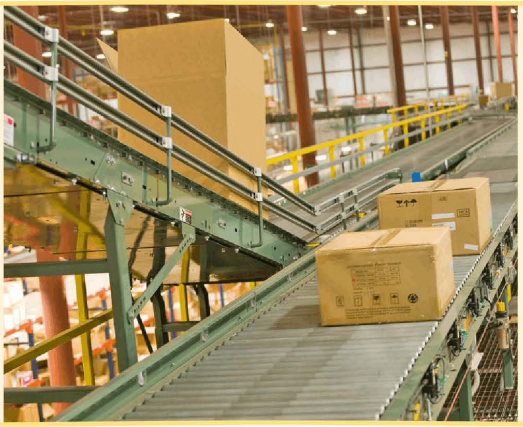
6. Prüfen Sie, ob die Berechnung von Winkelgrößen sich auf den Raum übertragen lässt, indem Sie jeweils für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Größe des Winkels α analog zur Ebene berechnen. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie die Vektoren mit einem MMS zeichnen und die Größe des Winkels berechnen lassen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

1 Wiederholung: Geraden und Lagebeziehungen

Auf dem ersten Förderband befindet sich ein Paket im Punkt $(3|-1|0{,}5)$. In den nächsten 10 Sekunden bewegt sich das Paket pro Sekunde in Richtung des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Das zweite Förderband beginnt im Punkt $(-10|20|8)$ und endet im Punkt $(40|0|4)$. Für den Transport auf diesem Band benötigt ein Paket 12 s (alle Koordinaten in m). Mit welcher Geschwindigkeit transportieren die Förderbänder jeweils die Pakete?



Eine Gerade ist eine Menge von Punkten, die man durch eine Parameterform beschreiben kann. Zwei Geraden können im Raum unterschiedlich zueinander liegen. Wie man Geraden im Raum mathematisch beschreibt und ihre Lage untersucht, wird im Folgenden wiederholt.

Parameterform einer Geraden

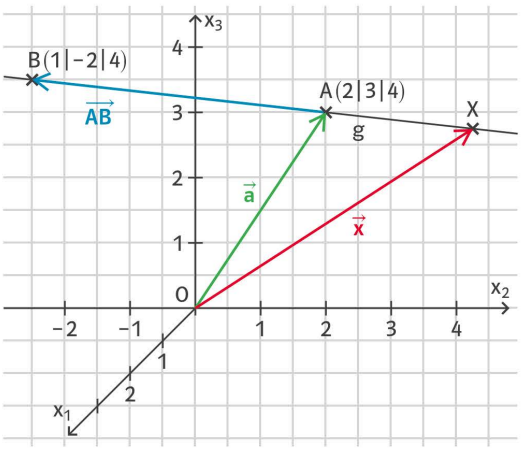
Gegeben sind zwei (nicht identische) Punkte A und B, die eine Gerade g festlegen. Diese kann man mithilfe von Vektoren beschreiben.

Wenn der Stützvektor $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ des Punktes A der Geraden g und der Vektor $\overrightarrow{AB}$, der die Richtung der Geraden angibt, bekannt sind, dann liegt ein beliebiger Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ auf der Geraden, wenn es eine reelle Zahl r mit $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB}$

Für $A(2|3|4)$ und $B(1|-2|4)$ ist der Vektor

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -2-3 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein möglicher Richtungsvektor der Geraden g, sodass die Gerade g mit folgender Parameterform beschrieben werden kann: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$



Abstand zweier Punkte im Raum, Betrag eines Vektors

Den Abstand zwischen zwei Punkten $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ erhält man mit der Formel $d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

Der Betrag eines Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ist der Abstand d zwischen den Punkten A und B.

Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \vec{u}$ erhält man $d = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = |\vec{u}|$.

In Fig. 1 erhält man $|\vec{u}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-3)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{26} \approx 5{,}10$ [LE].

Gibt der Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ die Bewegung eines Körpers von A nach B in einer bestimmten Zeiteinheit an, dann liefert der Betrag von $\overrightarrow{AB}$ zusammen mit der zugehörigen Einheit die Geschwindigkeit des Körpers.

Gerade durch zwei Punkte, Abstand zweier Punkte

Gegeben sind die Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$.

Die Gerade durch die Punkte A und B kann durch folgende Parameterform beschrieben werden:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ heißt **Stützvektor**, der Vektor $\overrightarrow{AB}$ **Richtungsvektor** der Geraden g, die reelle Zahl r nennt man Parameter.

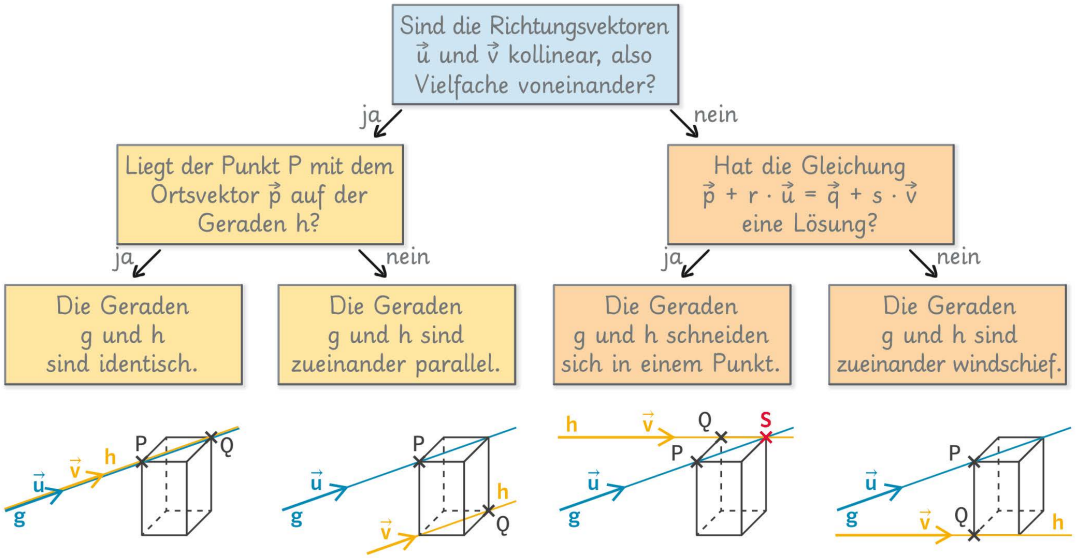
Den **Abstand** d zwischen den Punkten A und B erhält man mithilfe des **Betrags** des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

Es gilt: $d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

Achtung:
Der Parameter in der Parameterform durchläuft immer alle reellen Zahlen. Dies wird bei den Gleichungen im Folgenden nicht mehr angegeben.

Die Lage zweier Geraden zueinander

Es sind zwei Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$ gegeben. Zwei Geraden im Raum können identisch sein, parallel verlaufen, sich schneiden oder zueinander windschief sein.



Beispiel 1 **Längen berechnen, eine Punktprobe durchführen**

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1|1|0)$ und $B(-5|3|-4)$.

a) Bestimmen Sie eine Parameterform der Geraden g.

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

c) Die Gerade h mit $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist gegeben. Die Richtungsvektoren von g und h sind kollinear. Untersuchen Sie, ob die Geraden g und h parallel oder identisch sind.

Lösung

a) z. B. $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 - 1 \\ 3 - 1 \\ -4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{56} \approx 7{,}5$ [LE]

c) *Man prüft, ob der Punkt $A(1|1|0)$ von g auch auf der Geraden h liegt, ob es also eine Zahl s gibt, die die Gleichung*

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ erfüllt.}$$

I $5 + 3s = 1$
II $7 - s = 1$
III $4 + 2s = 0$ ergibt $s = -2$.
Beim Einsetzen von $s = -2$ in die Gleichung II erhält man mit $7 - (-2) = 9 \neq 1$ eine falsche Aussage.

A liegt somit nicht auf h. Die Geraden g und h sind parallel.

Beispiel 2 **Die Lage zweier Geraden untersuchen**

Untersuchen Sie die Lage der Geraden g und h zueinander. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts S.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\4\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

Lösung

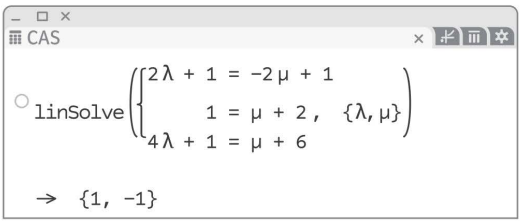
a) *1. Untersuchen, ob die Richtungsvektoren kollinear sind:*

Da $\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ ist, sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, sodass die Geraden g und h sich entweder schneiden oder windschief zueinander sind.

2. Prüfen, ob es einen Schnittpunkt gibt:

Man untersucht die Gleichung $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ auf Lösbarkeit.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man das Ergebnis, dass die obige Gleichung eine Lösung für λ und μ hat (s. rechts). $\lambda = 1,\ \mu = -1$



D1 MMS-Anleitung Geraden

3. Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunkts S:

Einsetzen von $\lambda = 1$ in die Gleichung von g liefert $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$.

Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt S(3|1|5).

b) *1. Untersuchen, ob die Richtungsvektoren kollinear sind:*

Da $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ ist, sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, sodass die Geraden g und h sich entweder schneiden oder windschief zueinander sind.

2. Prüfen, ob es einen Schnittpunkt gibt:

Man untersucht die Gleichung $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\4\\3\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ auf Lösbarkeit.

Beachten Sie: Zur Schnittpunktberechnung ist es wichtig, dass man in den Gleichungen unterschiedliche Parameter, z. B. s und t, verwendet.

$$\begin{aligned}
&\text{I} \quad 3 + s = 9 + t \quad \text{ergibt} \quad \text{I}_a \quad s - t = 6\\
&\text{II} \quad 1 + s = 4 + 3t \quad \text{ergibt} \quad \text{II}_a \quad s - 3t = 3\\
&\text{III} \quad 2s = 3 + 2t \quad \text{ergibt} \quad \text{III}_a \quad 2s - 2t = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{I}_a - \text{II}_a: \quad s - t - (s - 3t) = 6 - 3 \quad |:2\\
&\qquad\qquad t = 1{,}5\\
&t = 1{,}5 \rightarrow \text{I}_a: \quad s - 1{,}5 = 6 \quad |+1{,}5\\
&\qquad\qquad s = 7{,}5
\end{aligned}$$

$s = 7{,}5$ und $t = 1{,}5 \rightarrow \text{III}_a: \quad 2 \cdot 7{,}5 - 2 \cdot 1{,}5 = 12 \neq 3$

Somit besitzt die obige Gleichung keine Lösung für s und t. Da zusätzlich die Richtungsvektoren nicht kollinear sind, sind die Geraden g und h zueinander windschief.

Aufgaben

○ **1** Die Gerade g geht durch die Punkte A und B. Geben Sie eine Parameterform von g an.

a) A(2|1|3), B(1|5|−6) b) A(0|1|2), B(0|3|−3)

c) A(1|4|6), B(0|0|0) d) A(2|2|2), B(5|2|−2)

→ **Lerntipp** Seite 181, Beispiel 1a)

○ **2** Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

a) A(1|−2|2), B(3|0|1), C(3|0|3) **b)** A(7|0|1), B(5|−3|−1), C(−3|−6|−3)

→ **Lerntipp** Seite 181, Beispiel 1a) und b)

○ **3** Ordnen Sie zueinander parallele und zueinander identische Geraden zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

→ **Lerntipp** Seite 181, Beispiel 1c)

g: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

i: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

j: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

○ **4** Überprüfen Sie, ob die Parameterformen dieselbe Gerade beschreiben.

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

→ **Lerntipp** Seite 181, Beispiel 1c)

○ **5** Gegeben sind die Geraden g, h und i mit

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und i: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Untersuchen Sie jeweils die Lage zweier Geraden zueinander und bestimmen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts.

b) Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit einem MMS.

→ **Lerntipp** Seite 182, Beispiel 2

○ **6** **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Wenn die Richtungsvektoren zweier Geraden kollinear sind, dann sind die Geraden zueinander parallel.

b) Wenn zwei Geraden zueinander windschief sind, dann sind ihre Richtungsvektoren nicht kollinear.

c) Wenn die Richtungsvektoren zweier Geraden nicht kollinear sind, dann schneiden sich die Geraden.

d) Wenn sich zwei Geraden im Raum schneiden, dann sind ihre Richtungsvektoren nicht kollinear.

e) Haben zwei Geraden im Raum keine gemeinsamen Punkte, dann sind sie zueinander windschief.

→ **Lerntipp** Seite 182, Beispiel 2

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 470

○ **7** Gegeben sind die Punkte A(0|0|7), B(2|−3|1) und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

b) Geben Sie eine Parameterform der Geraden h an, die durch die Punkte A und B verläuft.

c) Überprüfen Sie, ob die Geraden g und h parallel oder identisch sind.

○ **8** Untersuchen Sie die Lage der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ zur Geraden h.

a) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ **b)** h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$ **c)** h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 35 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

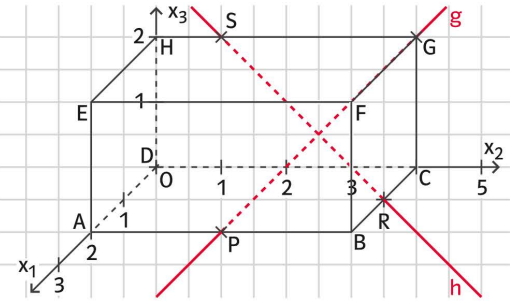
9 Gegeben sind die Punkte A(2|4|5), B(5|8|5) und D(2|0|2).

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD gleichschenklig, aber nicht gleichseitig, ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes C so, dass das Viereck ABCD eine Raute ist.

10 a) Überprüfen Sie, ob sich die Geraden g und h in der nebenstehenden Abbildung schneiden. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts.

b) Geben Sie mithilfe der eingezeichneten Eckpunkte des Quaders ohne weitere Rechnung zwei Geraden an, die sich schneiden, und zwei Geraden, die zueinander windschief sind.



11 Zwei der Geraden g, h und i sind zueinander windschief. Beschreiben Sie, wie man sofort erkennen kann, welche Geraden dies sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

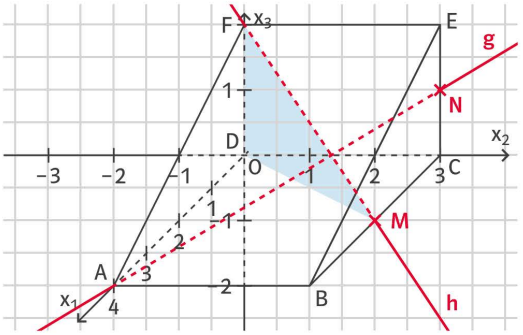
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ $i: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

12 In der Abbildung sind M und N die Kantenmitten des geraden Prismas.

a) Geben Sie drei verschiedene Parameterformen der Geraden g an.

b) Untersuchen Sie, ob sich die Geraden g und h schneiden.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des blau eingefärbten Dreiecks.



13 Geben Sie Werte für die Variablen a, b, c und d an, sodass die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\a\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}b\\2\\4\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}c\\1\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\d\end{pmatrix}$

a) zueinander parallel verlaufen,

b) identisch sind,

c) sich schneiden,

d) zueinander windschief sind.

14 Eine Leuchtkugel K_1 startet vom Punkt P(4|0|0) aus und fliegt innerhalb von einer Sekunde annähernd geradlinig zum Punkt Q(0|0|40). Eine zweite Leuchtkugel K_2 startet vom Punkt R(0|9|0) und fliegt in der ersten Sekunde annähernd geradlinig zum Punkt T(0|0|30). Die Koordinaten der Punkte sind hierbei in Metern angegeben.

a) Überprüfen Sie, ob sich die beiden Leuchtkugeln treffen könnten.

b) Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit der beiden Leuchtkugeln in der ersten Sekunde nach dem Start.

c) Berechnen Sie, wie weit beide Leuchtkugeln zum Zeitpunkt des Starts von einer Person entfernt sind, die sich am Punkt (3|4|9) befindet.

15 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$. Geben Sie eine Parameterform

a) für eine Gerade h an, die die Gerade g schneidet,

b) für eine Gerade i an, die zur Geraden g parallel ist,

c) für eine Gerade j an, die zur Geraden g windschief ist.

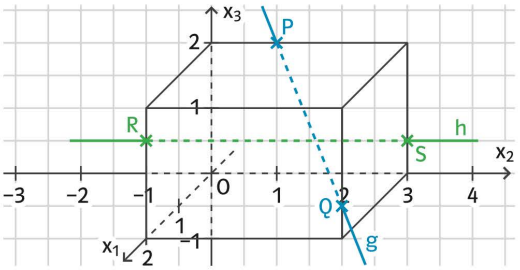
Test 2

Lösungen, Seite 471

16 Die Punkte P, Q, R und S liegen auf den Kanten des abgebildeten Quaders.

a) Entnehmen Sie der Abbildung die Koordinaten der Punkte P, Q, R und S.

b) Untersuchen Sie, ob sich die Geraden g und h schneiden, und berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts.



17 Auf dem Radarschirm sind zeitgleich zwei sich nahezu geradlinig bewegende Flugzeuge sichtbar. Flugzeug GLX 1378 hat die Position $(1|2|3)$, während Flugzeug JET 2222 die Position $(-4|7|9)$ hat. Eine Minute später hat GLX 1378 die Position $(-9|7|3{,}5)$ und JET 2222 befindet sich bei $(6|1|9)$. Die Koordinaten sind in Kilometern angegeben.

a) Stellen Sie für beide Flugbahnen eine Bewegungsgleichung in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten auf.

b) Vergleichen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Flugzeuge.

c) Beurteilen Sie, ob die Gefahr einer Kollision besteht.

18 Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(3|2|1)$, $B(5|5|7)$ und $C(4+3k|3{,}5+2k|4-2k)$.

a) Begründen Sie anhand einer Rechnung, dass das Dreieck ABC für jeden Wert von $k \in \mathbb{R}$ gleichschenklig ist.

b) Bestimmen Sie die Werte von k, für die sich ein gleichseitiges Dreieck ergibt.

19 SP

Paula weiß, dass die x_3-Achse durch $g: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Hassan weiß, dass die x_3-Achse auch durch $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

Beurteilen Sie die angegebenen Begründungen für Hassans Parameterform der x_3-Achse. Die Wortliste auf dem Rand kann helfen.

a) Die x_3-Koordinate kann jeden beliebigen Wert annehmen und die x_1- und x_2-Koordinate sind immer null.

b) Nur der Richtungsvektor ist für die Lage der Geraden entscheidend.

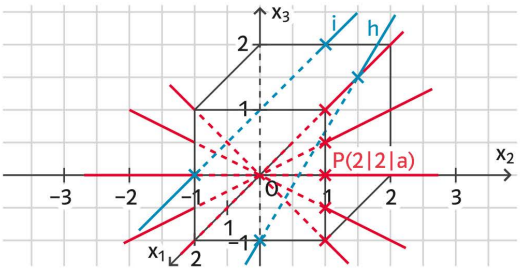
c) Der Richtungs- und der Stützvektor von h sind ein Vielfaches des Richtungsvektors von g.

Wortliste
- kollinear
- x_3-Achse
- parallele Geraden
- Stützvektor
- identische Geraden

20 Die Geraden h und i enthalten Kantenmittelpunkte des abgebildeten Würfels. Die Gerade g_a enthält die Kantenpunkte $O(0|0|0)$ und $P(2|2|a)$.

a) Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass sich die Geraden g_a und h schneiden.

b) Begründen Sie, dass keine Gerade g_a die Gerade i schneidet.



Grundwissen Test — Ein Gleichungssystem grafisch lösen

Grundwissen, Seite 417
Lösungen, Seite 471

G **21** Stellen Sie jeweils die Gleichungen mithilfe eines MMS grafisch dar. Beurteilen Sie anschließend, wie viele Zahlenpaare die Lösungsmenge des Gleichungssystems enthält, und geben Sie die Lösungsmenge an.

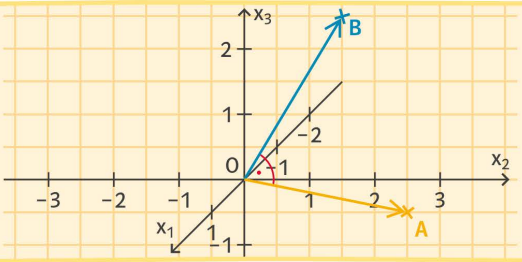
a) $3y = -4{,}5x + 9$; $3x + 2y = 6$

b) $4x + 3y = 6$; $-2x + y = -8$

c) $y = 1{,}5 - 0{,}5x$; $3x + 6y = -2$

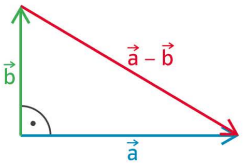
2 Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt

In einem MMS wird der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als rechter Winkel angezeigt.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ zueinander orthogonal sind.



Der Satz des Pythagoras liefert ein einfaches Kriterium für den Nachweis eines rechten Winkels in einem Dreieck. Dieses Kriterium wird nun genutzt, um die Orthogonalität von Vektoren im Raum zu prüfen.

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $(\neq \vec{o})$ heißen zueinander orthogonal, wenn zugehörige Pfeile mit gleichem Anfangspunkt zueinander orthogonal sind. Man schreibt $\vec{a} \perp \vec{b}$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt:



Die Pfeile zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$ gilt.

Es ist $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$
$= (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2) + (a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2)$

und somit $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$.

Außerdem ist $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$.

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind also genau dann zueinander orthogonal, wenn für ihre Koordinaten $2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = 0$, also $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ gilt.
Den Term $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ nennt man **Skalarprodukt** $\vec{a} \circ \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Rechengesetze für das Skalarprodukt
Für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ und jede reelle Zahl r gilt:
$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ (Kommutativgesetz) $\quad (r \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ (Assoziativgesetz)
$(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$ (Distributivgesetz) $\quad \vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Diese Regeln werden auf Seite 190 in Aufgabe 20 nachgewiesen.

Skalarprodukt und orthogonale Vektoren
Zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ heißt der Term $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ das **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o}$ sind genau dann zueinander **orthogonal**, wenn ihr Skalarprodukt null ist: Es gilt $\vec{a} \perp \vec{b}$ genau dann, wenn $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

Die Bezeichnung **Skalarprodukt** erinnert daran, dass dieses Produkt der Vektoren kein Vektor, sondern ein „Skalar" (das heißt eine Zahl) ist.

Orthogonalität von sich schneidenden Geraden
Zwei sich schneidende Geraden g und h mit $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$ heißen zueinander orthogonal (man schreibt $g \perp h$), wenn ihre Richtungsvektoren zueinander orthogonal sind, d.h., wenn $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$ gilt.

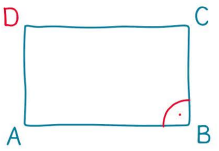
Beispiel 1 **Rechtecke untersuchen**

Zeigen Sie, dass es zu den Punkten $A(-4|3|2)$, $B(2|1|-5)$ und $C(5|3|-3)$ einen Punkt D gibt, sodass das Viereck ABCD ein Rechteck ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D.

Lösung

Damit ABCD ein Rechteck ist, müssen die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ zueinander orthogonal sein. Es muss also $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ gelten.

Planskizze:



$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ 3-1 \\ 2+5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-1 \\ -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 7 \cdot 2 = 0.$$

Für die Bestimmung der Koordinaten von D wird ausgenutzt, dass $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ gelten muss.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

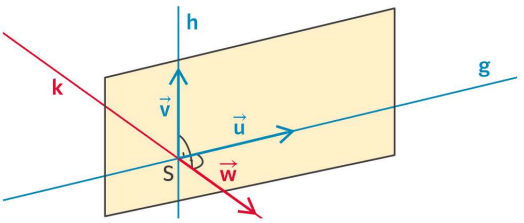
Man erhält $D(-1|5|4)$.

Beispiel 2 **Orthogonalität von sich schneidenden Geraden untersuchen**

Gegeben sind zwei Geraden g und h mit

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, die sich im Punkt $S(-5|-3|-1)$ schneiden.



a) Überprüfen Sie, ob die Geraden g und h orthogonal sind.

b) Stellen Sie eine Parameterform der Geraden k auf, die sowohl g als auch h orthogonal schneidet.

Lösung

a) *Die Geraden g und h schneiden sich orthogonal, wenn ihre Richtungsvektoren orthogonal zueinander sind.* $\vec{u} \circ \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-7) = 0.$

b) Der Richtungsvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ der Geraden k muss zu den Richtungsvektoren von g und h, also zu $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und zu $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ orthogonal sein. Daher gilt $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0$,

also
$$\begin{array}{ll} \text{I} & 3w_1 + 2w_2 + 4w_3 = 0 \\ \text{II} & 6w_1 + 5w_2 - 7w_3 = 0 \end{array}$$

ohne MMS

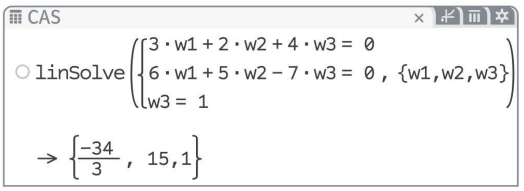
$$\begin{array}{ll} \text{I} & 3w_1 + 2w_2 + 4w_3 = 0 \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} & w_2 - 15w_3 = 0 \end{array}$$

Weil die Länge des Richtungsvektors keine Rolle spielt, wählt man $w_3 = 1$. So erhält man $w_2 = 15$. Das Einsetzen in Gleichung I liefert $3w_1 + 30 + 4 = 0$ und somit $w_1 = \frac{-34}{3}$.

Damit gilt $\vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{34}{3} \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Um Brüche zu vermeiden, kann man das Dreifache des Vektors wählen.* Somit ist $\begin{pmatrix} -34 \\ 45 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein möglicher Richtungsvektor der Geraden k. *Damit die Gerade k die Geraden g und h schneidet, muss sie durch den Schnittpunkt $S(-5|-3|-1)$ der Geraden g und h verlaufen. Dieser kann somit als Ortsvektor für die Geradengleichung verwendet werden.*

mit MMS

Weil die Länge des Richtungsvektors keine Rolle spielt, wählt man $w_3 = 1$.



Eine mögliche Parameterform für die Gerade k lautet somit $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -34 \\ 45 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgaben

○ **1** Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ordnen Sie jedem Skalarprodukt seinen Wert zu.

1	$\vec{a} \circ \vec{b}$	2	$\vec{c} \circ \vec{a}$	3	$\vec{b} \circ \vec{c}$	4	$\vec{b} \circ \vec{a}$	5	$\vec{a} \circ \vec{c}$

A	-7	B	5	C	0

○ **2** Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$ ist.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ b_2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b_3 \end{pmatrix}$

○ **3** Zeigen Sie, dass es zu den Punkten $A(-2|2|3)$, $B(2|10|4)$ und $D(5|-2|7)$ einen Punkt C gibt, sodass das Viereck ABCD ein Quadrat ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von C.

→ **Lerntipp** Seite 187, Beispiel 1

○ **4** Drücken Sie die Diagonalen des Vierecks ABCD mit $A(-2|-2)$, $B(3|0)$, $C(3|3)$ und $D(0|3)$ durch Vektoren aus. Prüfen Sie, ob sie zueinander orthogonal sind.

○ **5** Untersuchen Sie, ob die sich schneidenden Geraden g und h zueinander orthogonal sind.

→ **Lerntipp** Seite 187, Beispiel 2a)

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

○ **6** Geben Sie drei Vektoren an, die in verschiedene Richtungen zeigen und orthogonal zu $\vec{a}$ sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

○ **7** Bestimmen Sie zwei Vektoren, die sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht stehen.

→ **Lerntipp** Seite 187, Beispiel 2b)

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 472

○ **8** Gegeben ist die Raute ABCD.
Prüfen Sie, ob es sich sogar um ein Quadrat handelt.

a) $A(6|1|7)$, $B(5|1|8)$, $C(4|1|7)$, $D(5|1|6)$

b) $A(1|2|3)$, $B(-2|7{,}5|1)$, $C(-1|5|-5)$, $D(2|-0{,}5|-3)$

c) $A(7|4|6)$, $B(3|1|11)$, $C(-1|-2|6)$, $D(3|1|1)$

d) $A(5|2|4)$, $B(4|1|3)$, $C(3|2|2)$, $D(4|3|3)$

○ **9** Gegeben sind die Geraden g und h mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Überprüfen Sie, ob sich die Geraden g und h orthogonal schneiden.
b) Stellen Sie eine Parameterform der Geraden k auf, die g und h orthogonal schneidet.

◒ **10** Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sich orthogonal schneiden.

11 Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(5|2|2)$, $B(1|5|4)$ und $C(4|9|4)$.

a) Zeigen Sie einmal unter Verwendung des Satzes von Pythagoras und einmal mithilfe des Skalarprodukts, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

12 Gegeben sind die Punkte A, B, C und D. Untersuchen Sie jeweils, ob das Viereck ein Trapez, ein Parallelogramm, ein Rechteck, eine Raute oder vielleicht sogar ein Quadrat ist.

a) $A(5|0|4)$, $B(1|6|0)$, $C(-1|5|2)$, $D(1|2|4)$

b) $A(2|6|5)$, $B(-2|6|4)$, $C(-4|4|1)$, $D(0|4|2)$

c) $A(2|10|-5)$, $B(12|2|1)$, $C(2|-6|7)$, $D(-8|2|1)$

d) $A(-2|2|3)$, $B(5|5|5)$, $C(9|6|5)$, $D(2|3|3)$

13 Erläutern Sie, wie man mit Vektoren beschreiben kann, dass

a) ein Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist,

b) ein Dreieck ABC bei A rechtwinklig ist,

c) ein Viereck ABCD ein Rechteck ist,

d) ein Viereck ABCD ein Quadrat ist.

14 Die Schnittpunkte der Geraden g, h und i bilden ein Dreieck.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} -23 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Weisen Sie nach, dass das Dreieck rechtwinklig ist, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

15 Geben Sie an, ob der Term einen Vektor oder eine Zahl beschreibt oder ob er nicht definiert ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) $(\vec{a} - \vec{b}) \circ \vec{c}$

b) $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$

c) $\vec{a} \circ \vec{c} - (\vec{a} + \vec{b})$

d) $(\vec{a} \circ \vec{b}) + (\vec{a} \circ \vec{c})$

16 Azra und Sam wollen untersuchen, ob es sich bei dem Parallelogramm ABCD mit $A(3|0|1)$, $B(5|7|3)$, $C(6|11|6)$ und $D(4|4|4)$ um ein Rechteck handelt.

Sam behauptet: „Ich berechne hierfür einfach die Länge der Diagonalen."

Azra meint: „Ein Parallelogramm ist auch ein Rechteck, wenn benachbarte Seiten zueinander orthogonal sind. Das kann ich mithilfe des Skalarprodukts untersuchen."

a) Erklären Sie Sams Lösungsansatz. Prüfen Sie auf diesem Weg, ob das Parallelogramm ein Rechteck ist.

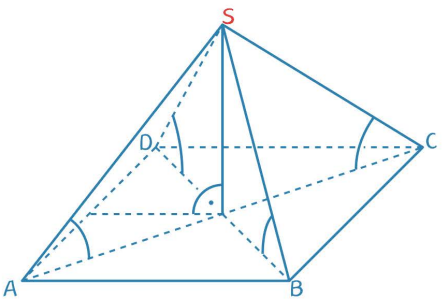
b) Prüfen Sie mit dem Lösungsansatz von Azra, ob das Parallelogramm ein Rechteck ist.

c) Vergleichen Sie die Lösungswege von Azra und Sam miteinander.

17 a) Zeigen Sie, dass die Punkte $A(0|-3|2)$, $B(2|0|8)$ und $D(6|-1|-1)$ ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck bilden.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

c) Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Spitze S. Stellen Sie eine Parameterform der Geraden auf, welche die Höhe der Pyramide enthält.



18 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Wenn $\vec{a} \circ \vec{a} = 0$ ist, dann ist $\vec{a}$ der Nullvektor $\vec{o}$.

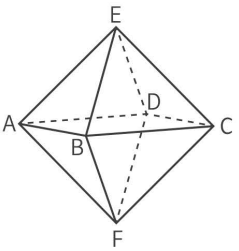
b) In einem Rechteck ABCD gilt $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = 0$.

c) Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist das Quadrat seines Betrags.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 472

◒ **19** Das regelmäßige Oktaeder ist ein Körper, der von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken gebildet wird. Die Punkte $A(3|-3|0)$, $B(3|3|0)$ und $E(0|0|\sqrt{18})$ sind Eckpunkte eines regelmäßigen Oktaeders.



a) Bestimmen Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte.

b) Prüfen Sie, ob die drei Raumdiagonalen jeweils paarweise orthogonal zueinander sind.

c) Untersuchen Sie, ob das Viereck BFDE eine Raute oder sogar ein Quadrat ist.

● **20** Zeigen Sie, dass allgemein für drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ gilt:

a) $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$

b) $(r \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ für jede reelle Zahl r

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$

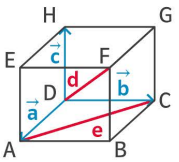
d) $\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$

● **21** **a)** Für reelle Zahlen gilt: Aus $a \cdot b = a \cdot c$ $(a \neq 0)$ folgt $b = c$. Überprüfen Sie anhand von Beispielen, ob dies auch entsprechend für Vektoren gilt.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass im Allgemeinen $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \circ \vec{c})$ ist.

● **22** Zeigen Sie mithilfe von Vektoren: Ist das Produkt der Steigungen zweier Geraden in der x_1x_2-Ebene -1, dann sind die Geraden zueinander orthogonal.

● **23** Gegeben ist der rechts abgebildete Quader mit quadratischer Grundfläche.
Zeigen Sie, dass eine Diagonale e der Grundfläche zu einer diese nicht schneidenden Raumdiagonalen d orthogonal ist.



● **24** Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(3|0)$, $B(3|6)$ und $C(1|2)$.

a) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$ und der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Umkreismittelpunktes des Dreiecks ABC.

c) Erläutern Sie, welche Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Mittelsenkrechten bzw. des Umkreismittelpunktes eines Dreiecks im Dreidimensionalen auftreten.

Grundwissen Test — Finden Sie den Fehler!

→ **Grundwissen**, Seite 417
Lösungen, Seite 473

G **25** Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie die richtige Lösung.

a) Das LGS soll gelöst werden:

I $3x - y = 7$

II $2x = y - 3 \quad |+3$

IIa $y = 2x + 3$

$y = 2x + 3$ ↷ I $3x - 2x + 3 = 7$

$x + 3 = 7 \quad |-3$

$x = 4$

$x = 4$ ↷ IIa $y = 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$L = \{(4|11)\}$

b) Das LGS soll gelöst werden:

I $4x = 9 - y$

II $4x = 3y + 5$

Gleichsetzen von I und II

$9 - y = 3y + 5 \quad |+y - 5$

$4 = 4y \quad |:4$

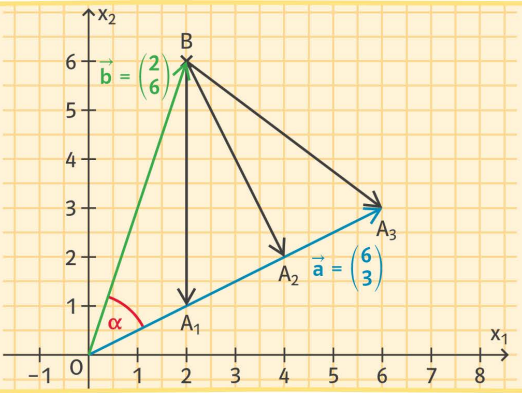
$1 = y$

$y = 1$ ↷ I $x = 9 - 1 = 8$

$L = \{(8|1)\}$

3 Winkel und Schnittwinkel

Berechnen Sie die Größe des Winkels α durch Verwendung eines geeigneten Dreiecks. Begründen Sie, für welches Dreieck Sie sich entschieden haben.



Zur Überprüfung der Orthogonalität von Vektoren wird das Skalarprodukt genutzt. Mit diesem lässt sich außerdem die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren berechnen.

Zeichnet man zu einem gemeinsamen Anfangspunkt Pfeile zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die nicht zueinander parallel sind, so entstehen zwei Winkel.
Den kleineren dieser beiden Winkel bezeichnet man als den **Winkel zwischen den Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (Fig. 1).

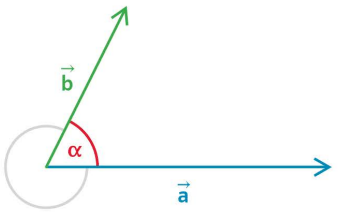


Fig. 1

Um die Größe des Winkels α zwischen zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o}$ berechnen zu können, braucht man ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 2). Man verändert daher z. B. den Vektor $\vec{a}$ durch Multiplikation mit einem Skalar s so, dass zwischen $\vec{a}$ und $\vec{x} = \vec{b} - s \cdot \vec{a}$ ein rechter Winkel entsteht. Es ist also eine Zahl s gesucht, für die $\vec{a} \perp \vec{x}$, d.h. $\vec{a} \perp (\vec{b} - s \cdot \vec{a})$.

$\vec{a} \circ (\vec{b} - s \cdot \vec{a}) = 0$ | Distributivgesetz

$\vec{a} \circ \vec{b} - s \cdot \vec{a} \circ \vec{a} = 0$ | $\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$

$\vec{a} \circ \vec{b} - s \cdot |\vec{a}|^2 = 0$ | Äquivalenzumformung

$s = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2}$

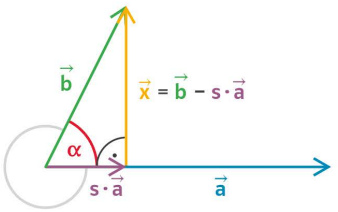


Fig. 2

In dem rechtwinkligen Dreieck gilt für α: $\cos(\alpha) = \frac{|s \cdot \vec{a}|}{|\vec{b}|} = s \cdot \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$

Beim Einsetzen von $s = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2}$ erhält man $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.
Diese Formel wurde für den Fall $0° \leq \alpha < 90°$ hergeleitet. In Aufgabe 18 auf Seite 195 soll sie auf den Bereich $90° \leq \alpha \leq 180°$ verallgemeinert werden.

Winkel zwischen zwei Vektoren
Für den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $(\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o})$ gilt

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $0° \leq \alpha \leq 180°$.

Schnittwinkel zweier Geraden

Wenn zwei Geraden sich schneiden, entstehen vier Winkel, je zwei der Größe α ($\alpha \leq 90°$) und je zwei der Größe $180° - \alpha$ (Fig. 1). Den Winkel α bezeichnet man als den Schnittwinkel der beiden Geraden.

Liefert die Formel $\frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ von g und $\vec{v}$ von h einen negativen Wert, erhält man den Kosinus desjenigen Winkels, der größer als 90° ist, da das Skalarprodukt dann negativ ist (Fig. 2).

Wenn man jedoch im Zähler Betragsstriche setzt, erhält man wegen der Beziehung $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$ (Fig. 2) direkt den gewünschten Schnittwinkel α.

Für den Schnittwinkel α zweier Geraden g und h mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt daher $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$, $0° \leq \alpha \leq 90°$.

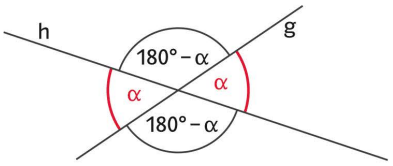


Fig. 1

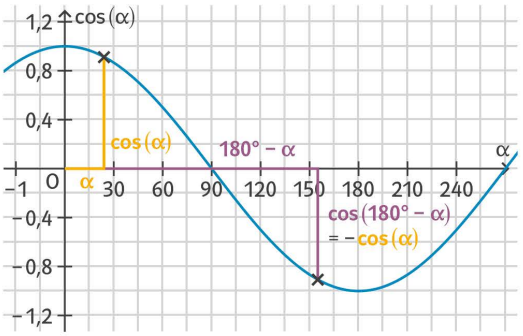
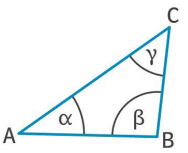


Fig. 2

Beispiel 1 **Winkelgrößen berechnen**

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(1|-1|-5)$, $B(4|1|-4)$ und $C(5|-1|-2)$. Berechnen Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC.



Lösung

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{14}$, $|\overrightarrow{AC}| = 5$ und $|\overrightarrow{BC}| = 3$

α ist der Winkel zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$: $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{12 + 0 + 3}{\sqrt{14} \cdot 5} = \frac{15}{5 \cdot \sqrt{14}}$, $\alpha \approx 36{,}7°$

β ist der Winkel zwischen $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$: $\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-3 + 4 - 2}{\sqrt{14} \cdot 3} = \frac{-1}{3 \cdot \sqrt{14}}$, $\beta \approx 95{,}1°$

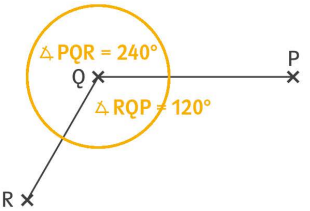
Mithilfe des Innenwinkelsummensatzes für Dreiecke folgt $\gamma \approx 180° - 36{,}7° - 95{,}1° = 48{,}2°$.

Beispiel 2 **Eine fehlende Koordinate bei gegebenem Winkel bestimmen**

Die Punkte $P(p_1|3|-4)$, $Q(0|2|-4)$ und $R(1|2|-3)$ schließen den Winkel $\sphericalangle PQR$ ein, der 240° groß ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P.

Lösung

Der Winkel $\sphericalangle PQR$ ist der größere der beiden Winkel, der an dem Scheitelpunkt Q entsteht, wenn man dort die Pfeile $\overrightarrow{QP}$ und $\overrightarrow{QR}$ beginnen lässt, da er größer als 180° ist.



Der kleinere der beiden Winkel zwischen $\overrightarrow{QP}$ und $\overrightarrow{QR}$ ist somit $360° - 240° = 120°$ groß.

Es ist $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$. Es muss also gelten:

$$-\frac{1}{2} = \frac{\overrightarrow{QP} \circ \overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}| \cdot |\overrightarrow{QR}|} = \frac{\begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ 3 - 2 \\ -4 + 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 2 - 2 \\ -3 + 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + 1} \cdot \sqrt{2}} \quad \left| \sqrt{p_1^2 + 1} \cdot \sqrt{2} \right. \quad (*)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{p_1^2 + 1} = p_1 \quad \left| \text{Quadrieren} \right.$$

$$\frac{1}{2} \cdot (p_1^2 + 1) = p_1^2 \quad \left| -\frac{1}{2} p_1^2 \right.$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} p_1^2 \quad | \cdot 2$$

$$1 = p_1^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\pm 1 = p_1$$

p_1 muss negativ sein, da der Nenner in (*) positiv ist.

Da p_1 negativ sein muss, kommt als Lösung nur $p_1 = -1$ in Betracht, und somit gilt $P(-1|3|-4)$.

Beispiel 3 **Größe des Schnittwinkels zweier Geraden berechnen**

Gegeben sind die sich schneidenden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden g und h.

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels, in dem die Gerade h die x_3-Achse schneidet.

Lösung

a)
$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}} \approx 0{,}129,$$
also $\alpha \approx 82{,}6°$.

b) Ein möglicher Richtungsvektor der x_3-Achse ist $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{1\cdot\sqrt{10}} \approx 0{,}95,$$
also $\alpha \approx 18{,}4°$.

Aufgaben

○ **1** Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-11\\4\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Lösungen zu Aufgabe 1: 3,4° 90° 71,6° 57,1°

○ **2** Berechnen Sie die Längen der Seiten und die Größen der Winkel im Dreieck ABC. Zeichnen Sie für Teilaufgabe a) und b) das Dreieck und messen Sie nach.

a) A(2|1), B(5|−1), C(4|3) b) A(1|1), B(9|−2), C(3|8)

c) A(5|0|4), B(3|0|0), C(5|4|0) d) A(5|1|5), B(5|5|3), C(3|3|5)

Lerntipp Seite 192, Beispiel 1

○ **3** Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist α. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\a\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\alpha = 90°$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\b\\0\end{pmatrix}$, $\alpha = 30°$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\c\end{pmatrix}$, $\alpha = 60°$

Lerntipp Seite 192, Beispiel 2

○ **4** Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\-6\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-6\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix}$ und $k: \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\6\\-5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\6\\-5\end{pmatrix}$ sind gegeben.

a) Prüfen Sie, welche Koordinatenachsen jeweils von den Geraden geschnitten werden, und berechnen Sie jeweils die Größe der Schnittwinkel zwischen der Geraden und der entsprechenden Koordinatenachse.

b) Die drei Geraden bilden ein Dreieck. Berechnen Sie die Eckpunkte des Dreiecks und die Größe der Innenwinkel.

Lerntipp Seite 193, Beispiel 3

Test 1

Lösungen, Seite 473

○ **5** a) Ein Viereck OPQR hat die Eckpunkte O(0|0|0), P(2|−2|−8), Q(5|5|6) und R(1|4|9). Berechnen Sie die Länge der Seiten und die Größe der Innenwinkel des Vierecks.

b) Der Winkel $\sphericalangle$ ABC mit den Punkten $A(-\sqrt{2}|1|3)$, $B(-\sqrt{2}|0|3)$ und C(0|c|3) ist 45° groß. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate des Punktes C.

○ **6** Überprüfen Sie, ob sich die Geraden g und h schneiden, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Größe des Schnittwinkels der Geraden g und h.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5\\7\\3\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

7 **Finden Sie den Fehler!**

Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie die richtige Lösung.

Annika, Ben und Carla berechnen die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Annika:

$\cos(\alpha) = \frac{16 + 2 + 4}{3 + 9} = \frac{22}{12}$

Rechner bringt Fehlermeldung.

Ben:

$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{3 \cdot 9} = \frac{\sqrt{256 + 4 + 16}}{27} \approx 0{,}62$

$\alpha \approx 52{,}0°$

Carla:

$\cos(\alpha) = \frac{16 + 2 + 4}{3 \cdot 9} = \frac{22}{27}$

$\alpha \approx 0{,}62°$

8 Gegeben ist das Dreieck ABC durch die Schnittpunkte A, B und C der Geraden g, h und k mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Überprüfen Sie an diesem Beispiel den Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck.

9 Gegeben sind die Punkte $A(2|-2|-2)$, $B(-2|5{,}5|-2)$, $C(-6|2|4)$ und $D(1|-2|1)$.

a) Zeichnen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem. Verbinden Sie dann der Reihe nach die Punkte A, B, C, D und A.

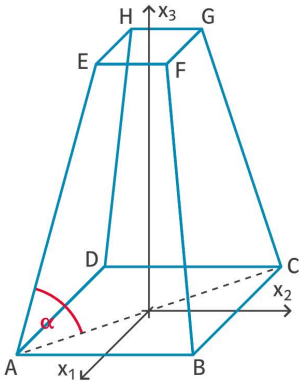
b) Berechnen Sie die Größen der Winkel $\sphericalangle$ BAD, $\sphericalangle$ CBA, $\sphericalangle$ DCB und $\sphericalangle$ ADC sowie die Winkelsumme des Vierecks ABCD. Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt, und erklären Sie.

10 Eine Laterne hat die Form eines Pyramidenstumpfs mit einer quadratischen Grundfläche. Es sind die Punkte $A(5|-5|0)$, $B(5|5|0)$, $E(2|-2|15)$ und $G(-2|2|15)$ gegeben (Koordinaten in cm).

a) Schätzen Sie die Größe des Neigungswinkels α der Kanten der Laterne. Berechnen Sie diesen anschließend.

b) Schätzen Sie die Größe der Innenwinkel einer Seitenfläche. Berechnen Sie.

c) Berechnen Sie die Länge der Kanten und die Höhe der Laterne.



11 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

b) Bestimmen Sie jeweils mithilfe einer Skizze die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $-\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{a}$ und $-\vec{b}$ sowie $-\vec{a}$ und $-\vec{b}$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse rechnerisch.

12 Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die beiden Werte für a, sodass sich die Geraden unter dem Winkel 30° schneiden.

13 Bestimmen Sie Gleichungen der beiden Geraden, die in der x_2x_3-Ebene liegen und die x_2-Achse im Punkt $P(0|2|0)$ unter einem Winkel von 60° schneiden.

14 Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels der beiden Geraden g und h mit den Gleichungen $g(x) = 2x - 1$ und $h(x) = -3x + 5$.

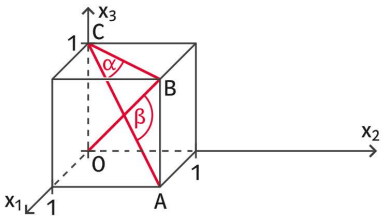
Test 2

Lösungen, Seite 473

15 Gegeben ist der abgebildete Würfel.

a) Bestimmen Sie die Größe des Winkels α zwischen der Flächendiagonale $\overline{CB}$ und der Raumdiagonale $\overline{CA}$.

b) Schätzen Sie die Größe des Winkels β zwischen den Raumdiagonalen $\overline{CA}$ und $\overline{OB}$. Berechnen Sie anschließend.

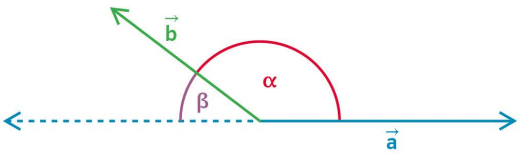


16 Ein Parallelogramm wird durch die vier Geraden g, h, k und i gebildet. Weisen Sie nach, dass die gegenüberliegenden Winkel in diesem Parallelogramm gleich groß sind.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$, $k: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}$, $i: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}$

17 Die Grab-Pyramide im Park Branitz hat eine Höhe von ca. 13 Metern und eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von ca. 36 Metern.
Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, schätzen Sie die Größe des Neigungswinkels einer Kante zur Diagonale am Boden. Berechnen Sie anschließend.

18 Weisen Sie nach, dass die für $0° \le \alpha < 90°$ hergeleitete Formel $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ auch für Winkel im Bereich $90° \le \alpha < 180°$ gilt.



19 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Wenn zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrecht zueinander sind, gilt $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = 0$.

b) Das Skalarprodukt zweier kollinearer Vektoren ist gleich dem Produkt ihrer Längen.

c) Für zwei parallele Geraden g und h mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt $\vec{u} \circ \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

d) Wenn das Skalarprodukt der Richtungsvektoren zweier Geraden 0 ist, dann verlaufen die beiden Geraden senkrecht zueinander.

20 a) Philipp behauptet, dass man bei der Formel für die Berechnung der Größe des Schnittwinkels zweier Geraden die Betragsstriche im Zähler weglassen kann, wenn man nur das Ergebnis richtig deutet. Nehmen Sie dazu Stellung.

b) Albrecht bezweifelt, dass man bei der Berechnung der Größe des Schnittwinkels zweier Geraden einen eindeutigen Wert erhält: „Schließlich gibt es ja zu jeder Geraden unendlich viele Richtungsvektoren." Beurteilen Sie diese Aussage.

Grundwissen Test

Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren lösen

Grundwissen, Seite 417
Lösungen, Seite 474

G **21** Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren und führen Sie eine Probe durch.

a)
I $5a + 3b = 14$
II $8a + 6b = 32$

b)
I $4x = 18 - 6y$
II $4x + 3y = 15$

Wiederholung: Geraden und Lagebeziehungen

→ Lösungen, Seite 474

1 Geben Sie zwei verschiedene Parameterformen für die Gerade an, die durch die Punkte $A(2|1|2)$ und $B(-3|6|-7)$ verläuft.

2 Gegeben sind die Punkte $A(3|4|1)$, $B(6|11|-7)$, $C(6|15|-2)$ und $D(3|8|6)$. Prüfen Sie, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

3 Untersuchen Sie die Lage der Geraden g und h zueinander. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts. Zeichnen Sie anschließend die beiden Geraden in ein Koordinatensystem.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\6\\10\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}$

4 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Geben Sie eine Gleichung einer Geraden h an, die

a) identisch zu g ist,

b) parallel zu g ist,

c) g schneidet,

d) windschief zu g ist.

Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt

5 Bestimmen Sie, welche dieser Vektoren zueinander orthogonal sind.

$\vec{a} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $\vec{d} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$; $\vec{e} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

6 Gegeben sind die Punkte $A(0|-3|2)$, $B(2|0|8)$ und $D(6|-1|-1)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD gleichschenklig und rechtwinklig ist.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABD.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

7 Das Viereck ABCD ist eine Raute. Prüfen Sie, ob diese sogar ein Quadrat ist.

a) $A(2|10|-5)$, $B(12|2|1)$, $C(2|-6|7)$, $D(-8|2|1)$

b) $A(2|6|5)$, $B(-2|6|4)$, $C(-4|4|1)$, $D(0|4|2)$

c) $A(2|1|8{,}5)$, $B(0|3{,}5|7)$, $C(-2|1|5{,}5)$, $D(0|-1{,}5|7)$

8 **a)** Geben Sie drei Vektoren im Raum an, die paarweise zueinander orthogonal sind, wobei alle Koordinaten ungleich null sein sollen.

b) Bestimmen Sie zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$ zwei Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ so, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise orthogonal zueinander sind.

c) Begründen Sie, dass man keinen der drei Vektoren aus Teilaufgabe a) bzw. b) als Linearkombination der beiden anderen darstellen kann.

9 Geben Sie eine Parameterform einer Geraden h an, die die Gerade g orthogonal schneidet.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\9\\4\end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\8\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-3\\5\\-2\end{pmatrix}$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}12\\-5\\7\end{pmatrix}$

D16 Check-out

Winkel und Schnittwinkel

Lösungen, Seite 476

10 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

b) Bestimmen Sie jeweils mithilfe einer geeigneten Skizze und des Ergebnisses aus Teilaufgabe a) die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $-\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{a}$ und $-\vec{b}$ sowie $-\vec{a}$ und $-\vec{b}$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse rechnerisch.

11 Für $a \in \mathbb{R}$ sind Geraden durch $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ und $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den Geraden g_0 und h_0.

b) Bestimmen Sie, für welchen Wert von a die Geraden g_a und h_a zueinander orthogonal sind.

c) Entscheiden Sie begründet, ob es einen Wert von a geben kann, sodass die Geraden g_a und h_a zueinander parallel sind.

12 Zeichnen Sie die Geraden g und h in ein Koordinatensystem und untersuchen Sie, wie die beiden Geraden zueinander liegen. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts. Schätzen und berechnen Sie gegebenenfalls auch die Größe des Schnittwinkels.

D1 **MMS-Anleitung** 3D-Darstellung einer Geraden

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -13 \end{pmatrix}$

13 Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen den Winkel α ein. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 90°$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$, $\alpha = 45°$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$, $\alpha = 60°$

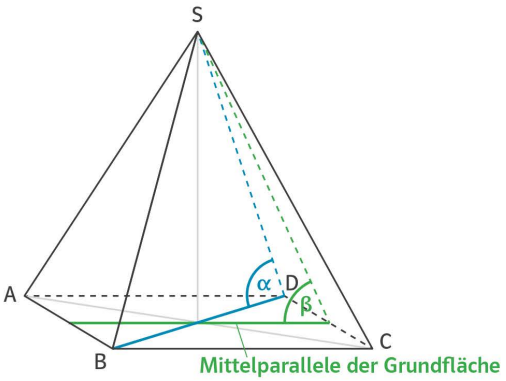
14 Die Schnittpunkte der vier Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 bilden ein Viereck. Weisen Sie an diesem Beispiel nach, dass die Summe der Innenwinkel in diesem Viereck 360° ist.

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

15 Gegeben ist die quadratische Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S mit A(0|0|0), B(8|0|0), C(8|8|0), D(0|8|0) und S(4|4|14).

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels α, den die Kante einer Seitenfläche mit der zugehörigen Diagonale der Grundfläche bildet.

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels β, den die Mittelparallele der Grundfläche mit der zugehörigen Höhe der Seitenfläche bildet.



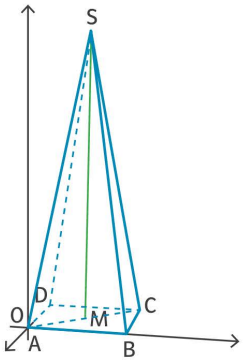
16 Ein Quader hat als Grundfläche ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen 8 cm und 5 cm. Die Höhe des Quaders beträgt 3 cm. Der Schnittpunkt der Raumdiagonale wird mit M bezeichnet. Berechnen Sie die Größe der Winkel ∢AMB und ∢BMC.

17 Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 3 LE. Berechnen Sie $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}$.

Weiterführende Aufgaben

→ Lösungen, Seite 478

18 Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(0|7|0)$, $C(-7|7|0)$ und $D(-7|0|0)$ und der Spitze $S(-3{,}5|3{,}5|19{,}85)$.
Eine Einheit entspricht 1 cm.



a) Geben Sie die Parameterformen der Geraden f durch A und S, h durch C und S und k durch A und B an.

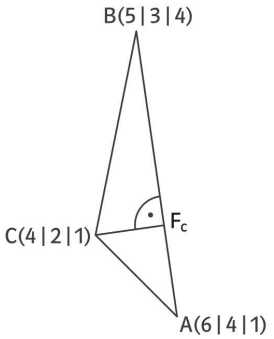
b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden h und k zueinander.

c) Berechnen Sie die Größe der Innenwinkel der Dreiecke AMS und ABS.

d) Eine Packung Frischkäse hat die Form eines Pyramidenstumpfes mit der Grundfläche ABCD. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte der oberen Fläche, wenn die Höhe der Käsepackung $\frac{17}{3}$ cm beträgt.

e) Berechnen Sie das Volumen der Frischkäsepackung aus Teilaufgabe d).

19 Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(6|4|1)$, $B(5|3|4)$ und $C(4|2|1)$.



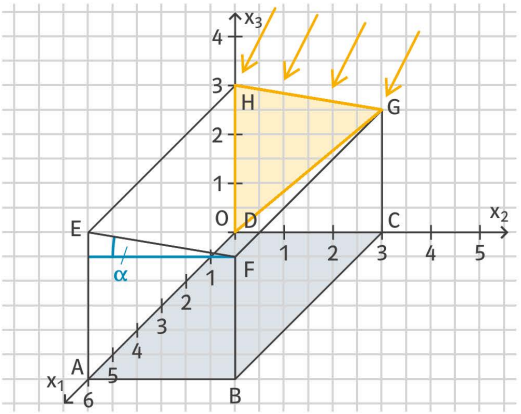
a) Begründen Sie, dass man den Fußpunkt F_c der Höhe auf c über die Bedingung $\overrightarrow{AF_c} = r \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $\left(\overrightarrow{CA} + r \cdot \overrightarrow{AB}\right) \circ \overrightarrow{AB} = 0$ bestimmen kann.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Fußpunkte F_c und F_a der Höhen auf c und auf a.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der drei Höhen des Dreiecks.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

20 Die Terrasse ABCD liegt in der x_1x_2-Ebene. Sie wird überdacht von dem Dach EFGH mit $E(6|0|3)$, $F(6|3|2{,}5)$, $G(0|3|2{,}5)$ und $H(0|0|3)$ (Angaben in m).



a) Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels α des Daches.

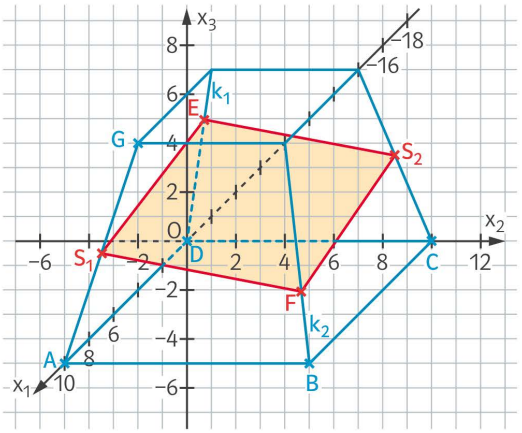
b) An dem Dach kann eine elektrische Markise ausgefahren werden. Diese fährt innerhalb von 50 Sekunden von der Kante $\overline{EH}$ zur Kante $\overline{FG}$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der die Markise fährt.

c) In den Punkten D, G und H kann zum Schutz ein Sonnensegel befestigt werden.
(1) Prüfen Sie, ob das Sonnensegel gleichschenklig oder rechtwinklig ist.
(2) Berechnen Sie, wie viele Quadratmeter Stoff für das Sonnensegel benötigt werden.

d) Ein anderes Sonnensegel kann anstelle von G auch in einem Punkt P_s auf der Kante $\overline{CG}$ befestigt werden.
(1) Geben Sie eine Parameterform der Geraden an, welche die Kante $\overline{CG}$ enthält.
(2) Es gibt Punkte P_s, für die der von den Strecken $\overline{P_sH}$ und $\overline{P_sD}$ eingeschlossene Winkel größer als 50° ist. Ermitteln Sie den Definitionsbereich für s.

Lösungen, Seite 480

21 Eine Firma plant eine neue Verpackungsform für Schokoladenbonbons. Bisher wurde das Produkt in einer Verpackung der Form eines regelmäßigen Pyramidenstumpfs verkauft. Die Punkte A(10|0|0), B(10|10|0), C(0|10|0), D(0|0|0) und G(8|2|8) beschreiben einige Eckpunkte (1LE ≙ 1cm). Im Jubiläumsjahr der Firma soll die Form leicht variiert werden. Die neue Deckfläche der Schachtel wird durch die Punkte E, S_1 und S_2 festgelegt.
Die Punkte $S_1(9|1|4)$ und $S_2(1|9|4)$ sollen dabei fest sein und $E_h(h|h|4h)$ mit $h \in \mathbb{R}$ wird entlang der hinteren Kante k_1 variiert.



a) Weisen Sie nach, dass sich die Geraden, in denen die Kanten k_1 und k_2 liegen, schneiden, und bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels.

b) Geben Sie den Definitionsbereich für h so an, dass die Punkte E_h auf der hinteren Kante k_1 des Pyramidenstumpfs liegen.

c) Untersuchen Sie, welche Form die Deckfläche für $h = 1$ hat.

d) Überprüfen Sie, ob die Deckfläche stets eine Raute ist.

e) Die Kante $\overline{DE_h}$ soll orthogonal auf die Kante $\overline{E_h S_2}$ treffen. Ermitteln Sie den Wert für h, für den dies erreicht wird.

f) Um für die neue Form der Verpackung den Pyramidenstumpf beizubehalten, soll der Punkt $F_h\left(\frac{7h-25}{h-3}\middle|\frac{7h-25}{h-3}\middle|\frac{12h-20}{h-3}\right)$ auf der Kante k_2 liegen. Ermitteln Sie die Werte für h, für die diese Bedingung erfüllt ist. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

22 Die Punkte A(0|0|0), B(−12|9|0) und C(0|−12|16) bilden ein Dreieck. Fig. 1 zeigt das Dreieck ABC mit der Winkelhalbierenden w_α zum Winkel α.

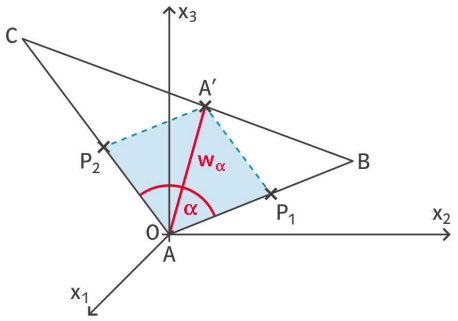


Fig. 1

a) Stellen Sie Parameterformen $g_{\overline{AB}}$, $g_{\overline{BC}}$ und $g_{\overline{AC}}$ für die Geraden auf, in denen die Dreiecksseiten liegen.

b) Der Punkt P_1 liegt auf der Strecke $\overline{AB}$, der Punkt P_2 auf der Strecke $\overline{AC}$, sodass das Viereck $AP_1A'P_2$ ein Parallelogramm ist. Zeigen Sie, dass es auch eine Raute ist.

c) Zur Bestimmung des Richtungsvektors der Winkelhalbierenden w_α kann ein Vielfaches des Vektors $\overrightarrow{AA'}$ verwendet werden, sodass die Raute $AP_1A'P_2$ verkleinert werden kann (Fig. 2). Hilfreich ist die Nutzung von Einheitsvektoren. Dies sind Vektoren mit einer Länge 1. Bestimmen Sie die Einheitsvektoren $\overrightarrow{u_0}$ und $\overrightarrow{v_0}$ zu den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Geraden $g_{\overline{AB}}$ bzw. $g_{\overline{AC}}$.

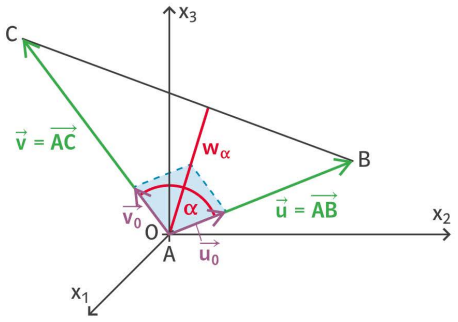


Fig. 2

d) Der Winkel zwischen den Geraden $g_{\overline{AB}}: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}$ und $g_{\overline{AC}}: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$ wird durch die Winkelhalbierende $w_\alpha: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{v_0})$ halbiert (Fig. 2). Stellen Sie die Parameterformen für die Geraden auf, die durch die Winkelhalbierenden w_α, w_β und w_γ verlaufen.

e) Kontrollieren Sie durch eine Rechnung, dass die Winkel zwischen den Winkelhalbierenden und den jeweiligen Geraden entlang der Dreiecksseiten wirklich halb so groß sind wie α, β bzw. γ.

f) Berechnen Sie jeweils die Länge der drei Winkelhalbierenden.

Vektoren

Zu zwei Punkten $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ wird der Vektor $\overrightarrow{AB}$ so berechnet: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

Den Abstand d zwischen den Punkten A und B erhält man mithilfe des Betrags des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

Es gilt $d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

Parameterform einer Geraden

Gegeben sind die Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$. Die Gerade durch die Punkte A und B wird beschrieben durch eine Parameterform

$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$.

Der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ heißt Stützvektor, der Vektor $\overrightarrow{AB}$ heißt Richtungsvektor der Geraden g, die reelle Zahl r nennt man Parameter.

Lage von Geraden zueinander

Gegeben sind die beiden Geraden g und h im Raum mit
$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$

Wenn die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear, also Vielfache voneinander sind, dann sind die Geraden g und h entweder identisch oder parallel.
Sie sind **identisch**, wenn zusätzlich der Punkt P von g auch auf h liegt.
Sie sind **parallel**, wenn zusätzlich der Punkt P von g nicht auf h liegt.

Wenn die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht kollinear sind, dann schneiden sich die Geraden g und h in einem Punkt oder die Geraden g und h sind zueinander windschief.
Die Geraden **schneiden sich** in einem Punkt, wenn die Gleichung $\vec{p} + r \cdot \vec{u} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$ eine Lösung besitzt.
Die Geraden sind **zueinander windschief**, wenn die Gleichung $\vec{p} + r \cdot \vec{u} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$ keine Lösung besitzt.

Skalarprodukt und orthogonale Vektoren

Zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $(\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o})$ heißt der Term $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ Skalarprodukt der beiden Vektoren.

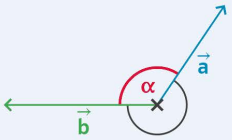
Es gilt $\vec{a} \perp \vec{b}$ genau dann, wenn das Skalarprodukt 0 ist, d.h. $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ gilt.

Zwei Geraden sind zueinander orthogonal, wenn ihre Richtungsvektoren zueinander orthogonal sind.

Winkel zwischen zwei Vektoren

Für den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $(\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o})$ gilt

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $0° \leq \alpha \leq 180°$.



Für den Schnittwinkel α zweier Geraden g und h mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$, $0° \leq \alpha \leq 90°$.

$A(-1|1|1)$, $B(3|6|4)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 6 - 1 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$

$g: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der Punkt $R(7|11|7)$ liegt auf g, denn für $s = 2$ erhält man:

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von g und h sind keine Vielfachen voneinander, d.h. g und h sind nicht zueinander parallel oder identisch.

Die Gleichung $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

hat die Lösung $r = -1$ und $t = 1$.

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Geraden schneiden sich im Punkt $S(5|-5|1)$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \circ \vec{b} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 0$, *also* $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$:

$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{9 + 4 + 1} \cdot \sqrt{9 + 1 + 4}}$

$= \frac{9}{14}$, *also* $\alpha \approx 50°$

D17 Lösungen
Probeklausur
Kapitel V

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 1

30 min

1 Untersuchen Sie, wie die Geraden g und h zueinander liegen. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts.

a) $g: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -18 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

2 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ s \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} s \\ -5 \\ t \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die fehlende Koordinate s so, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt.

b) Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten s und t so, dass $\vec{c}$ zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ orthogonal ist.

3 Erläutern Sie die besondere Lage der Geraden g im Koordinatensystem.

a) $g: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $g: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $g: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4 Weisen Sie allgemein nach:
Ist α der Schnittwinkel zwischen den Geraden g und h mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, dann erhält man mit der Formel für den Schnittwinkel zweier Geraden denselben Schnittwinkel α, wenn man für die Darstellung von h ein Vielfaches von $\vec{v}$ verwendet.

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 2

30 min

1 Gegeben sind die Punkte $A(3|4|-3)$ und $B(5|1|3)$ sowie die Gerade g durch A und B.

a) Berechnen Sie den Abstand der Punkte A und B.

b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.

c) Geben Sie eine Parameterform für die Gerade g an, die durch die Punkte A und B geht.

d) Prüfen Sie, ob der Punkt $P(-1|10|8)$ auf der Geraden g liegt.

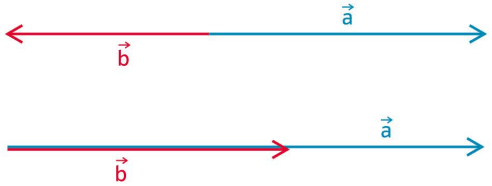
2 Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Weisen Sie nach, dass die Geraden g und h sich schneiden. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts an.

b) Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels der beiden Geraden.

3 **a)** Weisen Sie allgemein nach:
Wenn zwei kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in entgegengesetzte Richtungen zeigen, gilt $\vec{a} \circ \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

b) Leiten Sie für zwei kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die in dieselbe Richtung zeigen, eine Beziehung zwischen ihrem Skalarprodukt und ihren Beträgen her.



4 Geben Sie an, ob der Term einen Vektor oder eine Zahl beschreibt oder ob der Term nicht definiert ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ **b)** $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{a}$ **c)** $(\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{a}$ **d)** $(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} + \vec{b})$

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 1

80 min

D17 Lösungen Probeklausur Kapitel V

1 Gegeben sind die Punkte $A(3|-3|0)$, $B(3|3|0)$, $C(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$.

a) Das Viereck ABCD ist ein Quadrat. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D.

b) Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B, die Gerade h durch die Punkte S und C. Untersuchen Sie die Lage der Geraden g zur Geraden h.

c) Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte und S ist die Spitze einer quadratischen Pyramide. Zeichnen Sie diese Pyramide in ein Koordinatensystem und berechnen Sie ihr Volumen.

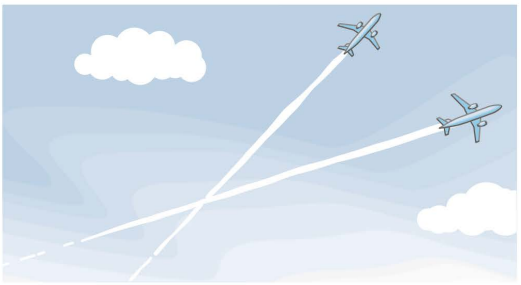
d) Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle ASB$.

e) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AS}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABM.

f) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, der auf der Geraden durch die Punkte B und S liegt, sodass die Vektoren $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{BS}$ zueinander orthogonal sind.

g) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide.

2 Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 befinden sich zu Beobachtungsbeginn im Punkt $A(8|5|3)$ bzw. $P(-2{,}5|6{,}5|2)$ (in Bezug auf den Flugtower, der sich im Ursprung eines geeigneten Koordinatensystems befindet; Angaben in km). Die Geschwindigkeit von F_1 wird in den ersten vier Minuten durch den Vektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ beschrieben (Angaben in km pro Minute).



F_2 befindet sich nach einer Minute im Punkt $Q(4{,}5|5{,}5|4)$. Beide Flugzeuge fliegen geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit.

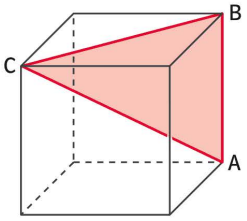
a) Geben Sie jeweils eine Bewegungsgleichung für die Flugbahnen der beiden Flugzeuge an. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von F_1 in km pro Stunde.

b) Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen der Flugzeuge schneiden, und berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels, unter dem sich die Flugbahnen schneiden. Begründen Sie, dass die Flugzeuge nicht kollidieren.

c) F_1 bewegt sich von Süden nach Norden. Bestimmen Sie einen möglichen Geschwindigkeitsvektor eines Flugzeugs F_3, das geradlinig in west-östlicher Richtung fliegt, wenn die Reisegeschwindigkeit des Flugzeugs zwischen $700\,\frac{km}{h}$ und $900\,\frac{km}{h}$ liegt.

d) Die Flugbahn eines Flugzeugs F_4 verläuft so, dass es sowohl die Flugbahn von F_1 als auch die Flugbahn von F_2 senkrecht schneidet. Bestimmen Sie einen möglichen Geschwindigkeitsvektor des Flugzeugs F_4.

3 Dem abgebildeten Würfel mit der Kantenlänge a ist ein Dreieck ABC einbeschrieben.



a) Legen Sie ein Koordinatensystem fest und geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C an.

b) Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABC.

c) Berechnen Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC.

d) Vergleichen Sie den Inhalt der Dreiecksfläche mit dem Inhalt einer Seitenfläche des Würfels. Geben Sie den Anteil in Prozent an.

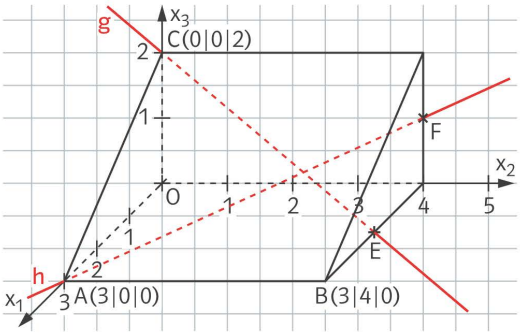
e) Die Raumdiagonalen im Würfel schneiden sich. Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels.

D17 Lösungen
Probeklausur
Kapitel V

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 2

90 min

1 In der Abbildung ist das Dach eines Carports dargestellt. Die Punkte E und F sind die Kantenmitten. Von C zu E und von A zu F wird je eine Lichterkette gespannt (Angaben in m).



a) Bestimmen Sie die Länge der beiden Lichterketten.

b) Stellen Sie jeweils die Parameterformen der Geraden g und h auf, auf denen sich die Lichterketten befinden.

c) Weisen Sie nach, dass die Geraden g und h sich schneiden. Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen g und h.

d) Berechnen Sie die Größe der Innenwinkel des Dreiecks AOC.

2 Gegeben sind die Punkte A(3|4|5), B(5|6|6) und C(8|6|6).

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass die Punkte A, B, C und D Eckpunkte einer Raute sind. Zeichnen Sie die Raute ABCD in ein Koordinatensystem und berechnen Sie die Größe ihrer Innenwinkel.

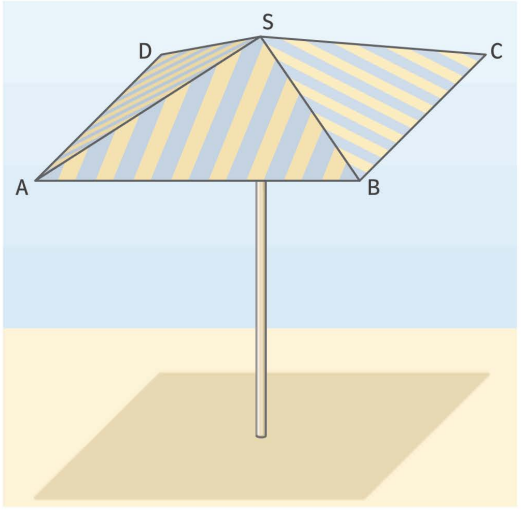
c) Ermitteln Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts M der Raute ABCD. Weisen Sie mithilfe von Vektoren nach, dass sich die Diagonalen der Raute ABCD orthogonal schneiden.

d) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{v}$, der sowohl auf dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ als auch auf dem Vektor $\overrightarrow{AC}$ senkrecht steht.

e) Die Gerade g durch den Diagonalenschnittpunkt M und mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Raute ABCD. Die Raute ist die Grundfläche zweier Pyramiden, deren Spitzen auf der Geraden g liegen. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitzen S_1 und S_2 so, dass die zugehörigen Pyramiden jeweils die Höhe 5 LE haben.

f) Bestimmen Sie das Volumen der Doppelpyramide S_1ABCDS_2.

3 Das Dach des Sonnenschirms bildet eine Pyramide mit einer 4 m² großen quadratischen Grundfläche. Der Ständer des Sonnenschirms ragt 2,50 m aus dem Boden heraus. Die unteren Kanten des Schirms befinden sich 2 m über dem Boden.



a) Legen Sie ein Koordinatensystem fest. Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte A, B, C, D und S an.

b) Stellen Sie eine Parameterform der Geraden g auf, die die Grundkante durch $\overline{AB}$ enthält, sowie eine Parameterform der Geraden s, die die Seitenkante $\overline{AS}$ enthält.

c) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen g und s.

d) Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels α zwischen der Diagonalen der Grundfläche und den Seitenkanten.

e) Am Schirmständer sollen in einer Höhe von 1,5 m zwei Abspannseile zum Boden angebracht werden, sodass diese senkrecht zu der Grundkante $\overline{BC}$ verlaufen und der Winkel zwischen dem Abspannseil und dem Ständer jeweils 60° beträgt. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte F_1 und F_2, an denen die Abspannseile jeweils am Boden befestigt werden müssen.

Das Vektorprodukt

Das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt ist eine Rechenoperation zweier Vektoren. Ihr Ergebnis ist ein Vektor, der zu den beiden Ausgangsvektoren orthogonal ist.

1 Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Berkay hat rechts das Vektorprodukt zweier Vektoren berechnet. Verallgemeinern Sie die Berechnung von $\vec{a} \times \vec{b}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Berkays Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

b) Untersuchen Sie, wie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ zueinander liegen.

Vektorprodukt zur Bestimmung orthogonaler Vektoren

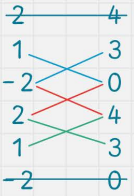
Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

heißt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ das

Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das Vektorprodukt kann nach dem nebenstehenden Schema leicht berechnet werden.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - (-2) \cdot 3 \\ (-2) \cdot 4 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$1 \cdot 0 - (-2) \cdot 3$
$(-2) \cdot 4 - 2 \cdot 0$
$2 \cdot 3 - 1 \cdot 4$

2 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ und $\vec{c} \times \vec{a}$. Kontrollieren Sie mit einem MMS.

b) Bestimmen Sie alle Vektoren, die zu beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind
(1) mithilfe des Skalarprodukts, (2) mithilfe des Vektorprodukts.

c) Vergleichen Sie die beiden Vorgehensweisen aus Teilaufgabe b) miteinander.

d) Weisen Sie allgemein nach, dass $\vec{a} \times \vec{b}$ orthogonal zu $\vec{a}$ ist.

Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt und Vektorprodukt

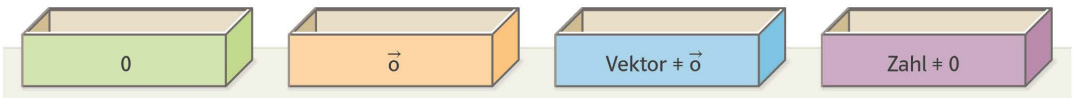
3 **a)** Gegeben sind die von $\vec{o}$ verschiedenen Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Erläutern Sie, inwiefern das Skalarprodukt bzw. das Vektorprodukt im Zusammenhang mit der Orthogonalität von Vektoren genutzt werden kann.

b) Gegeben sind die von $\vec{o}$ verschiedenen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{c} = r \cdot \vec{a}$ ($r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$). Ordnen Sie die folgenden Ausdrücke passenden Kisten zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

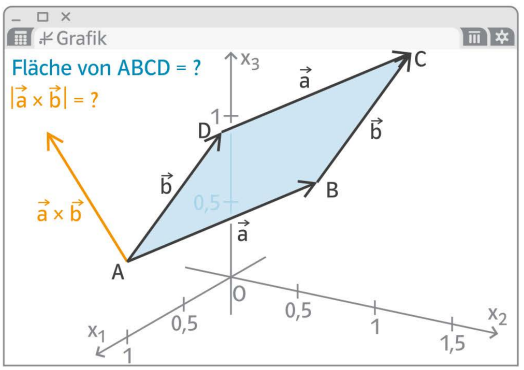
1 $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$ 2 $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$ 3 $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$ 4 $\vec{a} \times \vec{c}$ 5 $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$

6 $(\vec{a} - \vec{c}) \times \vec{b}$ 7 $\vec{a} \circ \vec{c} - \vec{a} \circ \vec{b}$ 8 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \circ \vec{c})$



Geometrische Anwendungen des Vektorprodukts

4 Amel hat den Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD mit den Seitenlängen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ mit ihrem MMS berechnen lassen.
Außerdem hat sie die Länge des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ bestimmen lassen.
Erforschen Sie mithilfe der interaktiven Anwendung den Zusammenhang zwischen der Länge des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ und dem Flächeninhalt des Parallelogramms, indem Sie verschiedene Parallelogramme ABCD untersuchen.
Formulieren Sie Ihre Erkenntnisse.



I8 **interaktive Anwendung** Geometrische Anwendung des Vektorprodukts

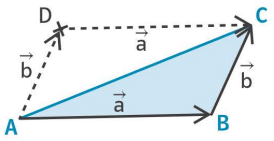
5 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Für den Flächeninhalt eines Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, gilt $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

6 Begründen Sie, dass für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC gilt
$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|$.



7 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

a) A(4|7|5), B(0|5|9), C(8|7|3)

b) A(−1|0|5), B(2|2|2), C(2|2|0)

8 a) Weisen Sie nach, dass $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$ gilt, indem Sie den untenstehenden Aufschrieb ergänzen und die auf den Kärtchen stehenden Erläuterungen zuordnen.

$|\vec{a} \times \vec{b}|^2$
$= (\vec{a} \times \vec{b})^2$
$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + \ldots$
$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$
$= \ldots \cdot \ldots - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$
$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\cos(\alpha))^2$
$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\ldots)$
$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\sin(\alpha))^2$

A $\sin(\alpha) \geq 0$, da $0° \leq \alpha \leq 180°$

B $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

C Ausklammern

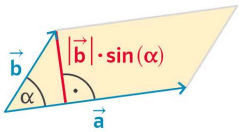
D Umformen

E $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$

F Definition

G $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$

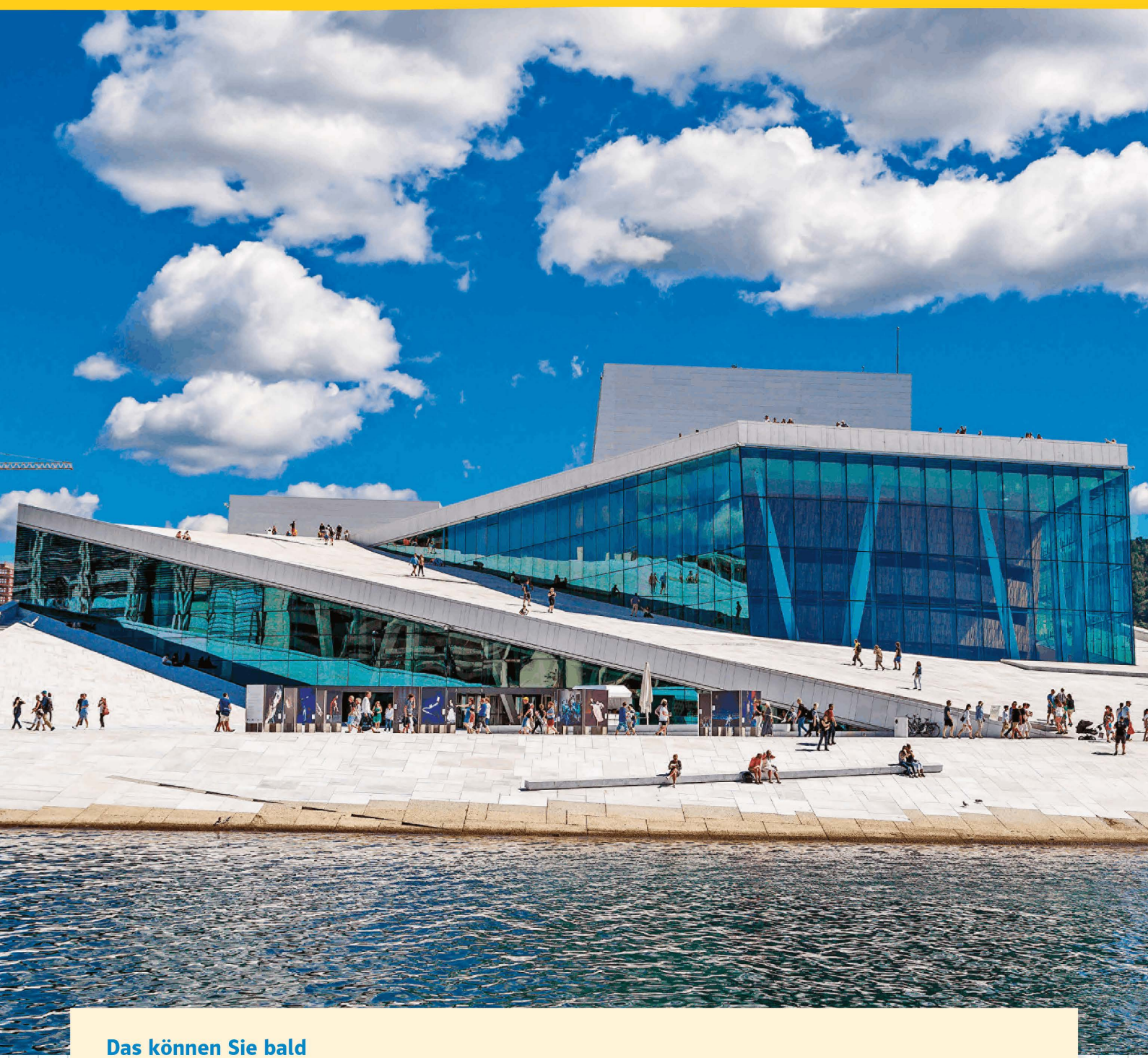
b) Begründen Sie mithilfe der Gleichung $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$, dass der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, mit $|\vec{a} \times \vec{b}|$ berechnet werden kann (s. Figur auf dem Rand).



9 MK a) Recherchieren Sie, was ein Spat ist und wie das Volumen eines Spats mithilfe des Vektorprodukts bestimmt werden kann.

b) Recherchieren Sie, wie das Vektorprodukt zur Berechnung des Volumens einer Pyramide genutzt werden kann.

VI Ebenen



Das können Sie bald

- mit dem Gauß-Verfahren lineare Gleichungssysteme lösen
- Ebenen mit Koordinaten und Vektoren in verschiedenen Darstellungsformen beschreiben
- die Schnitte von Geraden und Ebenen untersuchen
- die Schnittwinkel zwischen Geraden und Ebenen bestimmen
- geometrische Objekte im Raum auf spezielle Eigenschaften untersuchen

Check-in

Schätzen Sie sich ein:

	☺	😐	☹
1. Ich kann Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten lösen und die Lösungsmenge angeben.	☐	☐	☐
2. Ich kann eine Geradengleichung in Parameterform bestimmen.	☐	☐	☐
3. Ich kann das Skalarprodukt von zwei Vektoren bestimmen.	☐	☐	☐
4. Ich kann den Schnittpunkt zweier Geraden berechnen.	☐	☐	☐
5. Ich kann den Schnittwinkel zwischen zwei Geraden berechnen.	☐	☐	☐

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen,** Seite 417
zu 2. **Merkkasten,** Seite 181
zu 3. **Merkkasten,** Seite 186
zu 4. **Beispiel 2a),** Seite 182
zu 5. **Lehrtext,** Seite 192

Test

Lösungen, Seite 481

1 **Lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten lösen**

Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems und geben Sie die Lösungsmenge an. Führen Sie eine Probe durch.

a) $\begin{aligned} y &= 8x - 10 \\ y &= 6x - 6 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 2x &= 8y - 3 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 4x - 8y &= -8 \\ 6x + 8y &= 28 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} 6x - 8y &= 5 \\ -18x + 24y &= -17 \end{aligned}$

2 **Gleichung einer Geraden in Parameterform bestimmen**

Geben Sie zwei verschiedene Parametergleichungen der Geraden g an, die durch die Punkte A und B verläuft.

a) $A(7|-3|-5)$ und $B(2|0|3)$ **b)** $A(0|0|0)$ und $B(-6|13|25)$

3 **Skalarprodukt bestimmen**

a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander liegen.

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

4 **Schnittpunkt zweier Geraden berechnen**

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass sich die Geraden g und h schneiden, und bestimmen Sie den Schnittpunkt.

5 **Schnittwinkel zwischen zwei Geraden berechnen**

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt $S(-4|-4|2)$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, der von den Geraden g und h eingeschlossen wird.

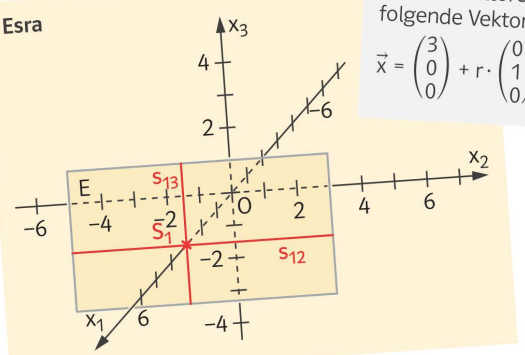
b) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h jeweils einen Schnittpunkt mit einer Koordinatenachse haben, und bestimmen Sie jeweils die Größe des Winkels zwischen der Geraden und der Koordinatenachse.

Punktmengen im Raum

Lerneinheit 3
Seite 219

Esra, Samir, James und Anna haben auf unterschiedliche Arten ein und dieselbe Punktmenge im Raum beschrieben:

Esra



Samir

Die Ortsvektoren aller Punkte erfüllen folgende Vektorgleichung:

$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

James

Alle Punkte liegen in einer Ebene, die parallel zur x_2x_3-Ebene ist, und zwar um drei Einheiten in positive x_1-Richtung verschoben.

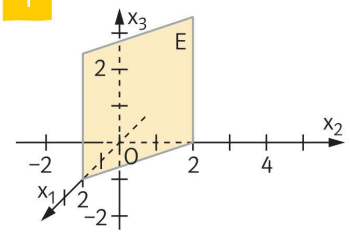
Anna

Die Ortsvektoren aller Punkte erfüllen folgende Vektorgleichung:

$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$; $t, u \in \mathbb{R}$.

Unten haben die Freunde 12 weitere Punktmengen beschrieben. Teilweise handelt es sich um verschiedene Mengen, manchmal aber auch um dieselbe Menge. Finden Sie zueinander passende Beschreibungen und ergänzen Sie weitere, wie im obigen Beispiel.

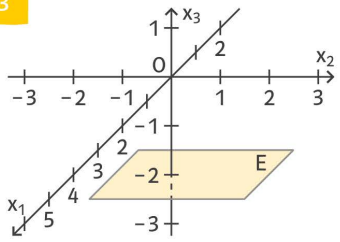
1



2

Alle Punkte liegen in einer Ebene, die parallel zur x_2-Achse ist. Die Ebene enthält die Gerade, die durch die Punkte P(2|0|0) und Q(0|0|2) geht.

3



4

Die Ortsvektoren aller Punkte erfüllen folgende Vektorgleichung:

$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$;

$r, s \in \mathbb{R}$.

5

Die Punkte liegen auf einer Geraden mit der Vektorgleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

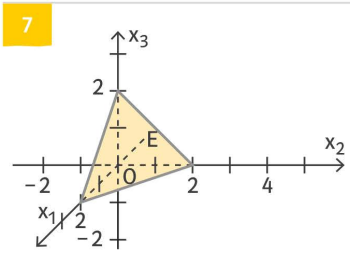
6

Die Ortsvektoren aller Punkte erfüllen folgende Vektorgleichung:

$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$;

$r, s \in \mathbb{R}$.

7



8

Die Ortsvektoren aller Punkte erfüllen folgende Vektorgleichung:

$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

$r, s \in \mathbb{R}$.

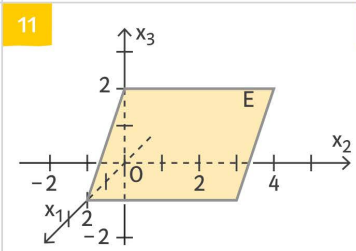
9

Alle Punkte liegen in einer Ebene, die parallel zur x_1x_2-Ebene ist, allerdings um 2 Einheiten in negative x_3-Richtung verschoben.

10

Alle Punkte liegen in einer Ebene, die parallel zur x_3-Achse ist. Die Ebene enthält die Gerade, die durch die Punkte P(2|0|0) und Q(0|2|0) geht.

11



12

Die Ortsvektoren aller Punkte erfüllen folgende Vektorgleichung:

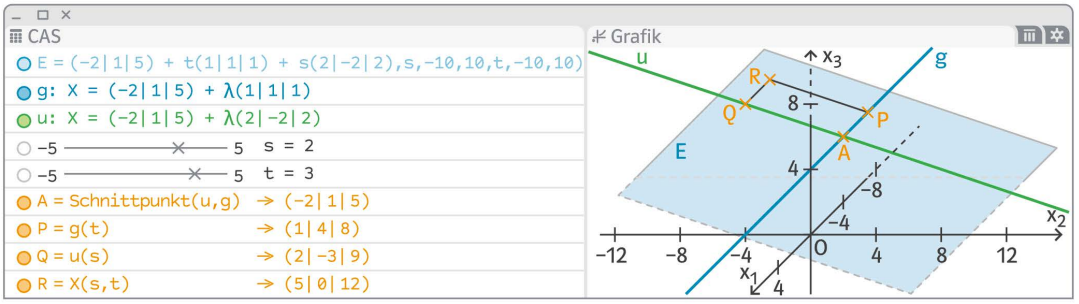
$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

$r, s \in \mathbb{R}$.

Ebenen in Parameterform erkunden

Ebenen bestehen aus Punkten, deren Ortsvektoren als Parametergleichung in der Form $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ beschrieben werden. Mithilfe einer digitalen Geometriesoftware können Ebenen visuell dargestellt werden.

In der vorgegebenen Datei ist die Ebene E mit $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dargestellt.



I9 **interaktive Anwendung** Ebenen in Parameterform erkunden

Aufträge

→ Lerneinheit 3 Seite 219

1. Erkunden Sie, welche Bedeutung die einzelnen Vektoren und die einzelnen Parameter bei der Ebene E mit $E: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ haben. Beschreiben Sie Ihre Erkenntnisse.
2. Stellen Sie drei weitere Ebenen dar. Erläutern Sie die Bedeutung der Vektoren und Parameter.
3. Stellen Sie jeweils die Parameterform für eine Ebene auf, die folgende Eigenschaft erfüllt:
   (1) Die Ebene verläuft parallel zu der oben abgebildeten Ebene.
   (2) Die Ebene verläuft parallel zur x_1x_2-Ebene.
   (3) Die Ebene verläuft parallel zur x_1x_3-Ebene.

Weiterführende Aufträge I

→ Lerneinheit 4 Seite 223

Ahmed stellt die Behauptungen B1 und B2 auf.

4. Zeigen Sie mithilfe der Ansätze A1 bis A3, dass die Aussagen von Ahmed richtig sind.
5. Stellen Sie für Ihre eigenen Ebenen eine entsprechende Gleichung wie in B1 auf.

B1 Die Ebene E kann mithilfe der Gleichung $1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = -7$ beschrieben werden. Dabei ist diese Gleichung für alle Punkte $P(x_1|x_2|x_3)$ der Ebene E erfüllt.

B2 Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu den Spannvektoren von E und kann der Gleichung $1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = -7$ entnommen werden.

A1
$x_1 = -2 + 1 \cdot t + 2 \cdot s$
$x_2 = 1 + 1 \cdot t - 2 \cdot s$
$x_3 = 5 + 1 \cdot t + 2 \cdot s$

A2 $1 \cdot (-2 + 1 \cdot t + 2 \cdot s) + 0 \cdot (1 + 1 \cdot t - 2 \cdot s) - 1 \cdot (5 + 1 \cdot t + 2 \cdot s)$

A3 Berechnung des Skalarproduktes

Weiterführende Aufträge II

→ Lerneinheit 6 Seite 231

Das Viereck APQR mit $A(-2|1|5)$, $P(1|4|8)$, $Q(2|-3|9)$ und $R(5|0|12)$ liegt in der oben dargestellten Ebene $E: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$.

6. Erkunden Sie, für welche Werte t und s die zugehörigen Punkte im Viereck liegen bzw. welche Bedingung in diesem Fall für t und s erfüllt sein muss.
7. Untersuchen Sie eigene Figuren (Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Raute). Ermitteln Sie dazu:
   - die Eckpunkte der Figur,
   - die Ebene, in der die Figur liegt, und
   - die Werte für die Parameter s und t, für die die vollständige Fläche der Figur beschrieben wird.

1 Der Gauß-Algorithmus

Ty, Michi und Ami lösen die drei linearen Gleichungssysteme (LGS). Wer ist vermutlich am schnellsten fertig? Begründen Sie.

Ty

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Michi

$$\begin{aligned} 6x_1 + 6x_2 - 12x_3 &= 42 \\ 24x_2 - 42x_3 &= 114 \\ -258x_3 &= 258 \end{aligned}$$

Ami

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -14x_2 - 8x_3 &= -4 \\ x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Bisher wurden lineare Gleichungssysteme (LGS) mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen gelöst. Im Folgenden wird ein Algorithmus vorgestellt, mit dem man ein LGS mit drei Variablen und drei Gleichungen systematisch und effektiv rechnerisch lösen kann. Dieses Verfahren ist auch Grundlage der Lösungsmethode von Taschenrechnern und Computerprogrammen.

Wenn ein LGS in **Stufenform** vorliegt, kann man die Lösung leicht bestimmen, weil man x_3 direkt berechnen kann:
Aus der dritten Gleichung folgt $x_3 = -2$.
Anschließend setzt man $x_3 = -2$ in die zweite Gleichung ein und erhält die Lösung $x_2 = 2$. Einsetzen von $x_3 = -2$ und $x_2 = 2$ in die erste Gleichung liefert $x_1 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -8 \\ 2x_2 + 5x_3 &= -6 \\ -2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Das systematische Verfahren ist nach dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) benannt, der es entwickelte.

Ziel eines systematischen Verfahrens zum Lösen von LGS ist es also, jedes LGS in die Stufenform zu bringen, um danach die Lösungen durch Einsetzen von unten nach oben zu ermitteln. Dies erreicht man durch die folgenden **Äquivalenzumformungen**, mit denen man ein LGS umwandeln darf:
(1) Man darf zwei Gleichungen miteinander vertauschen.
(2) Man darf eine Gleichung mit einer Zahl $c \neq 0$ multiplizieren.
(3) Man darf eine Gleichung durch die Summe von ihr und einer zweiten Gleichung ersetzen.

D1 **MMS-Anleitung**
Gleichungssysteme

Wenn man beispielsweise das rechts abgebildete LGS lösen möchte, muss man es zunächst in die Stufenform umformen.

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Dazu werden hier als Erstes die erste und dritte Gleichung vertauscht, damit die Gleichung mit nur zwei Variablen unten steht.

$$\begin{aligned} &\text{I} && x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ &\text{II} && 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ &\text{III} && x_2 + 3x_3 = 10 \end{aligned}$$

Um für die Stufenform in der zweiten Gleichung $0 \cdot x_1$ zu erreichen, ersetzt man die Gleichung II durch die Gleichung $\text{II}_a = 5 \cdot \text{I} - \text{II}$.

$$\begin{aligned} &\text{I} && x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ &\text{II}_a = 5 \cdot \text{I} - \text{II} && -7x_2 + 9x_3 = -10 \\ &\text{III} && x_2 + 3x_3 = 10 \end{aligned}$$

Um im letzten Schritt in der dritten Gleichung $0 \cdot x_2$ zu erreichen, ersetzt man die Gleichung III durch die Gleichung $\text{III}_a = \text{II}_a + 7 \cdot \text{III}$.

$$\begin{aligned} &\text{I} && x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ &\text{II}_a && -7x_2 + 9x_3 = -10 \\ &\text{III}_a = \text{II}_a + 7 \cdot \text{III} && 30x_3 = 60 \end{aligned}$$

Nun wird die Lösung schrittweise von unten nach oben berechnet. Aus III_a erhält man:

$$\begin{aligned} 30x_3 &= 60 \quad | : 30 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Mit $x_3 = 2$ erhält man aus II_a:

$$\begin{aligned} -7x_2 + 18 &= -10 \quad | - 18 \quad | : (-7) \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Mit $x_2 = 4$ und $x_3 = 2$ erhält man aus I:

$$\begin{aligned} x_1 - 8 + 4 &= -1 \quad | + 4 \\ x_1 &= 3 \end{aligned}$$

Man erhält die Lösungsmenge $L = \{(3; 4; 2)\}$.

Ein 2-Tupel $(x_1; x_2)$ ist ein geordnetes Paar. $(x_1; x_2; x_3)$ nennt man auch ein 3-Tupel oder ein Tripel.

Matrixschreibweise als Kurzschreibweise von linearen Gleichungssystemen

Um Schreibarbeit zu sparen, kann man ein LGS in Kurzform in der Matrixschreibweise angeben. Man notiert dazu die Koeffizienten vor den Unbekannten sowie die Zahl rechts vom Gleichheitszeichen zeilenweise.

Kommt eine Unbekannte in einer Gleichung nicht vor, so ist der entsprechende Koeffizient 0.

LGS

$$\begin{aligned} 0x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 5x_1 - 3x_2 + 1x_3 &= 5 \\ 1x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Matrixschreibweise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 10 \\ 5 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

mit MMS

CAS

a:= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 10 \\ 5 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Die Unbekannten in den Gleichungen müssen jeweils in der gleichen Reihenfolge notiert sein. MMS liefern aus einer Matrix eine Stufenform, aus der man die Lösung des LGS direkt ablesen kann. Dabei übersetzt man die erhaltene Stufenform wieder in ein LGS.

D1 **MMS-Anleitung** Gleichungssysteme

CAS

rref(a) → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

wird zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1} + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 &= \mathbf{3} \\ 0\cdot x_1 + \mathbf{x_2} + 0\cdot x_3 &= \mathbf{4} \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \mathbf{x_3} &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

Man erkennt direkt die Lösung: $L = \{(3; 4; 2)\}$.

Der Gauß-Algorithmus

Man löst ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten (etwa x_1, x_2 und x_3) wie folgt:

1. Man bringt das lineare Gleichungssystem schrittweise durch Äquivalenzumformungen in die Stufenform.
2. Man löst die Gleichungen der Stufenform schrittweise von unten nach oben auf.

Der Gaußalgorithmus kann auch bei LGS mit mehr als 3 Gleichungen angewendet werden.

Beispiel LGS mit dem Gauß-Algorithmus und einem MMS lösen

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem rechts

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 1{,}5x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= -9 \end{aligned}$$

a) mit dem Gauß-Algorithmus.

b) mithilfe eines MMS.

Lösung

a) *mithilfe von Gleichungen:*

		mithilfe der Matrixschreibweise:
I	$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 5 & -5 & -9 \end{array}\right)$
II	$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$	
III	$1{,}5x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -9$	
I	$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ 1{,}5 & 5 & -5 & -9 \end{array}\right)$
$II_a = I - II$	$4x_2 - 3x_3 = -4$	
III	$1{,}5x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -9$	
I	$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & 14 \end{array}\right)$
II_a	$4x_2 - 3x_3 = -4$	
$III_a = I - 2\cdot III$	$-4x_2 + 8x_3 = 14$	
I	$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$
II_a	$4x_2 - 3x_3 = -4$	
$III_b = II_a + III_a$	$5x_3 = 10$	

Aus III_b erhält man die Gleichung $5x_3 = 10$ und damit $x_3 = 2$.
Durch Einsetzen von $x_3 = 2$ in II_a erhält man $4x_2 - 3\cdot 2 = -4$, also $x_2 = 0{,}5$.
Durch Einsetzen von $x_3 = 2$ und $x_2 = 0{,}5$ in I erhält man $3x_1 + 6\cdot 0{,}5 - 2\cdot 2 = -4$, also $x_1 = -1$.
Die Lösungsmenge ist $L = \{(-1; 0{,}5; 2)\}$.

b) *Lösungsweg 1:*

CAS

linSolve $\left(\begin{cases} 3\cdot x1 + 6\cdot x2 - 2\cdot x3 = -4 \\ 3\cdot x1 + 2\cdot x2 + x3 = 0 \\ 1{,}5\cdot x1 + 5\cdot x2 - 5\cdot x3 = -9 \end{cases}, \{x1, x2, x3\}\right)$

—> {−1, 0,5, 2}

Lösungsweg 2:

CAS

rref $\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 5 & -5 & -9 \end{bmatrix}\right)$ → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

D1 **MMS-Anleitung** Gleichungssysteme

Man erhält mit einem MMS als Ergebnis die Lösungsmenge $L = \{(-1; 0{,}5; 2)\}$.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Lösung des LGS. Führen Sie anschließend eine Probe durch.

Lerntipp Seite 211, Beispiel a)

a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= -1 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_3 &= 6 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 4x_2 + x_3 &= 1 \\ -5x_3 &= 10 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 5 \\ 17x_2 + 24x_3 &= 16 \\ 2x_3 &= 7 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 10x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 5x_3 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 4x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 4x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$

2 a) Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

b) Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe eines MMS.

Lerntipp Seite 211, Beispiel

(1) $\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -2x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$ (2) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$ (3) $\begin{aligned} 8x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 3x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$

3 Ein LGS mit drei Unbekannten wurde mithilfe eines MMS gelöst. Geben Sie die Lösung des zugehörenden LGS an.

a) CAS → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) CAS → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

c) CAS → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

4 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mithilfe eines MMS.

Lerntipp Seite 211, Beispiel b)

a) $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -4 \\ -2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -20 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 &= 23 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 - 0{,}5x_2 + 2x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 1{,}2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2{,}5x_3 &= -2 \end{aligned}$

Test 1

Lösungen, Seite 482

5 Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a) $\begin{aligned} x_1 + x_3 &= -2 \\ x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= -4 \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -11 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 4x_2 + x_3 &= -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$

6 SP **Finden Sie den Fehler!**

Erklären Sie, was beim Lösen des LGS falsch gemacht wurde, und notieren Sie eine richtige Lösung. Die Wortliste auf dem Rand kann helfen.

Wortliste
- die Äquivalenzumformung
- die Subtraktion
- die Addition
- das Zweifache
- das Dreifache

a)

I	$2x_1$	$+ 3x_2$	$- 4x_3$	$= 5$
II	x_1	$- 7x_2$	$+ 12x_3$	$= -8$
III	$2x_1$	$+ 5x_2$	$- 3x_3$	$= -4$
I	$2x_1$	$+ 3x_2$	$- 4x_3$	$= 5$
II	x_1	$- 7x_2$	$+ 12x_3$	$= -8$
$III_a = III - I$		$2x_2$	$+ x_3$	$= 9$
I	$2x_1$	$+ 3x_2$	$- 4x_3$	$= 5$
$II_a = I - 2 \cdot II$		$17x_2$	$- 20x_3$	$= 21$
III_a		$2x_2$	$+ x_3$	$= 9$

b)

I	$3x_1$	$- 4x_2$	$+ 2x_3$	$= 4$
II	$6x_1$	$+ 2x_2$	$+ x_3$	$= -8$
III	$2x_1$	$+ 5x_2$	$- 3x_3$	$= -4$
I	$3x_1$	$- 4x_2$	$+ 2x_3$	$= 4$
$II_a = II - 2 \cdot I$		$- 8x_2$		$= 20$
$III_a = II - 3 \cdot III$		$- 13x_2$	$- 8x_3$	$= -20$
I	$3x_1$	$- 4x_2$	$+ 2x_3$	$= 4$
II_a		$-8x_2$		$= 20$
$III_b = 13 \cdot II_a - 8 \cdot III_a$		0		$= 100$

7 Erklären Sie, wie Sie ein LGS erzeugen können, bei dem alle Koeffizienten von Null verschieden sind und das die angegebene Lösung hat. Erläutern Sie sich gegenseitig Ihr Vorgehen.

a) $L = \{(1; 2; 3)\}$ b) $L = \{(-2; 5; 1)\}$ c) $L = \{(1; 1; 1)\}$ d) $L = \{(0; 3; 6)\}$

8 Bestimmen Sie die Lösung des LGS. Erläutern Sie sich anschließend im Wechsel, wie Sie vorgegangen sind. Beurteilen Sie, welche Ihrer Vorgehensweisen „geschickt" waren.

a) $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 &= -2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 4x_2 &= 8 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 5x_1 &= 10 \\ 5x_2 - 3x_3 &= 9 \\ 4x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} a + b &= 3 \\ a + b - c &= 0 \\ b + c &= 4 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} r + s - t &= 0 \\ r + t &= 2 \\ r - 2s + t &= 2 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 0{,}6y + 1{,}8z &= 3 \\ 0{,}3x + 1{,}2y &= 0 \\ 0{,}5x + z &= 1 \end{aligned}$

9 Zeigen Sie, dass das LGS keine Lösung hat.

a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 5x_1 - 0{,}5x_2 + 3x_3 &= 13 \\ 6x_1 - 1{,}5x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 5x_1 - 4x_2 - 10x_3 &= -9 \\ 2x_1 - 2x_2 - 11x_3 &= 0 \end{aligned}$

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 483

10 Bestimmen Sie die Lösung des LGS. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

a) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= -17 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= -8 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= -7 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 22 \\ -4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$

11 Leonardo hat das LGS mit vier Unbekannten mit den Gleichungen I bis IV in die Stufenform umgeformt. Zeigen Sie, dass die Umrechnung richtig ist, und bestimmen Sie anschließend die Lösung des LGS. Kontrollieren Sie mithilfe eines MMS.

$\begin{aligned} \text{I}\quad & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -7 \\ \text{II}\quad & -3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -10 \\ \text{III}\quad & 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ \text{IV}\quad & -3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 10 \end{aligned}$

$\begin{aligned} \text{I}\quad & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -7 \\ \text{II}_n\quad & x_2 - \tfrac{1}{21}x_3 - \tfrac{2}{21}x_4 = \tfrac{53}{21} \\ \text{III}_n\quad & x_3 - \tfrac{1}{10}x_4 = -\tfrac{13}{5} \\ \text{IV}_n\quad & x_4 = -4 \end{aligned}$

12 **Finden Sie den Fehler!**
Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie eine richtige Lösung.

$\begin{aligned} \text{I}\quad & 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4 \\ \text{II}\quad & 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ \text{III}\quad & -5x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ \hline \text{I}_a = \text{II} + \text{III}\quad & -2x_1 = 0 \quad | : (-2) \\ & x_1 = 0 \end{aligned}$

$x_1 = 0$ in II und III einsetzen ergibt:

$\begin{aligned} \text{II}_a\quad & x_2 - 2x_3 = 2 \\ \text{III}_a\quad & -x_2 + 2x_3 = -2 \\ \hline \text{III}_b = \text{II}_a + \text{III}_a\quad & 0 = 0 \end{aligned}$

Man kann das LGS nicht lösen.
Aber wenn man in III_a beispielsweise $x_3 = 1$ einsetzt, erhält man $x_2 - 2 \cdot 1 = 2$, also $x_2 = 4$.
Damit erhält man die Lösung $L = \{(0; 4; 1)\}$.

Probe:
I_a: $-2 \cdot 0 = 0$ ✓
II_a: $4 - 2 \cdot 1 = 2$ ✓
III_a: $-4 + 2 \cdot 1 = -2$ ✓

Grundwissen Test — Diagramme verstehen

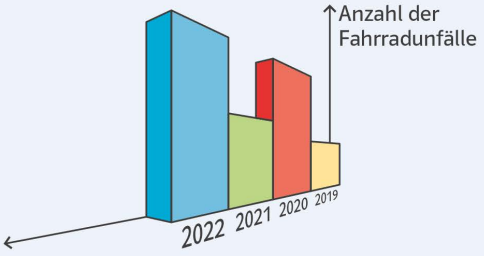
→ **Lösungen**, Seite 483

G **13** Das Diagramm gibt Auskunft über die Anzahl der Fahrradunfälle in einer Großstadt.

a) Beschreiben Sie, welche Informationen das Diagramm liefert.

b) Erläutern Sie, warum das Diagramm nur sehr ungenaue Informationen liefert.

c) Geben Sie an, mit welchen Methoden hier manipuliert worden sein könnte.



2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

Ordnen Sie den linearen Gleichungssystemen ihre Lösungsmenge zu. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

LGS 1

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_2 - x_3 &= -2{,}5 \\ x_2 + 3x_3 &= 22{,}5 \end{aligned}$$

LGS 2

$$\begin{aligned} x_1 + 1{,}5x_2 + x_3 &= 7{,}5 \\ -2x_1 + 9x_2 &= 3 \\ -x_1 + 4{,}5x_2 &= 10 \end{aligned}$$

LGS 3

$$\begin{aligned} -x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 14 \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 18 \end{aligned}$$

Lösungsmenge 1
L = {keine Lösung}

Lösungsmenge 2
L = {unendlich viele Lösungen}

Lösungsmenge 3
L = {genau eine Lösung}

Wie bei linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen können auch bei LGS mit mehr als zwei Unbekannten und Gleichungen nur drei Fälle auftreten: Das LGS hat genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Im Folgenden wird erarbeitet, wie man an der letzten Zeile der Stufenform erkennt, welcher der drei Fälle vorliegt.

1. Fall: Das Gleichungssystem hat **genau eine Lösung**.

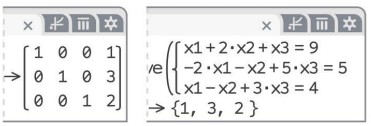
LGS

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Stufenform

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ 3x_2 + 7x_3 &= 23 \\ 9x_3 &= 18 \end{aligned}$$

MMS: „rref“ bzw. „linSolve“



Aus der letzten Zeile liest man die Gleichung $9x_3 = 18$ ab und es folgt $x_3 = 2$.
Damit erhält man aus der zweiten Gleichung $x_2 = 3$ und aus der ersten Gleichung $x_1 = 1$.
Die Lösungsmenge ist $L = \{(1; 3; 2)\}$.

2. Fall: Das Gleichungssystem hat **keine Lösung**.

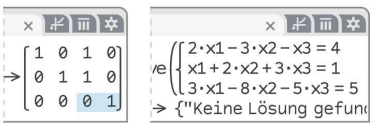
LGS

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Stufenform

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -7x_2 - 7x_3 &= 2 \\ 0 \cdot x_3 &= 2 \end{aligned}$$

MMS: „rref“ bzw. „linSolve“



Aus der letzten Zeile liest man die Gleichung $0 \cdot x_3 = 2$ ab. Diese Gleichung hat keine Lösung, deshalb hat das gesamte Gleichungssystem keine Lösung. Die Lösungsmenge ist $L = \{\ \}$.

3. Fall: Das Gleichungssystem hat **unendlich viele Lösungen**.

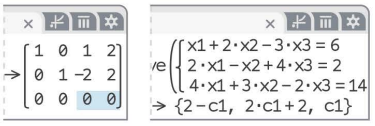
LGS

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 14 \end{aligned}$$

Stufenform

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 0 \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

MMS: „rref“ bzw. „linSolve“



Aus der letzten Zeile liest man die Gleichung $0 \cdot x_3 = 0$ ab. Diese Gleichung ist für jeden Wert für x_3 erfüllt und somit gibt es für jeden Wert für x_3 eine Lösung. Es gibt also unendlich viele Lösungen. Wählt man zum Beispiel $x_3 = 1$, so erhält man mit der zweiten Gleichung $x_2 = 4$.
Durch Einsetzen von $x_3 = 1$ und $x_2 = 4$ in die erste Gleichung $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$ erhält man:

$$\begin{aligned} x_1 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 &= 6 \quad | - 5 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

Wenn man für x_3 den Wert 1 wählt (also $x_3 = 1$), dann erhält man von den unendlich vielen Lösungen die eine Lösung $(1; 4; 1)$.

D1 **MMS-Anleitung**
Gleichungssysteme

MMS verwenden für die frei wählbare Zahl häufig die Bezeichnung ***c1***.
Hier ist ***c1*** = t.

Man kann die Lösungsmenge mit unendlich vielen Lösungen auch allgemein angeben. Dazu wählt man für x_3 den allgemeinen Wert t. Man setzt $x_3 = t$ in die zweite Gleichung ein und erhält: $x_2 - 2t = 2 \quad | + 2t$

$x_2 = 2 + 2t$

Durch Einsetzen von $x_3 = t$ und $x_2 = 2 + 2t$ in die Gleichung $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$ erhält man:

$x_1 + 2 \cdot (2 + 2t) - 3t = 6 \quad | - 4 - t$

$x_1 = 2 - t$

Die Lösungsmenge ist $L = \{(2 - t; 2 + 2t; t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Man bestimmt die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, indem man es durch Äquivalenzumformungen in Stufenform bringt und dann die letzte Zeile der Stufenform betrachtet. Folgende Fälle sind möglich:

1. Die letzte Gleichung hat genau eine Lösung. Man kann durch Rückwärtseinsetzen von unten nach oben genau eine Lösung bestimmen.
2. Die letzte Gleichung hat keine Lösung. Dann ist die Lösungsmenge leer.
3. Die letzte Gleichung ist immer wahr. Dann gibt es unendlich viele Lösungen. Man führt für eine Unbekannte einen Parameter ein, mit dem man die Lösungsmenge angeben kann.

Spezialfall: Ein LGS mit unendlich vielen Lösungen, für die zwei Parameter eingeführt werden

In dem abgebildeten LGS ergeben sich zwei Gleichungen, die immer wahr sind.
Um bei diesem Spezialfall eine allgemeine Lösung angeben zu können, muss man für zwei Unbekannte allgemeine Werte (Parameter) wählen:
Für $x_3 = t$ und $x_1 = s$ ergibt sich aus der Gleichung $2x_1 + x_2 - 4x_3 = 12$ die neue Gleichung:

$2s + x_2 - 4t = 12 \quad | - 2s + 4t$

$x_2 = 12 - 2s + 4t$

I	$2x_1$	+ x_2	− $4x_3$	=	12
II	x_1	+ $0{,}5x_2$	− $2x_3$	=	6
III	$4x_1$	+ $2x_2$	− $8x_3$	=	24
I	$2x_1$	+ x_2	− $4x_3$	=	12
$II_a = I - 2 \cdot II$			0	=	0
$III_a = 2 \cdot I - III$			0	=	0

Man erhält die allgemeine Lösungsmenge $L = \{(s; 12 - 2s + 4t; t) \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$.

Beispiel 1 **Ein LGS lösen, das keine Lösung hat**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS mit dem Gauß-Algorithmus.

I	$3x_1$	− $2x_2$	+ x_3	=	13
II	$-x_1$	+ x_2	− $3x_3$	=	−8
III	$-x_1$	+ $2x_2$	− $11x_3$	=	2

Lösung

mithilfe von Gleichungen:

I	$3x_1$	− $2x_2$	+ x_3	=	13
II	$-x_1$	+ x_2	− $3x_3$	=	−8
III	$-x_1$	+ $2x_2$	− $11x_3$	=	2
I	$3x_1$	− $2x_2$	+ x_3	=	13
$II_a = I + 3 \cdot II$		x_2	− $8x_3$	=	−11
$III_a = I + 3 \cdot III$		$4x_2$	− $32x_3$	=	19
I	$3x_1$	− $2x_2$	+ x_3	=	13
II_a		x_2	− $8x_3$	=	−11
$III_b = 4 \cdot II_a - III_a$			0	=	−63

mithilfe der Matrixschreibweise:

$$\text{I}\\ \text{II}\\ \text{III}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 13 \\ -1 & 1 & -3 & -8 \\ -1 & 2 & -11 & 2 \end{array}\right)$$

$$\text{I}\\ II_a = I + 3 \cdot II\\ III_a = I + 3 \cdot III\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -11 \\ 0 & 4 & -32 & 19 \end{array}\right)$$

$$\text{I}\\ II_a\\ III_b = 4 \cdot II_a - III_a\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -63 \end{array}\right)$$

Da $0 \neq -63$ gilt, erkennt man an der letzten Zeile, dass das LGS keine Lösung hat.
Die Lösungsmenge ist demnach leer, also $L = \{\ \}$.

Beispiel 2 **Ein LGS mit unendlich vielen Lösungen lösen**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) Verwenden Sie den Gauß-Algorithmus.

b) Verwenden Sie ein MMS.

c) Führen Sie die Probe durch.

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{I} & x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = 1 \\ \text{II} & 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = 6 \\ \text{III} & 2x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & = 2 \end{array}$$

Lösung

a) Lösen des LGS:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{I} & x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = 1 \\ \text{II} & 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = 6 \\ \text{III} & 2x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & = 2 \\ \hline \text{I} & x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = 1 \\ \text{II}_a = 2\cdot\text{I} - \text{II} & & & -x_2 & + & x_3 & = -4 \\ \text{III}_a = 2\cdot\text{I} - \text{III} & & & & & 0 & = 0 \end{array}$$

An der letzten Zeile erkennt man, dass es unendlich viele Lösungen gibt.

Man wählt etwa $x_3 = t$ und setzt jeweils ein:

in II_a: $-x_2 + t = -4 \quad |-t \;|\cdot(-1)$

$x_2 = 4 + t$

in I: $x_1 - 3\cdot(4 + t) + t = 1 \quad |+12 + 2t$

$x_1 = 13 + 2t$

Es ist $L = \{(13 + 2t;\, 4 + t;\, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

b)

CAS

linSolve({x1 − 3·x2 + x3 = 1, 2·x1 − 5·x2 + x3 = 6, 2·x1 − 6·x2 + 2·x3 = 2}, {x1,x2,x3})

—> {2·c1 + 13, c1 + 4, c1}

Wenn man in der Lösung des MMS c1 = t wählt, erhält man insgesamt als Lösungsmenge $L = \{(2t + 13;\, t + 4;\, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

c) Man setzt die allgemeine Lösung in die drei Gleichungen ein:

I $2t + 13 - 3\cdot(t + 4) + t = 2t + 13 - 3t - 12 + t = 1$ ✓

II $2\cdot(2t + 13) - 5\cdot(t + 4) + t = 4t + 26 - 5t - 20 + t = 6$ ✓

III $2\cdot(2t + 13) - 6\cdot(t + 4) + 2t = 4t + 26 - 6t - 24 + 2t = 2$ ✓

Aufgaben

○ **1** Geben Sie an, ob das LGS eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat.

a) $\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = 1 \\ & & 5x_2 & + & 2x_3 & = 16 \\ & & & & 3x_3 & = 9 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrl} 12x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = 7 \\ & & 7x_2 & - & 3x_3 & = 1 \\ & & & & 0\cdot x_3 & = -2 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = 2 \\ & & 3x_2 & - & 6x_3 & = 6 \\ & & & & 0\cdot x_3 & = 0 \end{array}$

○ **2** Das LGS hat unendlich viele Lösungen. Bestimmen Sie die Lösungsmenge. Führen Sie anschließend eine Probe durch.

→ **Lerntipp** Seite 216, Beispiel 2

a) $\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 3 \\ & & x_2 & - & x_3 & = 1 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = 2 \\ & & -4x_2 & + & 8x_3 & = -2 \\ & & x_2 & - & 6x_3 & = \frac{1}{2} \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = 4 \\ x_1 & & & & & = 4 \end{array}$

○ **3** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS und führen Sie anschließend die Probe durch.

→ **Lerntipp** Seite 215, Beispiel 1 Seite 216, Beispiel 2

a) Verwenden Sie den Gauß-Algorithmus. b) Verwenden Sie ein MMS.

(1) $\begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = 2 \\ & & 3x_2 & - & 2x_3 & = 1 \\ & & -6x_2 & + & 4x_3 & = 3 \end{array}$

(2) $\begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = 2 \\ & & -4x_2 & + & 8x_3 & = -2 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = \frac{1}{2} \end{array}$

(3) $\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = 6 \\ & & & & -4x_3 & = 8 \end{array}$

(4) $\begin{array}{rcrcrl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = 5 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = 8 \\ & & & & 2x_3 & = 6 \end{array}$

(5) $\begin{array}{rcrcrl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = 9 \\ & & 4x_2 & - & 3x_3 & = 6 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & & & = 10 \end{array}$

(6) $\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = 7 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 14x_3 & = 13 \end{array}$

○ **4** Drei LGS mit drei Unbekannten sind in der Matrixschreibweise gelöst worden. Geben Sie die Lösungsmenge des zugehörigen LGS an.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

5 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des zugehörigen LGS und führen Sie die Probe durch.

a) Verwenden Sie den Gauß-Algorithmus. b) Verwenden Sie ein MMS.

(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ (2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$ (3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right)$

→ **Lerntipp** Seite 215, Beispiel 1

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 484

6 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS und führen Sie anschließend eine Probe durch.

a) Verwenden Sie den Gauß-Algorithmus. b) Verwenden Sie ein MMS.

(1) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}$ (2) $\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 12 \\ 5x_1 & & & + & 10x_3 & = & 5 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & = & -2 \end{array}$ (3) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -5 \\ 6x_1 & & & + & 3x_3 & = & -9 \end{array}$

7 Gegeben ist die Matrixschreibweise eines LGS. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 6 \\ 2 & 6 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 12 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 10 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 4{,}5 & 0{,}5 \\ 4 & -4 & 2 & 16 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -6 & 5 \\ 7 & 3 & 3 & 10 \\ 8 & 2 & 6 & 10 \end{array}\right)$

8 Ein lineares Gleichungssystem hat die Lösungsmenge $L = \{(1 + t; 4 + 2 \cdot t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Ermitteln Sie, ob das Zahlentripel eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist, und geben Sie ein LGS mit dieser Lösung an. Erläutern Sie sich anschließend gegenseitig Ihr Vorgehen.

a) (3; 8; 2) b) (2; 6; −1) c) (−1; 0; −2) d) (2,5; 7; 1,5)

9 Geben Sie ein LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten an, das die folgende Lösungsmenge hat und bei dem alle Koeffizienten von null verschieden sind. Tauschen Sie Ihre Ergebnisse untereinander aus und kontrollieren Sie diese, indem Sie das neu erhaltene LGS lösen.

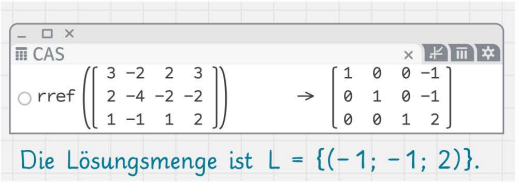
a) $L = \{\ \}$ b) $L = \{(3t; 2t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ c) $L = \{(5; t; t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

10 **Finden Sie den Fehler!**

Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie eine richtige Lösung.

Das LGS soll mit einem MMS gelöst werden.

$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_2 & - & 4x_1 & - & 2x_3 & = & -2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$



11 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $\begin{array}{rcrcrcl} x_2 & = & 3x_1 & + & 3x_3 & + & 17 \\ x_2 & = & 2x_1 & - & x_3 & + & 8 \\ x_2 & = & x_1 & + & 3x_3 & + & 7 \end{array}$ b) $\begin{array}{rcl} 2x_1 - (3x_2 + 2) & = & 2x_3 + 8 \\ x_2 - (x_1 + x_3) & = & 2 \\ x_3 + (x_1 - 1) & = & 3x_2 + 6 \end{array}$ c) $\begin{array}{rcl} 2(x_1 - 1) + (3x_2 - x_3) & = & 2 \\ 5x_1 - 4(x_2 - 2x_3) & = & 22 \\ 3(x_2 + x_3) - 4(x_1 - 1) & = & 14 \end{array}$

12 a) Zeigen Sie, dass das LGS (1) nur die sogenannte „triviale Lösung" (0; 0; 0) hat.

b) Das LGS (2) hat unendlich viele Lösungen. Bestätigen Sie anhand selbstgewählter Beispiele, dass sowohl die Vielfachen einer Lösung als auch die Summe zweier Lösungen wieder Lösungen des LGS sind.

c) Das LGS (3) hat unendlich viele Lösungen. Geben Sie eine Lösung an und bestätigen Sie anhand von Beispielen, dass man weitere Lösungen erhält, wenn man zu dieser Lösung eine der Lösungen aus Teilaufgabe b) addiert.

(1) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$ (2) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}$ (3) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 7 \end{array}$

13 Tobias zweifelt die Vorteile des Gauß-Verfahrens an. Er findet das Einsetzungsverfahren genauso gut und überlegt: „Als Erstes löse ich eine der Gleichungen nach x_1 auf und setze dann x_1 in die anderen Gleichungen ein. Damit enthalten diese Gleichungen kein x_1 mehr. Nun verfahre ich mit den restlichen Gleichungen und den anderen Unbekannten genauso. Insgesamt erhalte ich auch so die Stufenform."

a) Entwerfen Sie ein LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten, mit dem Sie zeigen können, dass das Gauß-Verfahren zu einer einfacheren Rechnung führt als das Einsetzungsverfahren.

b) Untersuchen Sie für ein LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten, ob das Einsetzungsverfahren auch bei LGS mit einer leeren Lösungsmenge bzw. mit unendlich vielen Lösungen funktioniert.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 485

14 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS. Führen Sie anschließend eine Probe durch.

a)
$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - 3x_3 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 2x_1 \\ x_1 + x_3 &= 3x_2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 - x_3 \\ 4x_1 + 7x_2 &= 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 4x_2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 7x_3 &= 2x_2 + 14 \\ 3x_1 + x_2 &= 5x_3 + 2 \\ 4x_1 + 2x_3 &= x_2 + 16 \end{aligned}$$

15 Geben Sie ein LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten an, das die folgende Lösungsmenge hat und bei dem in jeder Zeile mindestens zwei Koeffizienten von null verschieden sind.

a) $L = \{(t + 1; t - 1; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ **b)** $L = \{(0; -t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ **c)** $L = \{(3; t - 1; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

16 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) LGS mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen haben unendlich viele Lösungen.

b) LGS mit zwei Unbekannten und drei Gleichungen haben keine Lösung.

c) Wenn auf der rechten Seite des LGS nur Nullen stehen, gibt es mindestens eine Lösung.

17 Gegeben ist das folgende LGS mit dem Parameter $r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2x_1 + (r + 2)x_2 + (r - 2)x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 + (r - 1)x_3 &= 8 \\ x_1 + r \cdot x_2 + (r - 2)x_3 &= 8 \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit vom Parameter r.

b) Geben Sie an, für welche Werte für r, das LGS

(1) genau eine Lösung hat,

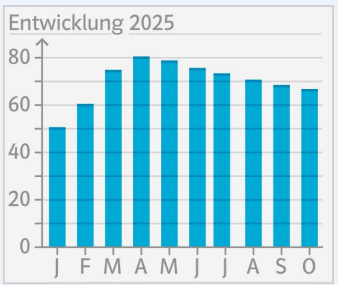
(2) keine Lösung hat,

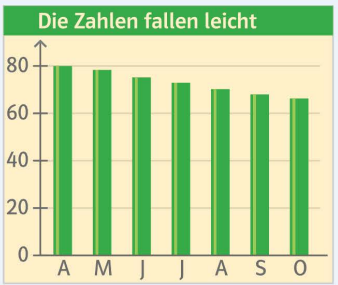
(3) unendlich viele Lösungen hat. Geben Sie diese in Abhängigkeit eines Parameters t an.

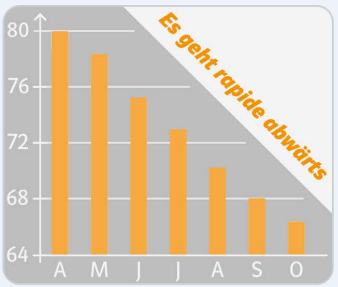
Grundwissen Test — Manipulationen in Diagrammen erkennen

→ **Lösungen**, Seite 486

G 18 Die Diagramme wurden auf derselben Datenbasis erstellt. Geben Sie an, wie sich die Wirkung der Diagramme unterscheidet und wie dies erreicht wurde.





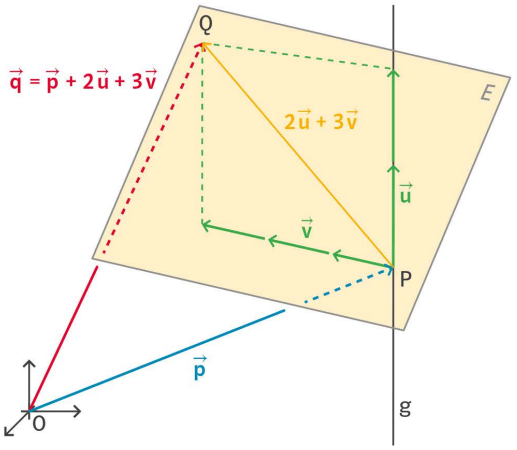


3 Ebenen im Raum – die Parameterform

Beschreiben Sie Vor- und Nachteile der abgebildeten Tische.

Mit Vektoren kann man nicht nur Geraden, sondern auch Ebenen beschreiben. Wie dies erfolgt, wird im Folgenden verdeutlicht.

In der Abbildung sind verschiedene Objekte abgebildet, die man mithilfe von Vektoren darstellen kann.
Der Punkt P kann mithilfe des Ortsvektors $\vec{p}$ beschrieben werden.
Die Gerade g kann mithilfe eines Stützvektors $\vec{p}$ und eines Richtungsvektors $\vec{u}$ beschrieben werden: g: $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$.
Die **Ebene E** kann durch einen **Stützvektor** $\vec{p}$ und zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beschrieben werden: E: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$.
Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen **Spannvektoren**. Sie dürfen nicht kollinear sein, weil die Gleichung $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ ansonsten eine Gerade beschreiben würde. Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ würden dann in dieselbe Richtung verlaufen.



Man liest die **Mengenschreibweise** der Ebene wie folgt:
„E ist die Menge aller Punkte $(x_1|x_2|x_3)$ in $\mathbb{R}^3$, also im dreidimensionalen Raum, für die $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ gilt, wobei r und s reelle Zahlen sind."

Setzt man in die Gleichung $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ für r und s jeweils eine reelle Zahl ein, dann erhält man jeweils Ortsvektoren, die zu Punkten der Ebene E gehören. So erhält man alle Punkte der Ebene. Eine Ebene entspricht somit einer Punktmenge. Ebenen werden daher auch in der Mengenschreibweise notiert: $E = \left\{ (x_1|x_2|x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \text{ mit } r, s \in \mathbb{R} \right\}$.
Den Punkt Q der Ebene E oben erhält man mit dem Ortsvektor $\vec{q} = \vec{p} + 2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$.

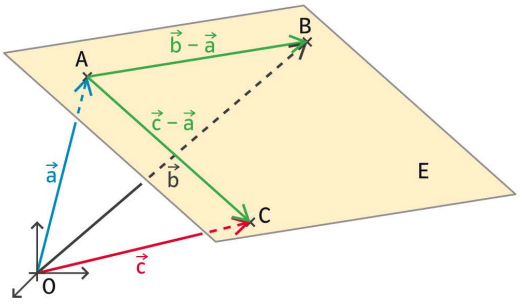
Ebenengleichung einer Ebene in Parameterform
Jede Ebene lässt sich durch eine Gleichung in **Parameterform** mit

$$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \quad (r, s \in \mathbb{R},\ \vec{u} \neq \vec{o},\ \vec{v} \neq \vec{o},\ \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ sind nicht kollinear})$$

beschreiben, wobei $\vec{x}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene ist.
Die Parameter r und s legen jeden Punkt der Ebene E eindeutig fest.
Der Vektor $\vec{p}$ heißt **Stützvektor**, die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen **Spannvektoren** der Ebene.

Für eine Ebene gibt es unendlich viele verschiedene Ebenengleichungen in Parameterform.

Drei Punkte A, B und C legen eine Ebene E eindeutig fest, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen:
Als Stützvektor kann man den Ortsvektor eines dieser Punkte wählen, z. B. den Ortsvektor $\vec{a}$ des Punktes A. Als Spannvektoren kann man dann z. B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ wählen. Dann ist $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$ eine Ebenengleichung von E.



D1 **MMS-Anleitung**
3D-Darstellung von Ebenen

Beispiel 1 **Eine Ebenengleichung aus drei Punkten aufstellen**

Geben Sie, falls die Punkte A, B und C eine Ebene eindeutig festlegen, eine Gleichung dieser Ebene in Parameterform an.

a) $A(1|-1|1)$, $B(1{,}5|1|0)$, $C(0|1|1)$ b) $A(1|-1|1)$, $B(-2|2|-2)$, $C(3|-3|3)$

Lösung

a) Man kann z. B. als Stützvektor $\overrightarrow{OA}$ und als Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ wählen.

Es gilt $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also sind die Spannvektoren nicht kollinear.

Man erhält als Ebenengleichung in Parameterform $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind kollinear, denn $-\frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Die Punkte A, B und C liegen somit auf einer Geraden. Sie legen keine Ebene fest.

Beispiel 2 **Eine Punktprobe durchführen**

Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Untersuchen Sie, ob der Punkt $A(7|5|4)$ in der Ebene liegt.

b) Untersuchen Sie, ob der Punkt $B(7|1|8)$ in der Ebene liegt.

Lösung

a) *Es wird geprüft, ob es reelle Zahlen r und s mit* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ *gibt.*

Man erhält das folgende LGS (drei Gleichungen mit zwei Unbekannten):

$$\begin{array}{rcl} 2 + r + 2s = 7 \mid -2 & & \text{I} \quad r + 2s = 5 \\ 3r - s = 5 & \rightarrow & \text{II} \quad 3r - s = 5 \\ 1 + 5r + s = 4 \mid -1 & & \text{III} \quad 5r + s = 3 \end{array}$$

Mit den Gleichungen II und III berechnet man r und s, die man mit Gleichung I kontrolliert.

II + III: $8r = 8$, also $r = 1$. Einsetzen von $r = 1$ in II: $3 \cdot 1 - s = 5$ liefert $s = -2$.

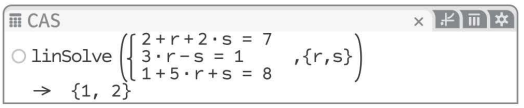
Kontrolle: Einsetzen von $r = 1$ und $s = -2$ in I: $1 + 2 \cdot (-2) = -3 \neq 5$.

Aufgrund dieses Widerspruchs liegt der Punkt A nicht in der Ebene E.

b) *Es wird geprüft, ob es reelle Zahlen r und s mit* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ *gibt.*

Man erhält das folgende LGS. Ein MMS liefert das folgende Ergebnis:

$$\begin{array}{l} 2 + r + 2s = 7 \\ 3r - s = 1 \\ 1 + 5r + s = 8 \end{array}$$



Mit $r = 1$ und $s = 2$ lässt sich der Punkt B berechnen. Der Punkt B liegt in der Ebene E.

Aufgaben

○ **1** Geben Sie, falls die Punkte A, B und C eine Ebene eindeutig festlegen, eine Gleichung dieser Ebene in Parameterform an.

a) $A(0|0|0)$, $B(1|0|3)$, $C(3|1|2)$ b) $A(1|0|0)$, $B(0|1|0)$, $C(1|0|1)$

c) $A(2|1|3)$, $B(1|-1|0)$, $C(0|-3|-3)$ d) $A(2|3|4)$, $B(4|3|2)$, $C(2|4|3)$

→ **Lerntipp** Seite 220, Beispiel 1

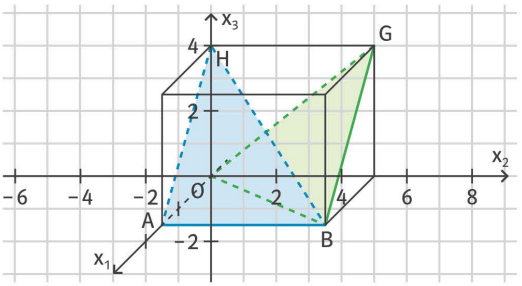
○ **2** Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie, ob der Punkt Q in der Ebene liegt.

a) $Q(8|0|6)$ b) $Q(2|1|3)$ c) $Q(16|-3|11)$ d) $Q(6|-1|5)$

→ **Lerntipp** Seite 220, Beispiel 2

○ **3** Der abgebildete Quader liegt so im Koordinatensystem, dass seine Seitenflächen parallel zu den Koordinatenebenen liegen. Zwei der Eckpunkte haben die Koordinaten A(3|0|0) und G(0|5|4).
Bestimmen Sie für die Ebenen E_1 und E_2 je eine Ebenengleichung in Parameterform.



○ **4** Bestimmen Sie je zwei Ebenengleichungen in Parameterform der Ebene E, in der die Punkte A, B und C liegen. Untersuchen Sie, ob der Punkt D ebenfalls in E liegt.
a) A(0|0|−2), B(0|−5|0), C(5|0|1), D(3|−2|1) b) A(2|1|0), B(0|6|1), C(3|2|3), D(5|−3|2)

Lerntipp Seite 220, Beispiel 1 und 2

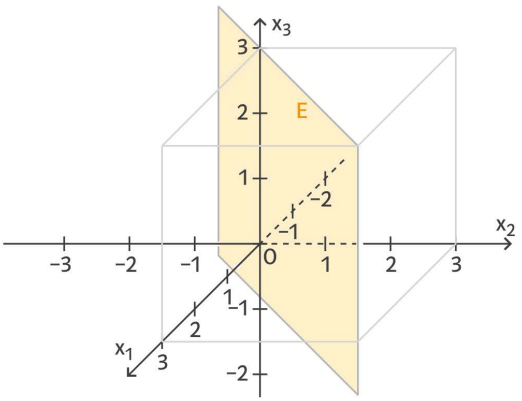
Test 1

Lösungen, Seite 486

○ **5** Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$.
Untersuchen Sie, ob der Punkt Q(2|6|5) bzw. der Punkt R(3|−5|3) in der Ebene E liegt.

○ **6** Gegeben ist die Ebene E, in der die Punkte A(1|0|0), B(0|1|0) und C(0|0|1) liegen. Geben Sie zwei Ebenengleichungen in Parameterform von E an, bei denen weder die Stützvektoren noch die Spannvektoren übereinstimmen.

◒ **7** Dargestellt ist die Ebene E mit der Ebenengleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.



a) Beschreiben Sie die Lage der Ebene E im Koordinatensystem.
b) Geben Sie die Koordinaten von drei Punkten der Ebene E an.
c) Zeigen Sie, dass die Ebenengleichung $\vec{x} = k\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$ ebenfalls die Ebene E beschreibt.
d) Der Punkt P(−2|−2|7) liegt in der Ebene E. Bestimmen Sie für den Ortsvektor von P die Werte für r und s bzw. für k und t und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse.

◒ **8** Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$.
Untersuchen Sie, für welche Werte von p der Punkt P in der Ebene liegt.
a) P(4|1|p) b) P(p|0|7) c) P(p|2|−2) d) P(0|p|p)

◒ **9** Gegeben sind die Ebenen $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix} + m\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} + n\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.
a) Es soll untersucht werden, ob die beiden Ebenen identisch sind. Mathilde kontrolliert dazu, ob Punkte der einen Ebene auch in der anderen Ebene liegen. Valentina untersucht, ob sich die Spannvektoren der einen Ebene durch eine Linearkombination der Spannvektoren der anderen Ebene darstellen lassen. Führen Sie beide Methoden aus und vergleichen Sie diese.
b) Untersuchen Sie mit einem Verfahren Ihrer Wahl, ob die beiden Ebenen identisch sind.
$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} + m\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + n\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$

10 **Wahr oder falsch?**

Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ verläuft parallel zur x_1x_2-Ebene.

b) Die Ebene $E: \vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ enthält die x_3-Achse.

c) Die Gerade $g: \vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ liegt in der Ebene $E: \vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$.

11 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Eine Ebene wird mithilfe eines Punktes und einer Geraden eindeutig festgelegt.

b) Eine Ebene wird mithilfe von zwei Geraden eindeutig festgelegt.

c) Eine Ebene wird mithilfe von zwei Punkten und einer Geraden eindeutig festgelegt.

Test 2

Lösungen, Seite 486

12 Durch den Punkt P und die Gerade g ist die Ebene E eindeutig festgelegt. Geben Sie eine Ebenengleichung in Parameterform der Ebene E an.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$; $P(5|-5|3)$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$; $P(2|7|11)$

13 Prüfen Sie, ob die Geraden g_1 und g_2 sich schneiden. Geben Sie für den Fall, dass sie sich schneiden, eine Ebenengleichung in Parameterform an, die die beiden Geraden enthält.

a) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$; $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\10\\9\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

b) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$; $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

14 Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die Aussage wahr ist.

a) Die Ebene $E = \left\{(x_1|x_2|x_3)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\a\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \text{ mit } a, r, s\in\mathbb{R}\right\}$ verläuft durch den Koordinatenursprung.

b) Die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}a\\a\\4\end{pmatrix}$ beschreibt keine Ebene.

15 Gegeben sind der Koordinatenursprung O sowie die Punkte P und Q. Diese drei Punkte liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden. Erstellen Sie eine Planskizze der Situation. Beschreiben Sie dann die Menge aller Punkte X mit den Ortsvektoren $\vec{x} = r\cdot\overrightarrow{OP} + s\cdot\overrightarrow{PQ}$, für die gilt:

a) $r + s = 1$ **b)** $r + s \le 1$, $0 \le s$ und $0 \le r$ **c)** $r - s = 0$ **d)** $0 \le s \le 1$ und $0 \le r \le 1$

Grundwissen Test

Informationen aus Diagrammen entnehmen

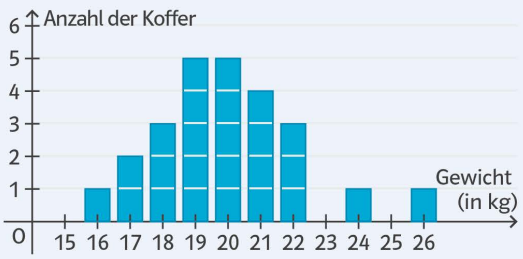
Grundwissen, Seite 422
Lösungen, Seite 487

G **16** Wiegt ein Koffer beim Einchecken am Flughafen mehr als 20 kg, muss pro Kilogramm Mehrgewicht 12 € gezahlt werden. 25 Koffer wurden gewogen.

a) Geben Sie die absoluten und die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ergebnisse an.

b) Prüfen Sie, ob mehr als 35 % der Koffer über dem Höchstgewicht lagen.

c) Ermitteln Sie, wie hoch die zusätzlichen Einnahmen der Fluggesellschaft sind.



4 Koordinatenform und Normalenvektor

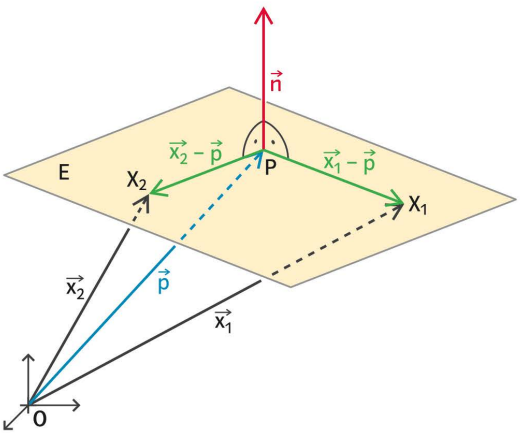
Emil behauptet: „Die Gleichung $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ beschreibt eine Ebene. Das kann man mithilfe der nebenstehenden Anleitung zeigen."
Untersuchen Sie, ob Emil recht hat.

1. Drei Punkte $(x_1|x_2|x_3)$ finden, die die Gleichung erfüllen.
2. Eine Gleichung der Ebene in Parameterform aufstellen.
3. Die Parameterform koordinatenweise notieren und das LGS so auflösen, dass es frei von Parametern ist.

Bisher wurde eine Ebene mithilfe eines Stützvektors $\vec{p}$ und zweier Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beschrieben. Man kann eine Ebene auch mithilfe eines Stützvektors $\vec{p}$ und eines Vektors $\vec{n}$, der orthogonal zur Ebene E ist, eindeutig beschreiben. So erhält man die Koordinaten- und die Normalenform einer Ebene. Sie haben im Vergleich zu der Parameterform den Vorteil, dass Berechnungen wie die Punktprobe schneller durchzuführen sind.

Einen Vektor $\vec{n}$, der orthogonal zu den Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Ebene E mit $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ ist, nennt man einen **Normalenvektor** der Ebene E.
Wenn $\vec{p}$ ein Stützvektor der Ebene und $\vec{x}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes X der Ebene sind, dann sind alle Differenzvektoren $\overrightarrow{PX} = \vec{x} - \vec{p}$ orthogonal zu $\vec{n}$.
Daher gilt $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ für alle Punkte X der Ebene E.
Diese Gleichung kann man umformen:

$(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ | ausmultiplizieren
$\vec{x} \circ \vec{n} - \vec{p} \circ \vec{n} = 0$ | $+ \vec{p} \circ \vec{n}$
$\vec{x} \circ \vec{n} = \vec{p} \circ \vec{n}$



Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ erhält man aus $\vec{x} \circ \vec{n} = \vec{p} \circ \vec{n}$ die Gleichung in **Koordinatenform** der Ebene E: $a x_1 + b x_2 + c x_3 = d$, wobei $d = \vec{p} \circ \vec{n}$ eine reelle Zahl ist.
Ist umgekehrt zum Beispiel $2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12$ eine Gleichung in Koordinatenform einer Ebene E, so ist der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E.

Eine Ebenengleichung in Koordinatenform angeben
Jede Ebene E mit einem Stützvektor $\vec{p}$ und einem Normalenvektor $\vec{n}$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{o}$ lässt sich durch eine Gleichung in **Koordinatenform** $\mathbf{a x_1 + b x_2 + c x_3 = d}$ angeben
$(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. a, b und c nennt man die Koeffizienten der Koordinatenform.

Für eine Ebene gibt es unendlich viele Gleichungen in Koordinatenform.

Da die Gleichung $a x_1 + b x_2 + c x_3 = d$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $d = \vec{p} \circ \vec{n}$ äquivalent zur Gleichung $(\vec{x} - \vec{p}) \circ n = 0$ ist, legt auch diese Gleichung die Ebene eindeutig fest.
Man nennt diese Form die **Normalenform** einer Ebene.

Eine Ebenengleichung in Normalenform angeben
Jede Ebene E lässt sich durch eine Gleichung in **Normalenform** $\mathbf{(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0}$ mit einem Stützvektor $\vec{p}$ und einem Normalenvektor $\vec{n}$ $(\neq \vec{o})$ beschreiben.

Für eine Ebene gibt es unendlich viele Gleichungen in Normalenform.

Normalenform aus Koordinatenform herleiten

Wenn man die Normalenform $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ zu $\vec{x} \circ \vec{n} = \vec{p} \circ \vec{n}$ umformt, kann man die Koordinatenform $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ herleiten (vgl. Seite 223).
Umgekehrt kann man aus einer Ebenengleichung in Koordinatenform $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ die Normalenform herleiten:

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene.

Einen Stützvektor $\vec{p}$ der Ebene erhält man, indem man zwei Koordinaten des Vektors $\vec{p}$ frei wählt, etwa $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$. Die Koordinate p_3 kann man dann aus der Koordinatenform ermitteln:
$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot p_3 = d$, also $p_3 = \frac{d}{c}$

Man erhält eine Normalenform der Ebene $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d}{c} \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ oder allgemein $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$.

Beispiel 1 Parameterform in Koordinatenform umformen

Gegeben ist die Gleichung der Ebene in Parameterform $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung von E in Koordinatenform.
b) Prüfen Sie, ob der Punkt $A(3|1|3)$ in der Ebene E liegt.

Lösung

a) Ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ muss zu den Spannvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal sein,

Der Normalenvektor kann auch mithilfe des Vektorprodukts ermittelt werden (siehe Seite 204).

also gilt $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$.

Hieraus erhält man das LGS

$$\begin{array}{lll} \text{I} & n_1 - n_2 = 0 & \mid + n_2 \\ \text{II} & n_1 - 3n_2 + 4n_3 = 0 & \end{array}$$

einsetzen von $n_1 = n_2$ in II:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & n_1 = n_2 & \\ \text{II}_a & n_2 - 3n_2 + 4n_3 = 0 & \mid + 2n_2 \quad \mid : 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} n_1 &= n_2 \\ 2n_3 &= n_2 \end{aligned}$$

Wählt man z. B. $n_2 = 2$, so erhält man $n_1 = 2$ und $n_3 = 1$ und damit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Somit ergibt sich als Koordinatengleichung $2x_1 + 2x_2 + x_3 = d$. Man berechnet d, indem man für x_1, x_2 und x_3 die Koordinaten des Stützvektors von E einsetzt: $2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 = 11 = d$.
Man erhält insgesamt die Koordinatenform für die Ebene $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$.

Weil ein Normalenvektor beliebig lang ist, kann man eine Koordinate frei wählen.

b) Die Koordinaten von A eingesetzt in E ergibt $2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 = 11$. Der Punkt A liegt in der Ebene E.

Beispiel 2 Eine Gleichung in Koordinatenform einer Ebene aus drei Punkten aufstellen

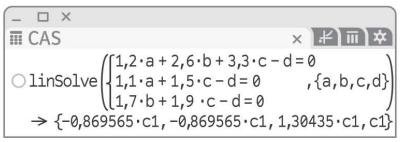
Die Punkte $A(1{,}2|2{,}6|3{,}3)$, $B(1{,}1|0|1{,}5)$ und $C(0|1{,}7|1{,}9)$ legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie mithilfe eines LGS eine Koordinatengleichung dieser Ebene E.

Lösung

Man setzt in die Koordinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ nacheinander die Koordinaten der Punkte A, B und C ein und erhält das folgende LGS:

$$\begin{aligned} 1{,}2a + 2{,}6b + 3{,}3c - d &= 0 \\ 1{,}1a + 1{,}5c - d &= 0 \\ 1{,}7b + 1{,}9c - d &= 0 \end{aligned}$$

Ein MMS liefert die folgende Lösung:



Wählt man $d = 1$, erhält man mit $d = c1 = 1$ gerundet $a \approx -0{,}87$, $b \approx -0{,}87$ und $c \approx 1{,}30$.
Man erhält die Koordinatengleichung $E: -0{,}87x_1 - 0{,}87x_2 + 1{,}3x_3 \approx 1$ als Näherungslösung.

Beispiel 3 **Die Koordinatenform einer Ebene in die Normalenform umformen**

Ermitteln Sie für die Ebene $E: 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12$ zwei Ebenengleichungen in Normalenform.

Lösung

Bestimmen eines Ortsvektors $\vec{p}$ eines Punktes der Ebene, indem man zwei Koordinaten frei wählt und dann die dritte berechnet:

Wählt man beispielsweise $x_1 = 6$ und $x_2 = 0$, ergibt sich mit $2 \cdot 6 + 0 + 3x_3 = 12$ für $x_3 = 0$.

Wählt man beispielsweise $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, ergibt sich mit $0 + 0 + 3x_3 = 12$ für $x_3 = 4$.

Damit sind $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ jeweils Ortsvektoren der Ebene.

Die Koeffizienten 2, 5 und 3 der Koordinatenform $2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12$ sind die Koordinaten eines Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Zwei Ebenengleichungen in Normalenform sind $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ und $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$.

Aufgaben

○ **1** Die Punkte A, B und C legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

Lerntipp Seite 224, Beispiel 1a)

a) A(1|1|1), B(1|0|1), C(0|1|1)
b) A(−1|2|0), B(−3|1|1), C(1|−1|−1)
c) A(2|0|3), B(3|1|1), C(1|0|0)
d) A(4|−2|1), B(0|1|0), C(−1|2|2)

○ **2** Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.

Lerntipp Seite 224, Beispiel 2

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$
c) $E: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
d) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

○ **3** Gegeben ist eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform mit $E: x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$. Prüfen Sie, ob der Punkt in der Ebene E liegt.

Lerntipp Seite 224, Beispiel 1b)

a) D(−7|1|3) b) H(2|4|2) c) F(3|2|1) d) G(−2|2|2)

○ **4** Bestimmen Sie für die Ebene E eine Ebenengleichung in Normalenform.

Lerntipp Seite 225, Beispiel 3

a) $E: 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10$ b) $E: 4x_2 - 5x_3 = 11$ c) $E: x_2 = -5$

○ **5** Bestimmen Sie für die Ebene E eine Ebenengleichung in Koordinatenform.

a) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ b) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ c) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Test 1

Lösungen, Seite 487

○ **6** Die Ebene E ist durch die Punkte A, B und C festgelegt.

a) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung der Ebene E in Parameterform und in Koordinatenform.
b) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung der Ebene E in Normalenform.
(1) A(0|2|−1), B(6|−5|0), C(1|0|1) (2) A(7|2|−1), B(4|1|3), C(1|3|2)

○ **7** Gegeben sind ein Punkt P und eine Ebene E.

(1) P(1|2|−1); $E: x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$ (2) P(0|−5|−3); $E: 7x_1 - x_2 = 5$

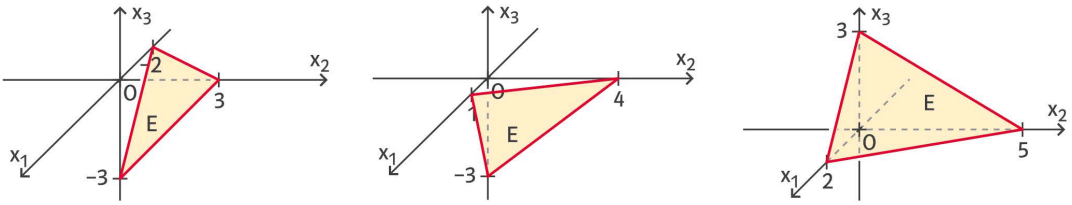
a) Untersuchen Sie, ob der Punkt P in der Ebene E liegt.
b) Bestimmen Sie jeweils eine Ebenengleichung der Ebene E in Normalenform.

8 Geben Sie für die Ebene E jeweils eine Gleichung in Normalen- und Koordinatenform an.

a) E ist die x_1x_2-Ebene.
b) E ist die x_2x_3-Ebene.
c) Die Ebene E ist parallel zur x_1x_3-Ebene und enthält den Punkt $P(1|-2|4)$.
d) Die Ebene E ist parallel zur x_2x_3-Ebene und hat vom Ursprung den Abstand 3 LE.

9 Das abgebildete Dreieck liegt in der Ebene E. Schätzen Sie, ob auch der Punkt P in der Ebene E liegt. Kontrollieren Sie Ihre Schätzung im Anschluss rechnerisch.

a) $P(1|5|0)$
b) $P(4|4|-1)$
c) $P(-2|-2|3)$



10 Max und Sue zeichnen die Ebene E. Max bestimmt dazu zunächst die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Sue skizziert dazu zunächst einen Normalenvektor. Veranschaulichen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem nach den Verfahren von Max und Sue. Visualisieren Sie die Ebenen anschließend mithilfe eines MMS und kontrollieren Sie so Ihre Lösungen.

a) $E: x_1 + x_2 + x_3 = 3$
b) $E: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$
c) $E: -1x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -6$

D1 **MMS-Anleitung** 3D-Darstellung von Ebenen

11 Gegeben sind die Ebenengleichungen $E_1: 3x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 9$, $E_2: x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3$ und $E_3: -2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -6$ in Koordinatenform.

a) Prüfen Sie, ob die drei Gleichungen verschiedene oder identische Ebenen beschreiben.
b) Veranschaulichen Sie die Ebenen in einem Koordinatensystem.

12 Zeichnen Sie die Ebene. Erklären Sie, wie man an der Koordinatengleichung die Lage der Ebene erkennen kann.

a) $E: x_1 = 0$
b) $E: x_2 = 0$
c) $E: x_3 = 0$
d) $E: x_1 = 5$
e) $E: 5x_1 = 10$
f) $E: x_2 = -3$
g) $E: x_3 = 4$
h) $E: x_1 + x_3 = 0$
i) $E: x_2 + x_3 = -4$

Test 2

Lösungen, Seite 488

13 Veranschaulichen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem.

a) $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
b) $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$

14 Beschreiben Sie, wie die Ebenen der Ebenenschar E_a im Koordinatensystem liegen.

a) $E_a: 5x_2 = a$
b) $E_a: -x_1 = a$
c) $E_a: 3x_3 = a$

15 Gegeben ist die Ebenenschar $E_a: 3ax_1 + 2ax_2 - 5x_3 = 10a$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie, für welchen Wert von a der Punkt $P(1|1|3)$ in der Ebene E_a liegt.
b) Geben Sie für $a = 2$, $a = -1$ und $a = 5$ jeweils einen Normalenvektor von E_a an.
c) Bestimmen Sie, für welchen Wert von a die Ebene E_a parallel zur x_1x_2-Ebene ist.

Grundwissen Test — Mittelwerte berechnen

Grundwissen, Seite 422
Lösungen, Seite 488

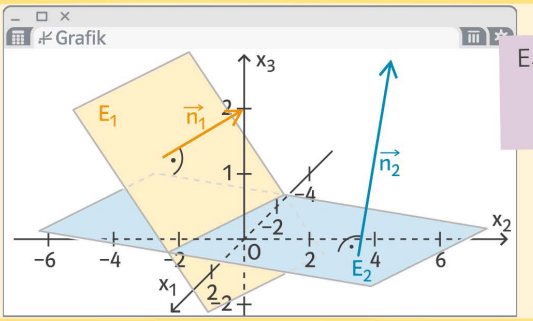
G **16** Gegeben ist die Notenverteilung einer Klausur.

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	2	5	10	7	3	1

a) Berechnen Sie zu dieser Klausur das arithmetische Mittel und den Median.
b) Duran behauptet: „Wenn alle, die eine bessere Note als 3 geschrieben haben, ebenfalls die Note 3 bekommen, dann hätte sich der Durchschnitt um mehr als 0,5 verschlechtert, der Median wäre aber unverändert geblieben." Prüfen Sie diese Aussage.

5 Schnittwinkel und Schnittpunkte

Suzan behauptet: „Den Winkel zwischen zwei gegebenen Ebenen kann man ganz leicht bestimmen, wie man mithilfe der Abbildung erkennt."
Entwickeln Sie ein entsprechendes Verfahren, und bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2.



$E_1: 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 14$
und
$E_2: 1x_2 + 6x_3 = 4$

I10 **interaktive Anwendung** Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen

Wie man den Schnittwinkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden bestimmt, ist bereits bekannt. Die Bestimmung des Schnittwinkels zwischen einer Ebene und einer Geraden, die die Ebene schneidet, oder zwischen zwei sich schneidenden Ebenen kann man auf die Berechnung des Winkels zwischen zwei geeigneten Vektoren zurückführen.

Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen

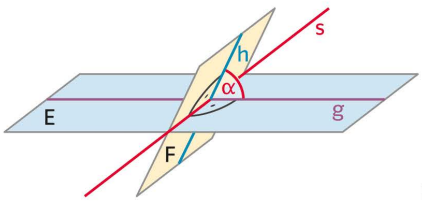


Fig. 1

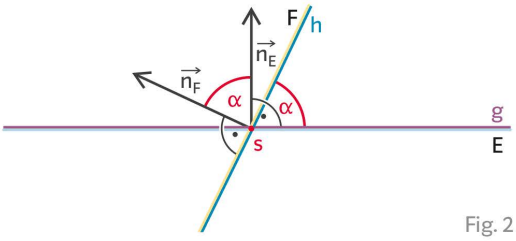


Fig. 2

Unter dem Schnittwinkel α zweier Ebenen E und F versteht man den Schnittwinkel zweier Geraden g und h, die in E bzw. F liegen, orthogonal zur Schnittgeraden s der beiden Ebenen sind und sich in einem Punkt der Schnittgeraden schneiden (Fig. 1). Dieser Winkel α ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$ der Ebenen E und F in Fig. 2. Deshalb kann man den Schnittwinkel α der Ebenen E und F mit der Formel $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \circ \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$ berechnen.

Erinnerung:
Die Betragsstriche im Zähler der Formeln stellen sicher, dass $\cos(\alpha) \geq 0$ und damit $0° \leq \alpha \leq 90°$ ist.

Schnittwinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

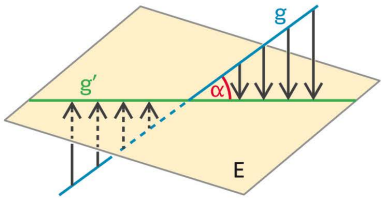


Fig. 3

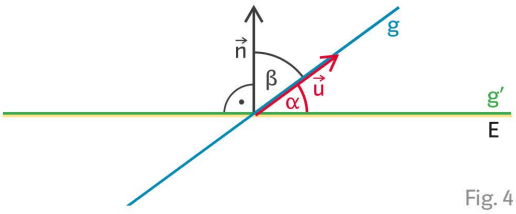


Fig. 4

Fällt man von jedem Punkt einer Geraden g das Lot, also eine Senkrechte auf die Ebene E, so erhält man in E eine Gerade g' (wenn g nicht orthogonal zu E liegt). Unter dem Schnittwinkel α der Geraden g und der Ebene E versteht man den Winkel zwischen den Geraden g und g' (Fig. 3). Man positioniert einen Normalenvektor $\vec{n}$ so auf der Ebene E, dass die Geraden g und g' sowie der Normalenvektor $\vec{n}$ in einer Ebene liegen (Fig. 4).
Da der Normalenvektor $\vec{n}$ orthogonal zu g' liegt, gilt $\beta = 90° - \alpha$.
Damit gilt $\cos(\beta) = \cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$.
Fig. 5 kann man die Gleichung $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$ entnehmen.
Es folgt $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$.

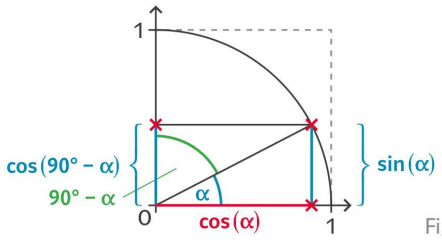


Fig. 5

Schnittwinkel bei sich schneidenden Geraden und Ebenen

Haben die Geraden g_1 und g_2 die Richtungsvektoren $\vec{u_1}$ und $\vec{u_2}$, und die Ebenen E_1 und E_2 die Normalenvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$, so gilt für den **Schnittwinkel** α jeweils mit $0° < \alpha \leq 90°$

- der Geraden g_1 und g_2: $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{u_1} \circ \vec{u_2}|}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{u_2}|}$.
- der Ebenen E_1 und E_2: $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{n_1} \circ \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$.
- der Geraden g_1 und der Ebene E_1: $\sin(\alpha) = \dfrac{|\vec{u_1} \circ \vec{n_1}|}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{n_1}|}$ bzw. $\cos(90° - \alpha) = \dfrac{|\vec{u_1} \circ \vec{n_1}|}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{n_1}|}$.

Faustregel
Man verwendet den Kosinus bei gleichen Objekten und den Sinus bei verschiedenen Objekten.

Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene

Wenn eine Gerade g eine Ebene E schneidet, kann man den **Durchstoßpunkt** je nach gegebener Darstellungsform auf unterschiedliche Weise ermitteln.

1. Fall: Die Gerade und die Ebene sind in der Parameterform angegeben.
Durch Gleichsetzen der beiden Parameterdarstellungen erhält man ein LGS. Die Lösung liefert die Werte für die Parameter, mit denen man den Durchstoßpunkt ermitteln kann.

2. Fall: Die Gerade ist in Parameter- und die Ebene in Koordinatenform angegeben.
Die allgemeinen Koordinaten aus der Geradengleichung werden koordinatenweise in die Koordinatenform der Ebene eingesetzt. Die Lösung der Gleichung liefert den Wert für den Parameter, mit dem man den Durchstoßpunkt ermitteln kann.

Beispiel 1 **Schnittwinkel berechnen**

D1 MMS-Anleitung Schnittwinkel

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie die Ebenen $E_1: 2x_1 + x_2 - x_3 = 12$ und $E_2: -3x_1 + x_2 + x_3 = 7$. Die Gerade g und die Ebene E_1 sowie die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich.

a) Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden g und der Ebene E_1.

b) Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebenen E_1 und E_2.

Lösung

Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergeben sich die folgenden Rechnungen:

a) $\sin(\alpha) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}$

$= \dfrac{|2 + 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}}$

Somit ist $\alpha \approx 19{,}1°$.

b) $\cos(\alpha) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$

$= \dfrac{|-6 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}}$

Somit ist $\alpha \approx 42{,}4°$.

Beispiel 2 **Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene berechnen**

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der Ebene $E: -x_1 + x_3 = 2$.

Lösung

Um den gemeinsamen Punkt zu ermitteln, setzt man die Geradengleichung koordinatenweise in die Koordinatengleichung der Ebene ein und löst nach dem Parameter t auf.

$-(1 + 2t) + (1 + 3t) = 2$

$t = 2$

Einsetzen von $t = 2$ in g ergibt den Ortsvektor des Durchstoßpunktes: $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Der Durchstoßpunkt der Geraden g durch die Ebene E ist $D(5|2|7)$.

Aufgaben

1 Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich. Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels.

a) $E_1: 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $E_2: x_1 - 3x_3 = 5$
b) $E_1: x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $E_2: x_1 - x_2 + 7x_3 = 0$
c) $E_1: 3x_1 + 5x_2 = 0$, $E_2: 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 13$
d) $E_1: x_2 = 3$, $E_2: x_1 = 5$

Lerntipp Seite 228, Beispiel 1b)

2 Die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und die Ebene E schneiden sich. Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels.

a) $E: 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 7$
b) $E: x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$
c) $E: 6x_1 - 2x_2 = 8$
d) $E: 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12$

Lerntipp Seite 228, Beispiel 1a)

3 a) Die Ebene E mit der Koordinatengleichung $E: 2x_1 + x_3 = -4$ schneidet die x_3-Achse. Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen der Ebene E und der x_3-Achse.

b) Die Gerade g schneidet die drei Koordinatenebenen. Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ mit der x_1x_2-Ebene und der x_2x_3-Ebene.

4 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ und der Ebene E. Führen Sie anschließend eine Probe durch.

a) $E: x_1 - x_2 + x_3 = 3$
b) $E: 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7$
c) $E: -x_2 + 2x_3 = 12$
d) $E: x_1 - x_3 = 6$

Lerntipp Seite 228, Beispiel 2

Test 1

Lösungen, Seite 488

5 Gegeben sind die Ebenen $E_1: x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7$ und $E_2: x_2 + x_3 = 0$ sowie die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Die Gerade g schneidet sowohl die Ebene E_1 als auch die Ebene E_2.

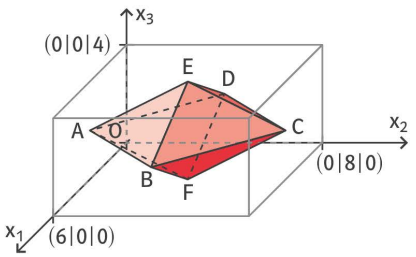
a) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden g mit der Ebene E_1 bzw. E_2.
b) Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich. Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen den Ebenen E_1 und E_2.

6 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ mit der Ebene E. Führen Sie anschließend eine Probe durch.

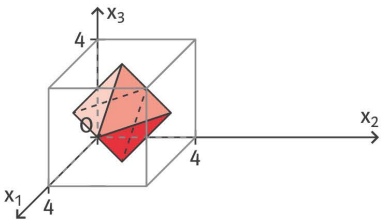
a) $E: 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8$
b) $E: x_2 - 4x_3 = 14$

7 In dem abgebildeten Quader sind die Mittelpunkte der Seitenflächen miteinander verbunden, sodass eine Doppelpyramide entsteht. Berechnen Sie die Größe der Winkel

a) zwischen der Kante $\overline{AE}$ und der Grundfläche ABCD,
b) zwischen der Seitenfläche ABE und der Grundfläche ABCD.



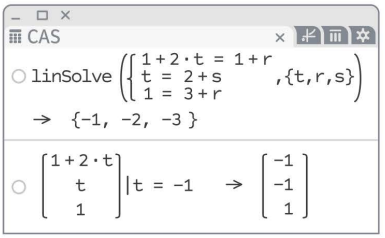
8 Bei dem abgebildeten Oktaeder sind die Winkel zwischen zwei benachbarten Flächen alle gleich groß. Der Winkel beträgt ca. 109,47°. Entwickeln Sie ein Verfahren, um diese Behauptung zu bestätigen und führen Sie dieses durch.



9 Susanne hat folgende Lösung einer Aufgabe notiert.

Ansatz: $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Mithilfe eines MMS habe ich zu dem dazugehörigen LGS die Lösung $t = -1$ erhalten und damit den Durchstoßpunkt D berechnet: $D(-1|-1|1)$.



a) Notieren Sie zu der abgebildeten Lösung eine mögliche Aufgabenstellung und begründen Sie Ihren Vorschlag.

b) Formulieren Sie drei eigene Aufgaben wie in Teilaufgabe a). Ermitteln Sie eine Lösung und stellen Sie sich Ihre Aufgaben anschließend gegenseitig.

Test 2

Lösungen, Seite 488

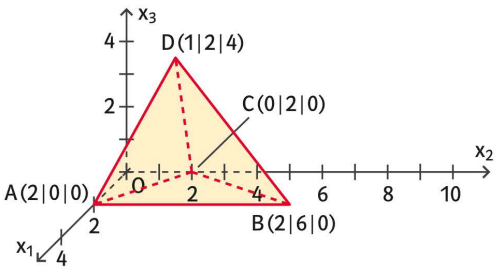
10 Bestimmen Sie für die dreiseitige Pyramide

a) die Größe des Winkels zwischen der Kante $\overline{AD}$ und der Dreiecksfläche ABC,

b) die Größe des Winkels zwischen der Kante $\overline{BC}$ und der Dreiecksfläche ABD,

c) die Größe des Winkels zwischen den Dreiecksflächen ABC und ABD,

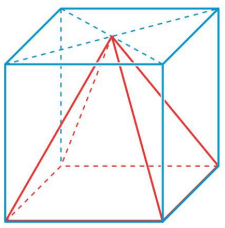
d) die Größe des Winkels zwischen den Dreiecksflächen ABD und BCD.



11 Dem Würfel ist eine gerade Pyramide einbeschrieben.

a) Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche der Pyramide.

b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels benachbarter Seitenflächen der Pyramide.



12 a) Eine Ebene $E: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d$ soll durch den Koordinatenursprung gehen und mit den drei Koordinatenebenen jeweils den gleichen Winkel einschließen. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1, a_2 und a_3 sowie d. Berechnen Sie auch die Größe des Winkels.

b) Bestimmen Sie alle Ebenen, die mit der Ebene $E: 3x_1 + 4x_3 = 0$ die Punkte $A(0|0|0)$ und $B(4|0|-3)$ gemeinsam haben und die Ebene E unter einem Winkel von 30° schneiden.

c) Bestimmen Sie c so, dass der Winkel zwischen der x_1x_2-Ebene und der Geraden g mit $\vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\c\end{pmatrix}$ eine Größe von 45° hat.

d) Betrachten Sie alle Ursprungsgeraden, die mit der x_1x_2-Ebene einen Winkel von 45° bilden. Beschreiben Sie die Lage der Schnittpunkte der Geraden mit der Ebene $E: x_3 = 5$.

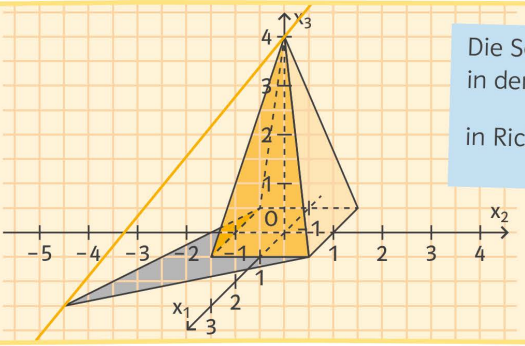
Grundwissen Test — Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Grundwissen, Seite 422
Lösungen, Seite 489

G **13** Die zwei Glücksräder werden gleichzeitig gedreht. Betrachtet wird die Summe der Ziffern. Stellen Sie die Situation in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm dar und erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Summe der Ziffern.

6 Geometrische Objekte im Raum

Die Abbildung zeigt modellhaft einen Schattenwurf einer Pyramide. Dabei verlaufen die Sonnenstrahlen annähernd parallel. Entwickeln Sie ein Verfahren, wie man den Schattenpunkt der Spitze der Pyramide mithilfe von Vektoren bestimmen kann.



Die Sonnenstrahlen verlaufen in der betrachteten Situation in Richtung $\vec{v}_{Sonne} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

I11 **interaktive Anwendung** Schattenwurf einer Pyramide

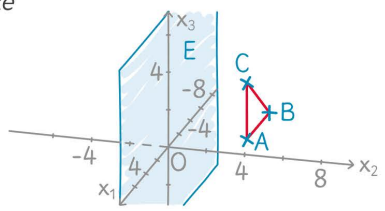
Mithilfe von Geraden- und Ebenengleichungen kann man Problemstellungen zu geometrischen Objekten und anderen Sachzusammenhängen bearbeiten. Im Folgenden wird an zwei verschiedenen Fragestellungen exemplarisch gezeigt, in welchen Schritten man vorgehen und wie man gezielt bekannte Rechenstrategien nutzen kann.

Problem 1: Durch die Spiegelung eines Dreiecks an einer Koordinatenebene entsteht ein Körper, dessen Volumen ermittelt werden soll

Das abgebildete Dreieck ABC mit den Punkten $A(3|5|2)$, $B(-1|5|2)$ und $C(3|5|5)$ soll an der x_1x_3-Ebene gespiegelt werden. Die Punkte werden mit ihren jeweiligen Bildpunkten verbunden. Von dem entstehenden Körper soll das Volumen ermittelt werden.

1. Schritt: Verstehen der Aufgabe – Anfertigen einer Skizze

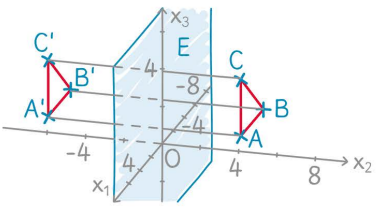
Es wird an der x_1x_3-Ebene (blau schraffiert) gespiegelt. Dabei wechselt die x_2-Koordinate beim Bildpunkt P′ gegenüber P das Vorzeichen, weil die x_2-Achse senkrecht zur Spiegelebene verläuft. Die anderen beiden Koordinaten ändern sich nicht.



2. Schritt: Zerlegen in Teilprobleme

Es ist sinnvoll zunächst zu überlegen, welche bekannten Rechenfertigkeiten nützlich sein können:

- Um das Dreieck an der x_1x_3-Ebene zu spiegeln, muss man die einzelnen Punkte an der x_1x_3-Ebene spiegeln und die Bildpunkte verbinden.
- Wenn ein Punkt P an einer Koordinatenebene gespiegelt werden soll, sucht man analog zur Spiegelung an einer Geraden den Bildpunkt P′, sodass die Verbindungslinie $\overline{PP'}$ orthogonal zur Spiegelebene verläuft, und beide Punkte den gleichen Abstand zur Spiegelebene haben. Wenn man einen Punkt nun an der x_1x_3-Ebene spiegelt, sind beide Bedingungen erfüllt, wenn beim Bildpunkt die x_1-Koordinate und die x_3-Koordinate gleich bleiben, und die x_2-Koordinate das Vorzeichen wechselt.
- Wenn man die Punkte mit den Bildpunkten verbindet, entsteht wie dargestellt ein Dreicksprisma. Sein Volumen ist $V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g \cdot h_{Prisma}$, wobei g die Grundseite und h_g die Höhe des Dreiecks sind und h_{Prisma} die Höhe des Prismas ist.



Damit erhält man folgenden Rechenplan:

1. Bestimmung der Bildpunkte A′, B′ und C′, die aus der Spiegelung an der x_1x_3-Ebene entstehen.
2. Bestimmung des Flächeninhalts der Dreiecksfläche.
3. Bestimmung des Volumens des Dreiecksprismas.

3. Schritt: Durchführung des Rechenweges

1. Mit der Überlegung, dass beim Spiegeln an der x_1x_3-Ebene beim Bildpunkt die x_1-Koordinate und die x_3-Koordinate gleich bleiben und die x_2-Koordinate das Vorzeichen wechselt, ergeben sich die Bildpunkte $A'(3|-5|2)$, $B'(-1|-5|2)$ und $C'(3|-5|5)$.
2. Da $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} = 0$ gilt, sind die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ orthogonal und das Dreieck ist rechtwinklig. Es ist $|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3 = g$ und $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16} = 4 = h_g$.
3. Die Höhe des Prismas entspricht $|\overrightarrow{AA'}| = \left|\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{100} = 10$.

Somit ist das Volumen $V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10 = 60$.

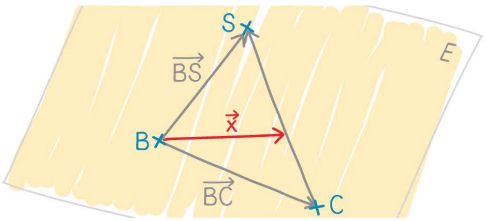
4. Schritt: Rückschau und Antwort

Das entstandene Dreieckspisma hat ein Volumen von 60 Volumeneinheiten.

Problem 2: Ein Dreieck soll mit einer Ebenengleichung beschrieben werden

Drei Punkte B, C und S liegen in einer Ebene E und bilden das Dreieck BCS. Das Flächenstück des Dreiecks BCS soll allgemein mit einer Ebenengleichung dargestellt werden, sodass nur das Flächenstück beschrieben wird.

1. Schritt: Verstehen der Aufgabe – Anfertigen einer Skizze



- Es sind drei Punkte gegeben, die ein Dreieck bilden und in einer Ebene liegen.
- Eine Ebenengleichung beschreibt eine unendliche Ebene. Wenn nur das Flächenstück des Dreiecks dargestellt werden soll, muss man die Parameter der Ebenengleichung einschränken.

2. Schritt: Zerlegen in Teilprobleme

Es ist sinnvoll zunächst zu überlegen, welche bekannten Rechenfertigkeiten nützlich sein können:

- Für die Ebene, in der die drei Punkte B, C und S liegen, kann eine Ebenengleichung in Parameterform aufgestellt werden, wobei z. B. der Ortsvektor von B als Stützvektor gewählt wird.
- Wenn man die Punktmenge der Dreiecksfläche ausgehend vom Punkt B aufspannt, wird sie durch die Strecke $\overline{CS}$ begrenzt. Wenn man die Punkte der Strecke $\overline{CS}$ mit einer Linearkombination darstellt, erhält man eine neue mathematische Beziehung, mit der man gegebenenfalls weiterarbeiten kann.

Damit erhält man folgenden Rechenplan:

1. Bestimmung einer Gleichung der Ebene, die die Punkte B, C und S enthält.
2. Aufstellen einer Linearkombination für die Punkte der Strecke $\overline{CS}$, um damit weiterzuarbeiten.

3. Schritt: Durchführung des Rechenweges

1. Für die Ebene gilt $E: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BS}$.
2. Für die Punkte der Strecke $\overline{CS}$ gilt weiter:
   $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + t \cdot (\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OB} + (1 - t) \cdot \overrightarrow{BC} + t \cdot \overrightarrow{BS}$ mit $0 \le t \le 1$
   Durch den Vergleich mit $E: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BS}$ ergibt sich $1 - t = r$ und $t = s$, also $r + s = 1$.
   Für die Punkte im Dreieck gilt dann zusätzlich $r + s \le 1$ mit $r \ge 0$ und $s \ge 0$.

4. Schritt: Rückschau und Antwort

Das Flächenstück eines Dreiecks BCS kann allgemein mit der Ebenengleichung in Parameterform $E: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BS}$ mit $r \ge 0$, $s \ge 0$ und $r + s \le 1$ dargestellt werden.

Untersuchung geometrischer Objekte im Raum
Beim Lösen komplexer geometrischer Probleme ist es sinnvoll, die folgenden Schritte mit Beachtung ihrer Unterpunkte systematisch zu bearbeiten.

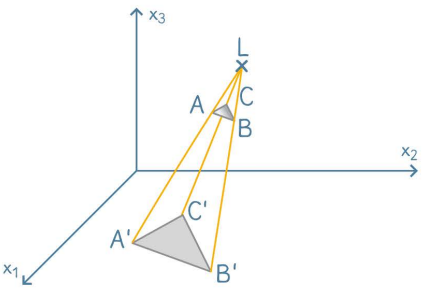
1	2	3	4
Verstehen der Aufgabe	**Zerlegen in Teilprobleme**	**Durchführen des Rechenweges**	**Rückschau und Antwort**
Was ist gesucht? Was ist gegeben und wichtig? Wie kann man die Situation skizzieren (auch mit digitalen Hilfsmitteln)?	Rechenweg planen: Welche bekannten geometrischen Beziehungen oder Rechenstrategien kann man nutzen (auch digitale Hilfsmittel)?	Geraden bzw. Ebenen in Parameter- oder Koordinatenform angeben; Längen, Schnittpunkte oder Schnittwinkel berechnen.	Ist das Ergebnis plausibel? Ist das Problem vollständig gelöst? Wie lautet eine sinnvolle Antwort?

Beispiel **Die Lage des Schattens eines Objektes bestimmen**
Ein Dreieck aus Metall wird in einem Raum so positioniert, dass es die Eckpunkte $A(4|2|3)$, $B(4|4|3)$ und $C(5|3|4)$ hat. Von einer annähernd punktförmigen Lichtquelle in der Position $L(8|5|6)$ wird das Dreieck angestrahlt und produziert einen Schatten auf dem Boden in der x_1x_2-Ebene. Bestimmen Sie die Eckpunkte des Schattens.

Lösung

1. Schritt: Verstehen der Aufgabe

- gesucht: Die Eckpunkte des Schattens, der durch das Licht vom Dreieck ABC am Boden erzeugt wird.
- gegeben: (1) Die Positionen der Lichtquelle und des Dreiecks aus Metall sind bekannt.
  (2) Die Lichtstrahlen strahlen ausgehend von einer punktförmigen Lichtquelle auf den Boden, wo der Schatten erzeugt wird.



2. Schritt: Zerlegen inTeilprobleme

- Die Schattenpunkte der Eckpunkte des Dreiecks erhält man als Schnittpunkte der Strahlen, die jeweils durch L und die Eckpunkte A, B, C verlaufen und dem Boden.
- Dazu muss man für die drei Geraden, die die Strahlen modellieren, mit $\overrightarrow{OL}$ als Stützvektor und den jeweiligen Richtungsvektoren $\overrightarrow{LA}$, $\overrightarrow{LB}$ und $\overrightarrow{LC}$ Geradengleichungen aufstellen.
- Die Schattenpunkte auf dem Boden haben als x_3-Koordinate den Wert 0, da der Boden in der x_1x_2-Ebene liegt. Es muss also $x_3 = 0$ gelten.

3. Schritt: Durchführen des Rechenweges

- *Aufstellen der Geradengleichungen für die Strahlen durch die Eckpunkte A, B und C:*

$$l_A: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\5\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\-3\\-3\end{pmatrix}, \qquad l_B: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\5\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\-3\end{pmatrix}, \qquad l_C: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\5\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

- *Bei allen Geraden muss die x_3-Koordinate 0 sein:*
  $6 - 3t = 0$, also ist $t = 2$; $\quad 6 - 3s = 0$, also ist $s = 2$ und $\quad 6 - 2r = 0$, also ist $r = 3$.
- *Für die Schnittpunkte der Geraden mit dem Boden, der x_1x_2-Ebene gilt demnach:*

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix}8\\5\\6\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-4\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix}8\\5\\6\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix}8\\5\\6\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}-3\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

4. Schritt: Rückschau und Antwort

Die Eckpunkte des Schattens sind $A'(0|-1|0)$, $B'(0|3|0)$ und $C'(-1|-1|0)$. Man erkennt an den Koordinaten, dass das Schattendreieck A'B'C' größer ist als das Dreieck ABC, was aufgrund der punktförmigen Lichtquelle sinnvoll erscheint, wie man an obiger Skizze erkennt.

Aufgaben

○ **1** Ein Turm hat die Form eines Quaders mit aufgesetzter Pyramide und steht auf dem Boden (x_1x_2-Ebene). Die Eckpunkte des Quaders sind $A(2|0|0)$, $B(0|2|0)$, $C(-2|0|0)$, $D(0|-2|0)$, $E(2|0|6)$, $F(0|2|6)$, $G(-2|0|6)$ und $H(0|-2|6)$. Die Spitze des Turms liegt in $S(0|0|12)$.

→ **Lerntipp** Seite 233, Beispiel

a) Nachts strahlt ein annähernd punktförmig strahlender Scheinwerfer, dessen Zentrum im Punkt $L(-1|-4|18)$ liegt, den Turm an. Bestimmen Sie den nächtlichen Schattenpunkt der Turmspitze auf dem Boden. Erstellen Sie auch eine Zeichnung zur Situation.

b) Mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ fallen tagsüber annähernd parallele Sonnenstrahlen auf den Turm. Bestimmen Sie die Eckpunkte des Schattens des Turms auf dem Boden.

○ **2** Ordnen Sie je einen Punkt und seinen Spiegelpunkt sowie die dazugehörige Spiegelebene zu. Die Spiegelebenen können mehrfach verwendet werden.

$A(1\|3\|5)$	$B(-1\|3\|5)$	$C(1\|-3\|5)$	$D(1\|3\|-5)$	$E(-1\|3\|-5)$	$F(-1\|-3\|5)$
$G(1\|-3\|-5)$	$H(-1\|-3\|-5)$	$I(0\|0\|0)$	x_1x_2-Ebene	x_2x_3-Ebene	x_1x_3-Ebene

○ **3** Die Punkte $A(3|2|4)$, $B(3|-2|0)$, $C(3|-4|-5)$ und $D(3|0|-1)$ bilden ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 12 FE.

a) Spiegeln Sie das Parallelogramm ABCD an der x_2x_3-Ebene, geben Sie die Bildpunkte an und bestimmen Sie das Volumen vom Viereckprisma ABCDA'B'C'D'.

b) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E_{ABCD} in Parameterform auf.

■ c) Geben Sie Bedingungen für die Parameter an, sodass mit der Gleichung aus Teilaufgabe b) nur die Fläche des Parallelogramms ABCD beschrieben wird.

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 489

○ **4** Jan erstellt ein Koordinatensystem, in dem der Bodenpunkt des Fernsehturms von Münster in $P(12|4|0)$ und die Spitze in $S(12|4|230)$ liegt.
Bestimmen Sie die Eckpunkte des Schattens des Fernsehturms, wenn die Sonnenstrahlen annähernd parallel aus der Richtung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ kommen. Die Angaben sind jeweils in m. Gehen Sie davon aus, dass der Schatten in der x_1x_2-Ebene (Boden) liegt.

○ **5** Die drei Punkte $A(2|4|5)$, $B(4|-1|0)$ und $C(-1|0|-2)$ bilden das Dreieck ABC.

a) Spiegeln Sie das Dreieck ABC an der x_1x_2-Ebene und geben Sie die Bildpunkte an.

b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E_{ABC} in Parameterform an.

■ c) Geben Sie Bedingungen für die Parameter an, sodass mit der Gleichung aus Teilaufgabe b) nur die Fläche des Dreiecks ABC beschrieben wird.

◒ **6** Gegeben sind der Punkt $P(2|3|4)$ und die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie die Punkte Q, R und S für ein Parallelogramm PQRS an, das den Eckpunkt P hat und dessen Seiten mithilfe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugt werden.

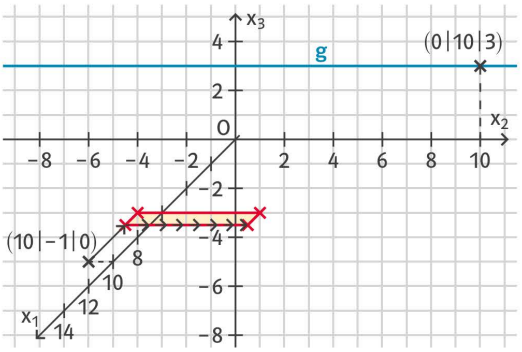
■ b) Geben Sie von der Ebene E mit dem Stützvektor $\overrightarrow{OP}$ und den Spannvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Ebenengleichung in Parameterform an. Ermitteln Sie, welche Werte die Parameter annehmen dürfen, damit die Fläche des Parallelogramms beschrieben wird.

◒ **7** Gegeben sind die Ebenen $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

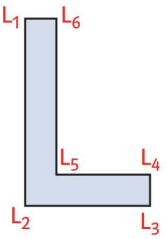
Untersuchen Sie, welche in der Ebene liegende Figur durch die Bedingung beschrieben wird.

a) $0 \le r \le 1$ und $0 \le s \le 1$ b) $0 \le r \le 1$ und $0 \le s \le 4$ c) $0 \le r + s \le 1$

8 Ein Flugzeug fliegt annähernd geradlinig entlang der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei t die Minuten nach dem Start angibt und 1 Längeneinheit 1 km entspricht. Für $3 \le r \le 4$ und $0 \le s \le 5$ wird ein Vogelschutzgebiet durch $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschrieben. Prüfen Sie, ob das Flugzeug über das Vogelschutzgebiet fliegt.



9 In Fußballstadien werden zweidimensionale Werbeteppiche eingesetzt, die aus Sicht der Kamera als dreidimensionales Objekt erscheinen. Diese „Cam Carpets" stellen demnach die auf den Boden projizierten Schattenbilder von senkrecht stehenden Buchstaben dar.
Ein senkrecht stehender Buchstabe „L" hat die Eckpunkte $L_1(0|0|6)$, $L_2(0|0|0)$, $L_3(4|0|0)$, $L_4(4|0|1)$, $L_5(1|0|1)$ und $L_6(1|0|6)$. Skizzieren Sie den „Cam Carpet" des Buchstabens „L", wenn die Kamera im Punkt $K(24|-24|30)$ befestigt wird.



Test 2

Lösungen, Seite 490

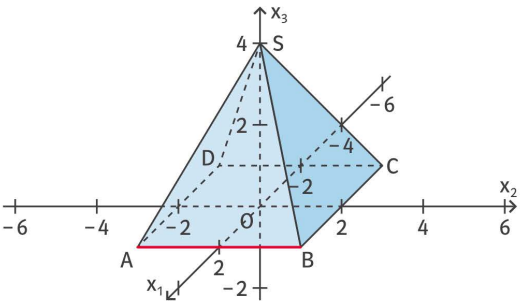
10 Eine Sonnenuhr soll geeicht werden. Ihr Zeiger liegt im Parameterbereich $-1 \le t \le 2$ auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Das Ziffernfeld liegt in der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Um 12 Uhr fallen die Lichtstrahlen längs des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein.
Bestimmen Sie, wo die Marke für 12 Uhr angebracht werden muss.

11 Gegeben ist die Ebenenschar $E_t: tx_1 + x_3 = 2t;\ t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Kante $\overline{AB}$ der Pyramide in allen Ebenen der Schar E_t liegt.

b) Ermitteln Sie, für welche Werte von t die Ebene E_t durch die Pyramide verläuft.

c) Beschreiben Sie ein Verfahren, wie man die Ebene E_t ermitteln kann, die die Kante $\overline{CS}$ halbiert. Ermitteln Sie dieses t.



Grundwissen Test — Wahrscheinlichkeiten berechnen

Grundwissen, Seite 422
Lösungen, Seite 490

G **12** Von zwei von außen gleichen Würfeln weiß man, dass einer „gezinkt" ist. Bei diesem „gezinkten" Würfel würfelt man die Sechs (= Treffer) mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 %. Der andere Würfel ist „fair", bei ihm sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich.
Bestimmen Sie für jeden der Würfel die Wahrscheinlichkeit für drei Treffer, wenn man dreimal würfelt.

Der Gauß-Algorithmus

→ Lösungen, Seite 490

1 **a)** Bestimmen Sie die Lösungsmenge.
b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe eines MMS.

(1) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$ (2) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$ (3) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

(4) $\begin{aligned} 1x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$ (5) $\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -19x_1 - x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$ (6) $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

2 Ein LGS wurde in die Matrixschreibweise überführt. Berechnen Sie die Lösungsmenge und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis anschließend mithilfe eines MMS.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & -9 & 1 \\ 1{,}5 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right)$ **b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & -7 \\ -6 & 4 & 9 & -5 \\ 5 & -2 & -8 & -3{,}5 \end{array}\right)$ **c)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$

Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

3 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des angegebenen LGS. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis anschließend mithilfe eines MMS.

a) $\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 9 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -6 \\ 6x_1 + x_2 - 2x_3 &= -3 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 2\cdot(x_1 - 2x_2) &= 3 - 5x_3 \\ 3\cdot(x_1 + x_2) - 13 &= -7x_3 \\ 3x_3 - 1 &= 2\cdot(2x_1 - x_2) \end{aligned}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 10 \\ 5 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \end{array}\right)$ **e)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$ **f)** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{array}\right)$

4 Ein lineares Gleichungssystem hat die Lösungsmenge $L = \{(3t; 5 - 2t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Prüfen Sie, ob das Zahlentripel Lösung des linearen Gleichungssystems ist.

a) (3; 3; 1) **b)** (9; 11; 3) **c)** (−6; 9; −2)

Ebenen im Raum – die Parameterform

5 Eine Ebene E ist durch den Punkt P und die Gerade g, die beide in der Ebene liegen, eindeutig bestimmt. Geben Sie eine Ebenengleichung in Parameterform an.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$; $P(2|5|-3)$ **b)** $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P(6|3|-1)$

6 Prüfen Sie, ob die Geraden g_1 und g_2 sich schneiden. Geben Sie eine Ebenengleichung in Parameterform an, die die beiden Geraden enthält, wenn sie sich schneiden.

a) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

7 Gegeben ist die Ebenengleichung einer Ebene E in Parameterform $E: \vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Beschreiben Sie die Lage der Ebene E im Koordinatensystem.
b) Geben Sie eine weitere Gleichung der Ebene E in Parameterform an.
c) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an, bei der der Stützvektor nicht der Nullvektor ist.
d) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an, bei der die Spannvektoren keine Vielfachen von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

D19 Check-out

→ **Lösungen**, Seite 494

Koordinatenform und Normalenvektor

8 Gegeben ist eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform $E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$.
Kontrollieren Sie, ob der Punkt in der Ebene E liegt.
a) $D(4|2|-2)$ **b)** $E(3|2|1)$ **c)** $F(-1|1|1)$ **d)** $G(-2|2|2)$

9 Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zur x_1x_3-Ebene ist und vom Koordinatenursprung den Abstand 2 hat. Geben Sie mögliche Ebenen in zwei verschiedenen Darstellungsformen an, die diese Bedingungen erfüllen.

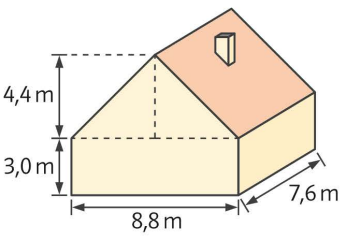
10 Bestimmen Sie die fehlenden Darstellungsformen für die Ebene E.
a) $E: 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 1$ **b)** $E: x_1 - x_2 = 3$
c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ **d)** $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Schnittwinkel und Schnittpunkte

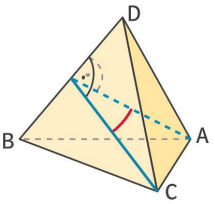
11 **a)** Die Ebene E schneidet die x_3-Achse.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die x_3-Achse die Ebene $E: 4x_1 + 2x_3 = -8$ durchstößt.
b) Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ schneidet die x_2x_3-Ebene und die x_1x_3-Ebene.
Berechnen Sie die Größe der Schnittwinkel der Geraden g mit den beiden Koordinatenebenen.

12 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\6\end{pmatrix}$ mit der Ebene E. Führen Sie anschließend eine Probe durch.
a) $E: 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6$ **b)** $E: 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 14$
c) $E: -2x_2 + 4x_3 = 24$ **d)** $E: 2x_1 - 2x_3 = 12$

13 Berechnen Sie für das abgebildete Haus die Größe des Winkels
a) zwischen den beiden Dachflächen,
b) zwischen einer Dachfläche und der rechten Hauswand,
c) zwischen einer Kante des Kamins und der Dachfläche.

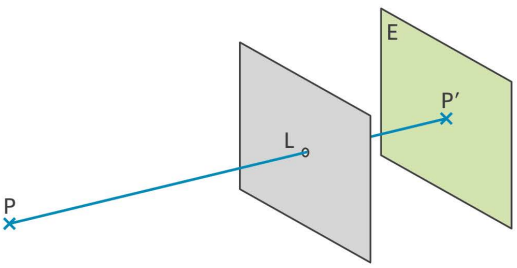


14 Ein Tetraeder ist eine dreiseitige Pyramide, bei der alle Seiten gleich lang sind (siehe Figur auf dem Rand).
Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen zwei Seitenflächen.



Geometrische Objekte im Raum

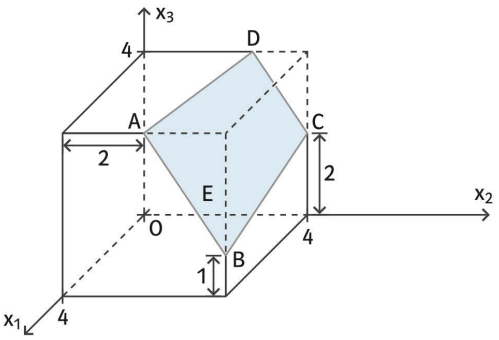
15 **a)** Beschreiben Sie, wie man den Bildpunkt eines Punktes P in der Bildebene E einer Lochkamera mit einem Loch in L berechnet.
b) Führen Sie die Rechnung mit den Koordinaten $P(4|0|1)$, $L(3|4|2)$ und $E: x = \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ durch.



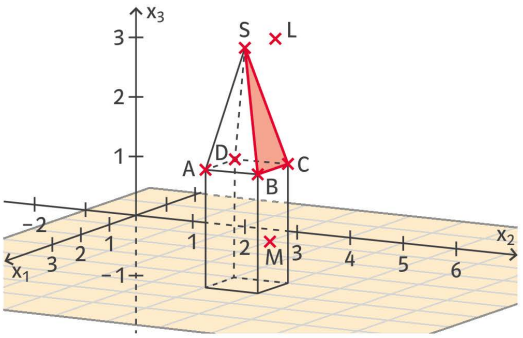
Weiterführende Aufgaben

Lösungen, Seite 496

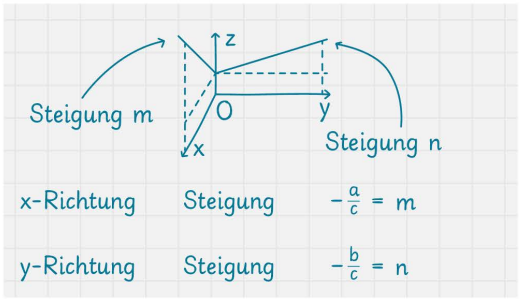
16 a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene durch die Punkte A, B, C und D.
b) Berechnen Sie die Winkel zwischen der Ebene E und den Koordinatenebenen.
c) Berechnen Sie die Größe der Winkel, in denen die Koordinatenachsen die Ebene E schneiden.
d) Berechnen Sie die Größe der Innenwinkel des Schnittvierecks ABCD.



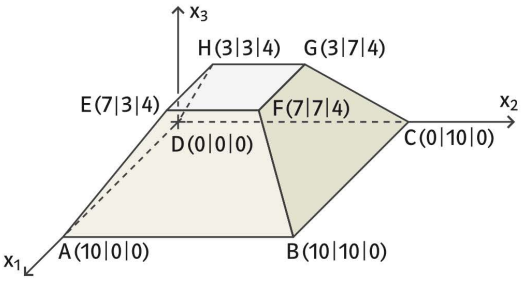
17 Ein Kirchturm aus einem quaderförmigen Unterbau mit aufgesetzter Pyramide wird beschrieben durch die Punkte A(5|4|2), B(5|5|2), C(4|5|2), D(4|4|2) sowie der Spitze S(4,5|4,5|4) (1 LE ≙ 10 m).
Im Punkt L(8|7|5) ist an einem Gebäude eine Laser-Lichtquelle montiert worden.
Untersuchen Sie, ob das Kirchturmdach angestrahlt wird, wenn die Lichtquelle zum Bodenpunkt M(1|3|0) ausgerichtet wird.



18 Betrachtet wird die Gleichung $3x_2 + 4x_3 = 5$.
a) Isa behauptet: „Dies ist eine Gleichung einer Geraden." Moritz behauptet: „Dies ist die Gleichung einer Ebene". Erläutern Sie, wie beide argumentieren könnten.
b) Beschreiben Sie, wie die Gerade und die Ebene aus Teilaufgabe a) zusammenhängen.
c) Die Koordinatenform einer Ebene E mit $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ kann man für $c \neq 0$ in die Gleichung $x_3 = -\frac{a}{c}x_1 - \frac{b}{c}x_2 + \frac{d}{c}$ umformen. Su fertigt eine Skizze an. Erläutern Sie, wie diese Gleichung mit der Ebenengleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d}{c} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$ zusammenhängt.

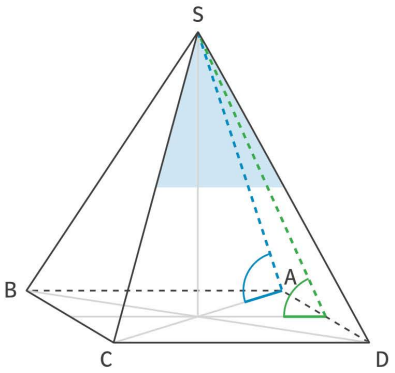


19 Die Abbildung zeigt einen Denkmalsockel.
a) Beschreiben Sie die geometrische Form.
b) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Sockels.
c) Berechnen Sie den Winkel zwischen jeweils zwei Seitenflächen sowie zwischen den Seitenflächen und der Deckfläche.
d) Sonnenlicht fällt aus der Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf den Sockel. Berechnen Sie die Koordinaten der Schattenpunkte in der x_1x_2-Ebene und fertigen Sie eine Zeichnung des Sockels und seines Schattens an.
e) Bestimmen Sie die Seitenlängen und die Größe der Winkel der Schattenfigur.



Lösungen, Seite 498

20 Gegeben ist die quadratische Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S mit $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$ und $S(4|4|14)$.
Alle Angaben in Metern.



a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte C und D an.

b) Berechnen Sie die Größe der Winkel, die die Kanten der Seitenflächen mit der Grundfläche ABCD bilden.

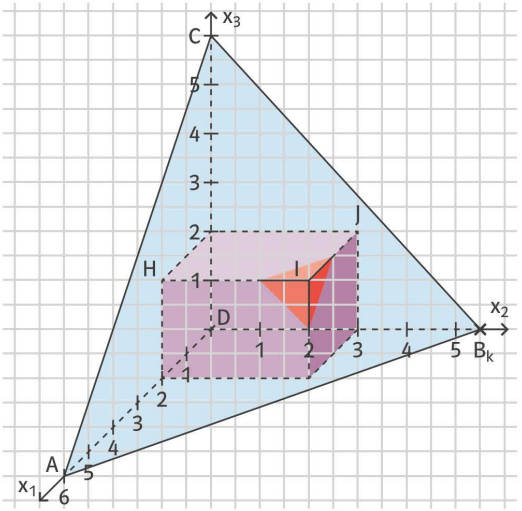
c) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den Seitenflächen BCS und CDS.

d) Die Pyramide steht auf einem Platz inmitten einer Stadt. Die blau markierte Fläche wird als Werbefläche genutzt. Die auf Stoff gedruckte Werbung wird von der Spitze ausgehend bis auf halbe Höhe der Kante $\overline{CS}$ ausgerollt.
(1) Geben Sie für die Ebene E_{SCD}, in der die Werbefläche liegt, eine Ebenengleichung in Parameterform an.
(2) Geben Sie an, in welchen Intervallen die Parameter der Ebenengleichung der Ebene in Parameterform liegen dürfen, damit nur die Werbefläche beschrieben wird.
(3) Bestimmen Sie die Größe der Werbefläche. Geben Sie die Kosten an, die entstehen, wenn die Werbefläche pro Quadratmeter für eine Woche Werbezeit 500 € kostet.

e) Auf dem Platz wird ein Softball aus der Hand heraus geworfen. Die Flugbahn des Balls wird im Modell durch die Punkte der Form $(1|15 - 8t|-0{,}25t^2 + 3t + 0{,}75)$ mit $t \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ beschrieben. Dabei ist t die seit dem Wurf vergangene Zeit in Sekunden.
(1) Der Ball bewegt sich im Modell in einer Ebene. Beschreiben Sie die Lage der Ebene im Koordinatensystem und geben Sie eine Koordinatenform dieser Ebene an.
(2) Ermitteln Sie den Punkt W, in dem der Ball die Ebene E_{CDS} trifft. Prüfen Sie, ob der Ball die Werbefläche trifft.

f) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.

21 Gegeben sind die vier Punkte $A(6|0|0)$, $B_k(0|k|0)$, $C(0|0|6)$ und $D(0|0|0)$, mit einer reellen Zahl k, die zusammen die Pyramide AB_kCD bilden.
In der Pyramide liegt ein Quader, von dem die Punkte $D(0|0|0)$ und $I(2|3|2)$ gegeben sind.



a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte J und H des Quaders an.

b) Begründen Sie, dass das Dreieck AB_kC für alle Werte von k gleichschenklig ist.

c) Geben Sie die Ebenengleichung der Ebene E_{AB_kC} in Parameterform in Abhängigkeit von k an.
Bestätigen Sie, dass $kx_1 + 6x_2 + kx_3 = 6k$ eine Koordinatenform von E_{AB_kC} ist.

d) Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Größe des Winkels, in dem die x_2-Achse die Ebene E_{AB_kC} schneidet, 45° beträgt.

e) (1) Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Ebene E_{AB_kC} durch den Punkt I verläuft.
(2) Bestimmen Sie, wie viel Prozent des Volumens der Pyramide AB_kCD für diesen Wert für k durch den Quader ausgefüllt sind.

f) Zeigen Sie, dass die Gerade $g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, mit einer reellen Zahl t, alle Ebenen E_{AB_kC} schneidet und dass der Schnittpunkt in $S(k|k|-k)$ liegt.

Gauß-Algorithmus zum Lösen von LGS

Man löst ein LGS mit drei Unbekannten wie folgt:

1. Man bringt das lineare Gleichungssystem schrittweise durch Äquivalenzumformungen auf Stufenform.
2. Man löst die Gleichungen der Stufenform schrittweise von unten nach oben auf und bestimmt so die Lösungsmenge.

Man spart Schreibarbeit, indem man ein LGS als Matrix schreibt.

Lösungsmenge

Man bestimmt die Lösungsmenge eines LGS, indem man es durch Äquivalenzumformungen in Stufenform bringt und die letzte Zeile der Stufenform betrachtet. Folgende Fälle sind möglich:

- Man kann durch Rückwärtseinsetzen von unten nach oben genau eine Lösung bestimmen.
- Die letzte Gleichung hat keine Lösung. Dann ist die Lösungsmenge leer.
- Die letzte Gleichung ist immer wahr. Dann gibt es unendlich viele Lösungen. Man führt für eine Unbekannte einen Parameter ein, mit dem man die allgemeine Lösungsmenge angeben kann.

$$\begin{array}{ll} I & x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ II & -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ III & 3x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} I & x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ II_a = II + 2 \cdot I & 5x_2 - 3x_3 = 9 \\ III_a = III - 3 \cdot I & 5x_2 - x_3 = 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} I & x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ II_a & 5x_2 - 3x_3 = 9 \\ III_b = III_a - II_a & 2x_3 = 4 \end{array}$$

$L = \{(1; 3; 2)\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right) \quad L = \{(5; 5; 3)\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 7 & 11 \\ 0 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad L = \{\ \}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 7 & 12 \\ 0 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad L = \{(7 - 3t; 2 + t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Ebenen im Raum

Jede Ebene lässt sich durch eine Gleichung in **Parameterform** mit $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ beschreiben. Hier sind die Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht kollinear. Der Vektor $\vec{p}$ heißt Stützvektor.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Jede Ebene E mit einem Stützvektor $\vec{p}$ und einem Normalenvektor $\vec{n}$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{o}$ lässt sich durch eine Gleichung in **Koordinatenform** $\mathbf{a x_1 + b x_2 + c x_3 = d}$ angeben $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

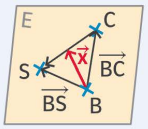
$$E: -10x_1 + 8x_2 + 5x_3 = -19$$

- Jede Ebene E lässt sich durch eine Gleichung in **Normalenform** mit $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ mit einem Stützvektor $\vec{p}$ und einem Normalenvektor $\vec{n}$ $(\neq \vec{o})$ beschreiben.

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

- Wenn man bei der Ebenengleichung in Parameterform die Parameter einschränkt, werden Figuren als Ausschnitte der Ebene beschrieben. Man erhält dann **parametrisierte Flächen** der Ebene.

Das Dreieck BCS liegt in der Ebene $E: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BS}$. *Das Dreieck wird für alle* $r, s > 0$ *mit* $r + s \leq 1$ *beschrieben.*



Schnittwinkel

Haben die Geraden g_1 und g_2 die Richtungsvektoren u_1 und u_2, und die Ebenen E_1 und E_2 die Normalenvektoren n_1 und n_2, so gilt für den Schnittwinkel α

- der Geraden g_1 und g_2: $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{u_1} \circ \vec{u_2}|}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{u_2}|}$
- der Ebenen E_1 und E_2: $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{n_1} \circ \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$
- der Geraden g_1 und der Ebene E_1: $\sin(\alpha) = \dfrac{|\vec{u_1} \circ \vec{n_1}|}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{n_1}|}$

Gegeben: $E_1: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12$, $E_2: x_1 = 2$ *und* $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Winkel zwischen E_1 *und* E_2*:*

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{7}, \text{ somit ist } \alpha \approx 73{,}4°$$

Winkel zwischen g *und* E_1*:*

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{49}} = \frac{16}{21}, \text{ somit ist } \alpha \approx 49{,}6°$$

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 1

20 min

D20 Lösungen Probeklausur Kapitel VI

1 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 &= 14 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

2 Gegeben sind die Punkte $A(1|0|3)$, $B(1|3|0)$ und $C(1|-3|0)$.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene festlegen.

b) Geben Sie zur Ebene E_{ABC} jeweils eine Gleichung in Parameterform und in Koordinatenform an.

c) Geben Sie zur Ebene E_{ABC} eine Gleichung in Normalenform an.

3 Die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet die Ebene E mit $E: 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$.

Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Größe des Winkels an, der von g und E eingeschlossen wird. Beurteilen Sie, ob dieser Winkel größer als 45° ist.

4 Ein Maibaum von 8 m Höhe steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene. Sonnenstrahlen fallen längs der Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ein.

Berechnen Sie die Länge des Schattens auf dem Boden.

5 Gegeben sind die Ebene $E: 3x_2 + 4x_3 = 0$ sowie der Punkt $P(-3|-3|-4)$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.

b) Spiegeln Sie den Punkt P an der x_1x_3-Ebene und geben Sie die Koordinaten von P' an.

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 2

20 min

1 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 8 \\ 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= -5 \\ 9x_1 - 3x_2 - x_3 &= -31 \end{aligned}$$

2 Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.

b) Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass der Punkt $D(3|5|a)$ in der Ebene E liegt.

3 Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie die Ebenen $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E_2: 2x_2 - 3x_3 = 0$.

a) Erläutern Sie, was man mit der Lösung des LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$ bestimmen kann.

b) Geben Sie einen Ansatz in Form einer Gleichung an, mit dem man den Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene E_2 bestimmen kann. Bestimmen Sie den Schnittpunkt.

4 Gegeben sind die Ebene $E_1: 2x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 1$ und die Ebene $E_2: ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$.

a) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung von E_1 in Normalenform.

b) Ermitteln Sie mögliche Werte für a, b und c so, dass sich E_1 und E_2 orthogonal schneiden.

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 1

45 min

D20 Lösungen
Probeklausur
Kapitel VI

1 Eimerkettenbagger werden im Braunkohletagebau verwendet. Der Bagger fährt in eine Richtung und trägt mit den Eimerketten senkrecht zu der Fahrtrichtung die Braunkohle ab. Der Bagger befindet sich beim Start in der Position $A(3|5|7)$ und nach einer Stunde in der Position $B(9|7|7)$. Die Eimerketten bewegen sich in Richtung des Vektors $\vec{u}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ (1 LE ≙ 10 m).

a) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Gerade, auf der sich der Bagger bewegt.
b) Geben Sie eine Gleichung für die Ebene an, in der sich die Oberfläche der abgetragenen Braunkohle näherungsweise befindet.
c) Zeigen Sie, dass sich die Eimerketten senkrecht zur Fahrtrichtung des Baggers bewegen.
d) Geben Sie eine Gleichung des Ebenenstücks in Parameterform an, das entsteht, wenn ein einarmiger Bagger nach dem Start bei gleichmäßiger Fahrgeschwindigkeit 3 Stunden arbeitet, und die Eimerketten eine Länge von 35 Meter haben.

2 Gegeben sind die Daten der quadratischen, symmetrischen Pyramide des Eiskellers im „Neuen Garten" bei Potsdam auf einem Sockel. In einem gewählten Koordinatensystem erhält man näherungsweise die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(6|-6|2)$ und $C(0|0|2)$ – jeweils in Metern. Die Pyramide ist insgesamt 8 m hoch.

a) Bestimmen Sie die fehlenden Eckpunkte des Sockels sowie der Spitze.
b) Sonnenstrahlen fallen auf die Pyramide mit der Richtung $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eckpunkte des Schattens der Pyramide auf dem Boden (der x_1x_2-Ebene).
Bestätigen Sie, dass der Schatten des Daches durch die Geraden g_1 und g_2 eingegrenzt wird mit $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Geben Sie entsprechende Werte für t_1 und t_2 an.
c) Ein ca. 2 m großer Besucher des „Neuen Gartens" steht auf der Bodenposition $F(7|7|0)$. Überprüfen Sie, ob sich der Kopf des Besuchers unter der Sonneneinstrahlung aus Teilaufgabe b) im Schatten befindet.
d) Beschreiben Sie, mit welchen Modellannahmen Sie jeweils gearbeitet haben.

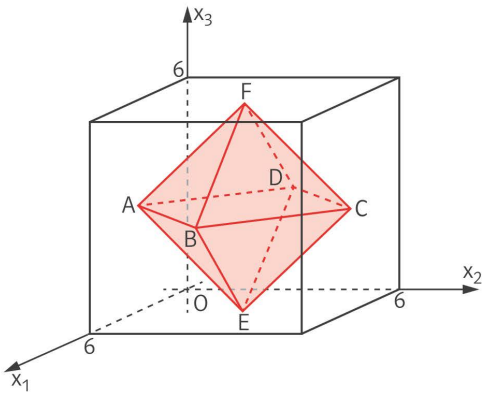
3 Gegeben ist eine gerade quadratische Pyramide, deren Höhe h r-mal so lang wie die Grundkante a ist.
a) Skizzieren Sie eine solche Pyramide in einem Koordinatensystem.
b) Stellen Sie in Abhängigkeit von a und r Gleichungen der Ebenen auf, in denen die Seitenflächen jeweils liegen. Geben Sie diese in zwei verschiedenen Darstellungsformen an.
c) Ermitteln Sie r so, dass die Größe des Winkels zwischen je zwei Seitenflächen 60° ist.
d) Begründen Sie, dass ein Winkel von 90° zwischen den Seitenflächen nicht möglich ist.
e) Geben Sie mögliche Eckpunkte einer solchen Pyramide an, bei der das Volumen 1331 Volumeneinheiten beträgt und $r = 3$ gilt.

D20 Lösungen
Probeklausur
Kapitel VI

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 2

60 min

1 In einer Würfelbox aus durchsichtigem Hartplastik mit der Kantenlänge 6 cm wird ein gezüchteter oktaederförmiger Spinell-Farbkristall aufbewahrt. Die sechs Eckpunkte berühren die Wände der Würfelbox dabei jeweils in der Flächenmitte.



a) Zeigen Sie, dass es sich bei dem Viereck ABCD um ein Quadrat handelt.

b) (1) Bestimmen Sie das Volumen des oktaederförmigen Farbkristalls.
(2) Untersuchen Sie, wie viel Prozent vom Volumen des Würfels durch das Oktaeder ausgefüllt wird.

c) Das Dreieck AEB liegt in der Ebene $E_{AEB}: x_1 - x_2 - x_3 = 0$ und das Dreieck BEC liegt in der Ebene $E_{BEC}: x_1 + x_2 - x_3 = 6$.
(1) Zeigen Sie, dass die Punkte B und E in den beiden Ebenen E_{AEB} und E_{BEC} liegen.
(2) Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den beiden Flächen E_{AEB} und E_{BEC}, der im Inneren des Oktaeders liegt.

d) Ermitteln Sie eine Ebenengleichung in Parameterform für eine Ebene, in der das Viereck ABCD liegt. Geben Sie auch die Intervalle für die Parameter an, sodass nur das Viereck ABCD dargestellt wird.

e) Überprüfen Sie, ob man die untere Spitze E des Oktaeders sehen kann, wenn man aus der Position P(6|6|6) auf das Oktaeder schaut und die Wände des Kristalls nicht durchsichtig sind.

2 Die Ebene $E: 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 - 20x_3 = 1$ beschreibt eine Landschaft, in der ein Flugplatz liegt. Eine Radarstation befindet sich im Punkt $R_1(7|3|0)$. Diese ortet ein Flugzeug um 12:00 Uhr im Punkt P(7|29|7). Das Flugzeug wird als punktförmig angenommen und bewegt sich annähernd geradlinig. Um 12:04 Uhr befindet sich das Flugzeug im Punkt Q(19|21|6,2). Das Flugzeug befindet sich während dieser Zeit im Landeanflug (1 LE ≙ 1 km).

a) (1) Weisen Sie nach, dass sich die Flugbahn des Flugzeuges beschreiben lässt durch die Bewegungsgleichung $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$ (mit t in Minuten nach 12:00 Uhr).
(2) Begründen Sie, dass sich das Flugzeug im Sinkflug befindet.
(3) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs und geben Sie diese in $\frac{km}{h}$ an.

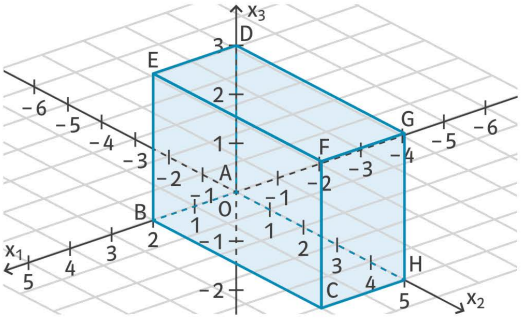
b) Eine weitere Radarstation befindet sich im Punkt $R_2(21|9|0{,}1)$.
(1) Zeigen Sie, dass der Punkt R_2 in der Landschaft des Flugplatzes liegt.
(2) Der Anflug des Flugzeuges F auf den Flugplatz ist optimal, wenn die Flugbahn f und die beiden Radarstationen in einer „Linie", also in einer Ebene liegen. Untersuchen Sie, ob das in diesem Fall zutrifft.

c) Ein optimaler Landeanflug beginnt auf einer Reiseflughöhe von ca. 35 000 Fuß (1 Fuß = 30,48 cm) und hat einen Anflugwinkel von ca. 3° zur Landebahn. Untersuchen Sie, ob beide Bedingungen bei dem Flugzeug erfüllt sind.

d) Bestimmen Sie den Punkt, in dem das Flugzeug bei dem durch die Flugbahn f angegebenen Landeanflug auf der Landebahn landet. Ermitteln Sie, zu welcher Uhrzeit das Flugzeug landet.

Schrägbilder – Eine Darstellung räumlicher Objekte in einer Ebene (Projektion)

Der abgebildete Quader hat die Eckpunkte A(0|0|0), B(2|0|0), C(2|5|0), D(0|0|3), E(2|0|3), F(2|5|3), G(0|5|3) und H(0|5|0). In der Abbildung erscheint dieser als Schrägbild, das in die x_1x_2-Ebene gezeichnet wurde. Zum Beispiel erscheint der Punkt E(2|0|3) in der x_1x_2-Ebene als E'(−2|−5).
Dieses Schrägbild entsteht wie eine Projektion der Eckpunkte und Kanten des Quaders durch parallele Strahlen auf die x_1x_2-Ebene.



1 **a)** Zeigen Sie, dass die Punkte des Schrägbildes in der x_1x_2-Ebene in der Figur den in die x_1x_2-Ebene projizierten Punkten der Eckpunkte des Quaders entsprechen. Fassen Sie dazu die Projektion wie die Entstehung von Schattenpunkten auf, die durch parallel einfallende Sonnenstrahlen entstehen, die in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ verlaufen.

Führen Sie die Kontrolle an den Punkten D, E und F durch.

b) Zeigen Sie, dass ein allgemeiner Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ im Schrägbild in der x_1x_2-Ebene auf den Punkt $P'\left(p_1 - \frac{4}{3}p_3 \middle| p_2 - \frac{5}{3}p_3 \middle| 0\right)$ bzw. $P'\left(p_1 - \frac{4}{3}p_3 \middle| p_2 - \frac{5}{3}p_3\right)$ mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ abgebildet wird.
Tipp: Verwenden Sie für die Ebene, in der das Schrägbild entsteht, die Koordinatenform als Darstellungsform.

Da die Berechnung der Schattenpunkte aller acht Eckpunkte des Quaders recht aufwendig ist, wird im Folgenden ein schnelleres Verfahren dargestellt.

Info

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor
Als Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor versteht man die folgende Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 \\ 1 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 + 5 \cdot p_3 \end{pmatrix}$$

Man multipliziert die Zeilen der Matrix komponentenweise mit den Koordinaten des Vektors.

2 **a)** Ordnen Sie den Multiplikationsaufgaben M_1 bis M_4 jeweils einen Ergebnisvektor E_1 bis E_8 zu. Vier Ergebnisvektoren werden nicht benötigt. Notieren Sie dazu jeweils die Zwischenrechnungen.

M1 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

M2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

M3 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

M4 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

E1 $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ E2 $\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$ E3 $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

E4 $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ E5 $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ E6 $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

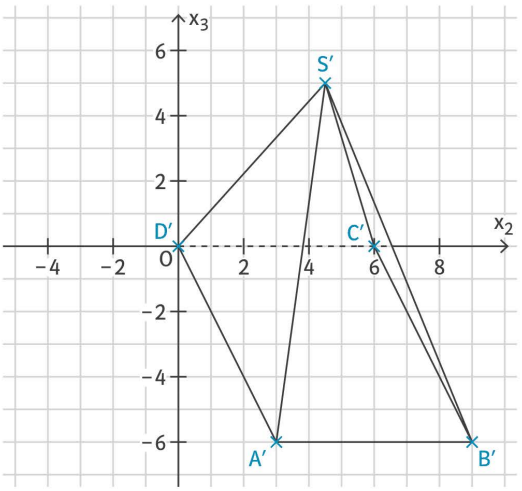
E7 $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ E8 $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) Zeigen Sie, dass man die Punkte des Schrägbildes $P'\left(p_1 - \frac{4}{3}p_3 \middle| p_2 - \frac{5}{3}p_3\right)$ oben mithilfe einer Multiplikation der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ und des Punktes $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ berechnen kann.

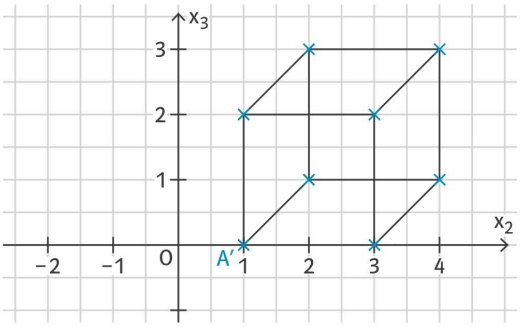
3 **a)** Gegeben ist die Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S durch $A(1|0|1)$, $B(3|0|5)$, $C(-1|3|6)$ und $S(-1|6|2)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte im Schrägbild, das man durch die Matrix M erhält, und zeichnen Sie das Schrägbild.

(1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

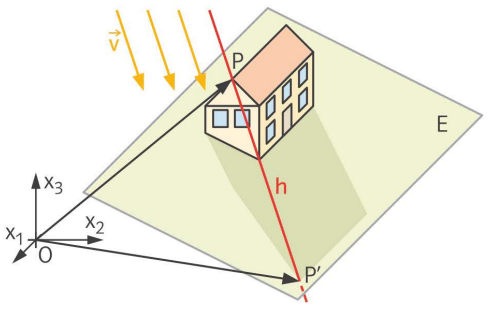
b) Gegeben ist eine quadratische Pyramide ABCDS durch $A(6|0|0)$, $B(6|6|0)$, $C(0|6|0)$, $D(0|0|0)$ und $S(3|3|8)$.
(1) Berechnen Sie die Koordinaten des Schrägbildes, das man durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ erhält und bestätigen Sie so die nebenstehende Zeichnung.
(2) Hierbei handelt es sich um eine Projektion in die x_2x_3-Ebene. Die Projektion in die x_1x_2-Ebene kann mithilfe der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ erfolgen. Führen Sie diese aus, zeichnen Sie das Schrägbild und vergleichen Sie dies mit Ihrem Ergebnis aus Aufgabenteil (1).



c) Man kann zu einem gegebenen Körper und seinem in eine Ebene projiziertem Schrägbild auch umgekehrt die Matrix bestimmen, mit der man über eine Matrix-Vektor-Multiplikation die Punkte des Schrägbildes berechnen kann.
Nebenstehendes Schrägbild zeigt einen Würfel mit $A(2|1|4)$.
Bestimmen Sie die Matrix, mit der dieses Schrägbild erzeugt wurde.



4 **Schattenwurf auf eine schräge Ebene**
Ein Haus, das an einem ebenen Hang steht, wird von der Sonne angestrahlt und wirft seinen Schatten auf die Hangebene.
Die Hangebene E kann durch die Gleichung $E: x_2 + 2x_3 = 0$ dargestellt werden, die Richtung der Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ festgelegt.
Ein beliebiger Punkt des Hauses ist gegeben durch den Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$.



a) Zeigen Sie, dass die Matrix, mit der man die Schattenpunkte des Hauses auf der Hangebene E erzeugen kann, gegeben ist durch $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Legen Sie Eckpunkte eines Hauses mit Flachdach fest, das auf der Ebene E steht, eine Breite von 9 m, eine Länge von 11 m und eine Höhe bis zum Dachfirst von 11 m hat. Berechnen Sie die Schattenpunkte des Hauses auf der Ebene E und zeichnen Sie das Schrägbild.

VII Lagebeziehungen und Abstände

Das können Sie bald

- Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen untersuchen
- Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen
- Objekte an Ebenen spiegeln
- Abstandsberechnungen in Kontexten systematisch durchführen

Check-in

Schätzen Sie sich ein:

	☺	😐	☹
1. Ich kann den Abstand zweier Punkte im Raum bestimmen.	☐	☐	☐
2. Ich kann Vektoren auf Kollinearität bzw. Orthogonalität prüfen.	☐	☐	☐
3. Ich kann Ebenengleichungen in Parameter-, Koordinaten- und Normalenform angeben.	☐	☐	☐
4. Ich kann den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene bestimmen.	☐	☐	☐
5. Ich kann lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten lösen.	☐	☐	☐

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen,** Seite 420
zu 2. **Grundwissen,** Seite 420
zu 3. **Lehrtext,** Seiten 219 und 223
zu 4. **Beispiel 2,** Seite 228
zu 5. **Beispiel,** Seite 211

Test

Lösungen, Seite 500

1 **Abstand zweier Punkte im Raum bestimmen**

a) Berechnen Sie den Abstand der Punkte $P(-5|-3|7)$ und $Q(-2|-3|11)$.

b) Bestimmen Sie den Wert für a so, dass die Punkte $P(3|-2|a)$ und $Q(-3|2|-a)$ den Abstand 14 haben.

2 **Kollineare bzw. orthogonale Vektoren erkennen**

Überprüfen Sie, welche beiden der folgenden Vektoren kollinear bzw. orthogonal sind.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{d} = \begin{pmatrix} -21 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

3 **Darstellungen von Ebenen**

a) Die Ebenen E_1 und E_2 sind auf verschiedene Weisen dargestellt. Ordnen Sie den beiden Ebenen ihre Darstellungen zu. Begründen Sie.

$E_1: 4x_1 - 0{,}5x_2 + 8x_3 = 1$

$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ -0{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -0{,}5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -0{,}5 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

$E_2: 0{,}5x_1 - 4x_2 - 0{,}5x_3 = 4$

$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -16 \end{pmatrix} = 0$

b) Die Punkte $A(2|-2|8)$, $B(2|-4|4)$ und $C(-5|0|4)$ liegen in einer Ebene E. Stellen Sie für E eine Gleichung in Parameter-, in Koordinaten- sowie in Normalenform auf.

4 **Schnittpunkt von Gerade und Ebene bestimmen**

Gegeben sind die Punkte $A(1|0|5)$, $B(6|-1|3)$, $C(8|-4|0)$, $D(1|0|4)$ und $E(7|-9|-2)$.
Die Gerade g verläuft durch die Punkte D und E, die Ebene H enthält die Punkte A, B und C.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g mit der Ebene H.

5 **Lösen von linearen Gleichungssystemen**

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems. Wenden Sie das Gauß-Verfahren an.

a)
$$\begin{aligned} -0{,}5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 8x_1 + 8x_2 + 7x_3 &= 22 \end{aligned}$$

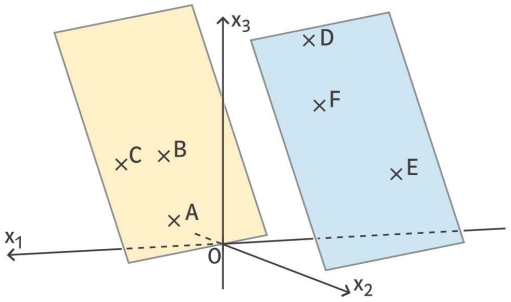
b)
$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 8x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -2{,}5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 0{,}5 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 9 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 9 \\ 4x_1 - 3{,}5x_2 + 11x_3 &= 22{,}5 \end{aligned}$$

Sind die Wände parallel?

Lerneinheit 1
Seite 250

Von zwei „gekippten“ Wänden (s. rechts) ist jeweils die konkrete Lage von drei Punkten bekannt: Auf der gelben Wand liegen die Punkte $A(4|2|2)$, $B(4|0|6)$ und $C(8|3|6)$, auf der blauen Wand die Punkte $D(-4|6|14)$, $E(-10|6|5)$ und $F(-4|8|10)$.
Es soll überprüft werden, ob die beiden Wände exakt zueinander parallel verlaufen oder nicht.



1. Strategien prüfen

Oft gibt es viele Herangehensweisen an eine Fragestellung. Unten werden unterschiedliche Strategien vorgestellt, mit denen die Parallelität der Wände untersucht werden soll.

- Beurteilen Sie die einzelnen Vorgehensweisen darauf hin, ob man mit ihnen die Fragestellung beantworten kann.
- 👥 Stellen Sie sich gegenseitig Ihre Ergebnisse vor und diskutieren Sie darüber, welches Vorgehen geschickt ist.

Anton: Ich nehme dreimal einen „gelben“ und einen „blauen“ Punkt und prüfe, ob die Verbindungsstrecken parallel sind.

Berat: Ich nehme einen „gelben“ Punkt, stelle mit ihm und den beiden Spannvektoren der blauen Wand eine Ebene auf und führe mit einem weiteren „gelben“ Punkt eine Punktprobe durch.

Charlin: Ich suche einen Normalenvektor der gelben Wand und prüfe, ob das Skalarprodukt mit beiden Spannvektoren der blauen Wand jeweils 0 ist.

Darjan: Ich suche einen Normalenvektor der blauen Wand und prüfe, ob er senkrecht auf dem Differenzvektor zweier „gelber“ Ortsvektoren steht.

Elif: Ich bilde mit einem „gelben“ Punkt und zwei „blauen“ Punkten ein Dreieck und prüfe, ob dieses gleichschenklig ist.

Fenni: Ich prüfe, ob sich beide „gelben“ Spannvektoren jeweils durch die beiden „blauen“ Spannvektoren“ linear kombinieren lassen.

Gina: Ich teste, ob ein „gelber“ Normalenvektor sich als Vielfaches eines „blauen“ Normalenvektors darstellen lässt.

2. Die geschickteste Strategie finden

Zu der Fragestellung, ob zwei Ebenen E und F parallel sind, soll nun, abhängig von den jeweils vorliegenden Informationen über die Ebenen, die beste Strategie gefunden werden.

- 👥 Formulieren Sie mit einem Partner oder einer Partnerin zu jedem der Fälle jeweils ein Vorgehen, mit dem man die beiden Ebenen auf Parallelität untersuchen kann.

Fall A
Ich kenne jeweils eine Parameterform von E und F.

Fall B
Ich kenne jeweils eine Koordinatenform von E und F.

Fall C
Ich kenne von E eine Parameter- und von F eine Koordinatenform.

Fall D
Ich kenne von E eine Parameterform und von F drei Punkte.

Fall E
Ich kenne von E eine Koordinatenform und von F drei Punkte.

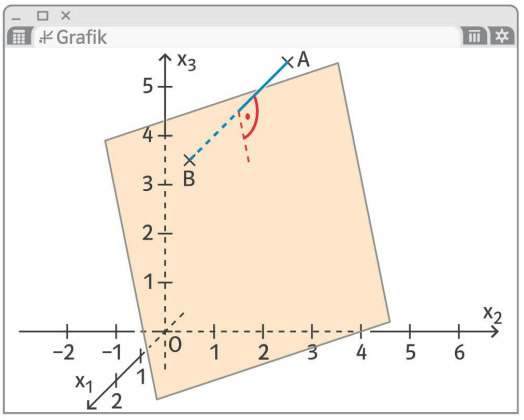
- 👥 Tauschen Sie sich aus und einigen Sie sich jeweils auf die beste Strategie, für die jedes Team einen Punkt erhält. Welches Team hat die besten „Strategen“?

Spiegeln im Raum

1. Eine Spiegelebene zu gegebenem Bild und Urbild suchen

Lerneinheit 2 Seite 256

- Zeichnen Sie mit einer dynamischen Geometriesoftware die Punkte A(1|3|6) und B(−3|−1|2) im Raum.
- Versuchen Sie nun, eine Ebene E zu konstruieren, sodass A und B wechselseitig aus einer Spiegelung an E hervorgehen. Auf dem Rand finden Sie nützliche Befehle.
- Tauschen Sie sich zu zweit über Ihre Ergebnisse und Ihr Vorgehen aus.
- Beschreiben Sie mathematisch, welche Bedingungen die Spiegelebene E erfüllen muss.



Nützliche Befehle
- Gerade
- Strecke
- Punkt (auf Objekt)
- Mittelpunkt
- Normalebene

Das Programm gibt Ihnen eine Koordinatenform der konstruierten Spiegelebene an.
Weisen Sie anhand dieser Gleichung rechnerisch nach, dass die von Ihnen formulierten Bedingungen an die Spiegelebene zweier Punkte tatsächlich erfüllt sind.

2. Den Bildpunkt zu einem Punkt und einer Spiegelebene suchen

- Spiegeln Sie mit dem Geometriemodul Ihres MMS den Punkt P(−6|1|4) an der Ebene E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$. Nutzen Sie den Befehl „Spiegle an Ebene“.
- Um nachzuvollziehen, wie man die Koordinaten von P' rechnerisch ermitteln kann, konstruieren Sie noch einmal wie im Forschungsauftrag 1 zu den Punkten P und P' die Spiegelebene, Sie erhalten E.
- Beschreiben Sie nun, wie Sie mithilfe des gegebenen Punktes P und der Koordinatenform von E schrittweise die geometrischen Objekte Ihrer Konstruktion und schließlich die Koordinaten des Spiegelpunkts P' berechnen können.
  Bringen Sie hierfür die Schritte auf dem grauen Zettel in eine sinnvolle Reihenfolge.

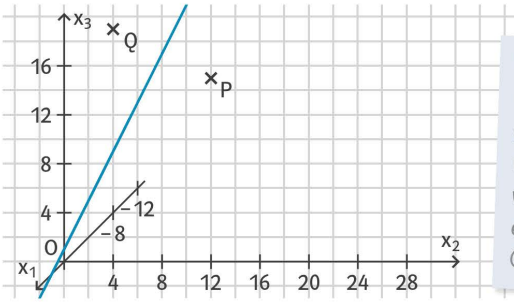
  - das Lot von P auf E fällen und den Schnittpunkt F finden
  - Normalenvektor von E aufstellen
  - Linearkombination vom Koordinatenursprung über P und F zu P' bilden
  - Gerade durch P orthogonal zu E

- Führen Sie nun nach diesem Verfahren die Berechnung der Koordinaten des Spiegelpunkts P' durch und prüfen Sie Ihr Ergebnis.
- Spiegeln Sie den Punkt Q(−12|6|9) an E. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q' erst rechnerisch, prüfen Sie anschließend Ihr Ergebnis mit dem Befehl „Spiegle an Ebene“.

3. Zum Weiterarbeiten: Die Spiegelung an einer Geraden durchführen

Lerneinheit 3 Seite 261

- Entwickeln Sie ein rechnerisches Verfahren zur Spiegelung eines Punktes P an einer Geraden g im Raum. Gehen Sie analog zu oben vor: Finden Sie mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware zu den Punkten P(−12|6|9) und Q(−4|2|17) zunächst Spiegelgeraden und leiten Sie daraus die einzelnen Schritte zur Berechnung der Koordinaten des Spiegelpunkts von P ab.

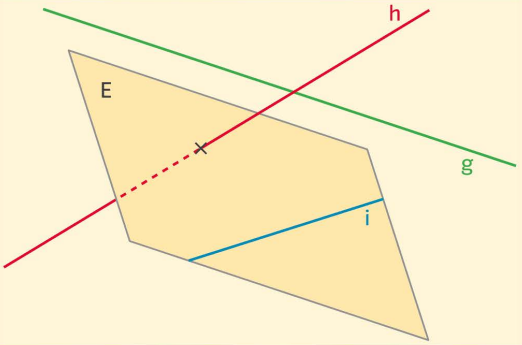


Warum ist es nicht so einfach, eine Spiegelgerade direkt zu konstruieren? Überlegen Sie, wie viele Spiegelgeraden existieren und wo diese Geraden liegen.

- Führen Sie Ihre Rechenschritte mit dem Punkt P und der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 10 \\ 19 \end{pmatrix}$ durch und prüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware mit dem Befehl „Spiegle an Gerade“.

1 Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen

Gegeben ist die Ebene E: $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$.
Ordnen Sie die Gleichungen (I) bis (III) den Geraden g, h und i zu.



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{(I)}$$

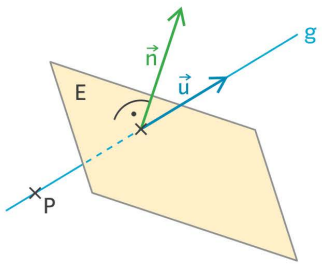
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(II)}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(III)}$$

Die Lage von Geraden und Ebenen lässt sich mithilfe der Eigenschaften von Vektoren in den Geraden- und Ebenengleichungen oder mit Schnittpunktberechnungen untersuchen.

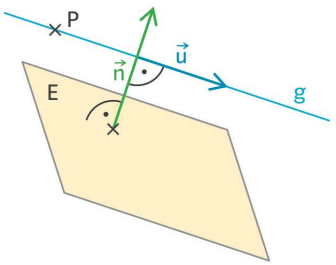
Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
Die Abbildungen zeigen die möglichen Lagebeziehungen einer Geraden g, von der ein Punkt P und ein Richtungsvektor $\vec{u}$ gegeben sind, zu einer Ebene E mit einem Normalenvektor $\vec{n}$.

(1) E und g schneiden sich, sie haben also genau einen gemeinsamen Punkt:



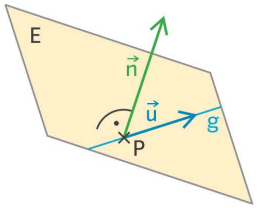
$\vec{u}$ und $\vec{n}$ sind nicht orthogonal zueinander, also $\vec{u} \circ \vec{n} \neq 0$.

(2) E und g liegen zueinander parallel, sie haben also keinen gemeinsamen Punkt:



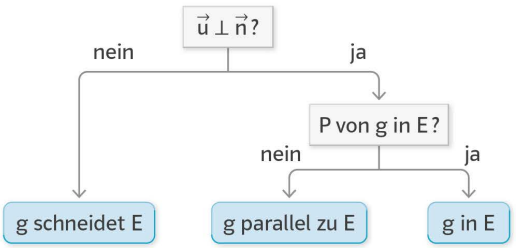
$\vec{u}$ und $\vec{n}$ sind orthogonal zueinander, also $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$, P liegt nicht in E.

(3) Die Gerade g liegt in E, also haben g und E unendlich viele gemeinsame Punkte:



$\vec{u}$ und $\vec{n}$ sind orthogonal zueinander, also $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$, P liegt in E.

Die Grafik zeigt, wie man bei der Untersuchung der Lagebeziehung vorgehen kann.
Man prüft zunächst, ob das Skalarprodukt aus Richtungsvektor $\vec{u}$ und Normalenvektor $\vec{n}$ null ergibt. Ist dies nicht der Fall, schneidet die Gerade g die Ebene E. Ist dies der Fall, entscheidet man mit einer Punktprobe, ob g parallel zu E oder vollständig in E liegt.



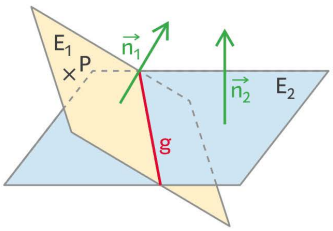
Zur Bestimmung gemeinsamer Punkte der Ebene E mit der Geraden g geht man wie folgt vor:
Liegt E in Parameterform vor, liefert das Gleichsetzen von E und g ein LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten, für das man entweder keine Lösung (g ist parallel zu E), genau eine Lösung (g schneidet E) oder unendlich viele Lösungen (g liegt in E) erhält.
Liegt E in Koordinaten- oder in Normalenform vor, notiert man die Geradengleichung koordinatenweise, setzt diese Koordinaten in E ein und löst nach dem Parameter von g auf: Auch hier lässt sich aus der Lösungsmenge auf die Anzahl gemeinsamer Punkte und damit auf die vorliegende Lagebeziehung schließen (vgl. Seite 251, Beispiel 3 b)).

Lagebeziehung von einer Geraden zu einer Ebene
Eine Gerade g mit einem Punkt P und einem Richtungsvektor $\vec{u}$ und eine Ebene E mit einem Normalenvektor $\vec{n}$ können folgende Lagebeziehungen zueinander haben:

- **g schneidet E**
  Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{n}$ sind nicht orthogonal zueinander: $\vec{u} \circ \vec{n} \neq 0$.
  Die Gerade g und die Ebene E haben genau einen gemeinsamen Punkt.
  Das zugehörige LGS bzw. die zugehörige Gleichung hat genau eine Lösung.
- **g verläuft parallel zu E**
  Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{n}$ sind orthogonal zueinander: $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$. Außerdem liegt P nicht in E.
  Die Gerade g und die Ebene E haben keinen gemeinsamen Punkt.
  Das zugehörige LGS bzw. die zugehörige Gleichung hat keine Lösung.
- **g liegt in E**
  Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{n}$ sind orthogonal zueinander: $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$. Außerdem liegt P in E.
  Die Gerade g und die Ebene E haben unendlich viele gemeinsame Punkte.
  Das zugehörige LGS bzw. die zugehörige Gleichung hat unendlich viele Lösungen.

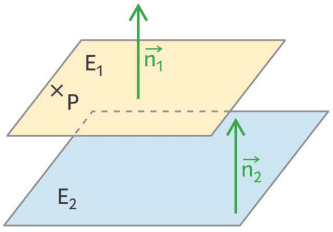
Lagebeziehungen von Ebenen
Auch bei der Untersuchung der Lagebeziehung zweier Ebenen E_1 und E_2 mit den Normalenvektoren $\vec{n_1}$ bzw. $\vec{n_2}$ und einem Punkt P in E_1 hilft eine geometrische Betrachtung:

(1) E_1 und E_2 schneiden sich, ihre gemeinsamen Punkte bilden eine Gerade g.



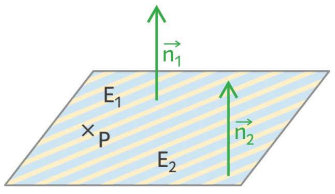
$\vec{n_1} \neq k \cdot \vec{n_2}$

(2) E_1 und E_2 liegen zueinander parallel und haben keine gemeinsamen Punkte.



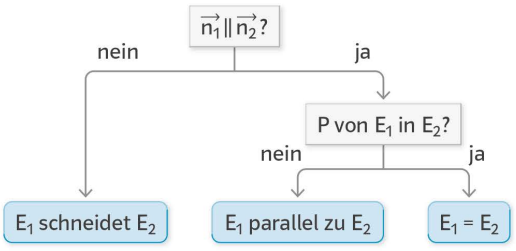
$\vec{n_1} = k \cdot \vec{n_2}$
und P liegt nicht in E_2.

(3) E_1 und E_2 sind identisch, alle Punkte von E_1 liegen auch in E_2 und umgekehrt.



$\vec{n_1} = k \cdot \vec{n_2}$
und P liegt in E_2.

Die Grafik zeigt, wie man bei der Untersuchung der Lagebeziehung vorgehen kann.
Wenn die Normalenvektoren von E_1 und E_2 nicht kollinear sind, schneiden sich die Ebenen.
Wenn die Normalenvektoren jedoch kollinear sind, entscheidet eine Punktprobe darüber, ob die Ebenen E_1 und E_2 parallel oder identisch sind.



Beispiel 1 **Die Lagebeziehung einer Geraden zu einer Ebene prüfen**

Untersuchen Sie die Lage der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zur Ebene $E: 2x_1 + x_2 - x_3 = 4$.

Lösung

1. *Prüfen, ob der Richtungsvektor $\vec{u}$ von g auf dem Normalenvektor $\vec{n}$ von E senkrecht steht:*
   $\vec{u} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0$. $\vec{u} \perp \vec{n}$, also verläuft g parallel zu E oder liegt in E.
2. *Punktprobe durch Einsetzen der Koordinaten des Stützvektors von g in E:*
   $2 \cdot 2 + 2 - 1 = 5 \neq 4$. Der Punkt P liegt nicht in E, die Gerade g verläuft also parallel zu E.

Beispiel 2 **Die Lagebeziehung zweier Ebenen prüfen**

Untersuchen Sie die Lage der Ebene $E: x_1 - x_2 + x_3 = -2$ zur Ebene $F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$.

Lösung

1. *Prüfen, ob die Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$ der Ebenen E und F kollinear sind:*
   $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = -\vec{n}_F$; $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$ sind kollinear, also sind E und F parallel oder identisch.
2. *Punktprobe durch Einsetzen von $P(-2|-2|-2)$ aus F in E:*
   $-2 - (-2) + (-2) = -2$. Der Punkt P liegt in E, also sind E und F identisch.

Beispiel 3 **Die Lagebeziehung einer Geraden zu einer Ebene untersuchen**

a) Die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$ sind gegeben.
Untersuchen Sie die Lagebeziehung mithilfe eines LGS.

b) Untersuchen Sie rechnerisch die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Ebene
$E: 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 8$ mit der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0{,}5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\0{,}5\end{pmatrix}$.

Lösung

a) 1. *Gleichsetzen von E und g:* $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$.

2. *Notieren des LGS:*

I	r	$-3s$	$-5t$	$=$	1	*Gleichungen koordinatenweise notieren, r, s und t auf eine Seite bringen.*
II	r		$-2t$	$=$	1	
III	r	$+2s$		$=$	1	

Die Lösung des LGS kann händisch oder mit einem MMS ermittelt werden:

ohne MMS

I	r	$-3s$	$-5t$	$=$	1
$II_a = I - II$		$-3s$	$-3t$	$=$	0
$III_a = I - III$		$-5s$	$-5t$	$=$	0
I	r	$-3s$	$-5t$	$=$	1
II_a		$-3s$	$-3t$	$=$	0
$III_b = 5 \cdot II_a - 3 \cdot III_a$				$=$	0

mit MMS

CAS

linSolve $\left(\begin{cases} r - 3 \cdot s - 5 \cdot t = 1 \\ r - 2 \cdot t = 1 \\ r + 2 \cdot s = 1 \end{cases}, \{r, s, t\}\right)$

$\rightarrow \{2 \cdot c1 + 1, -c1, c1\}$

Es gibt unendlich viele Lösungen, also liegt g in E.

b) 1. *Punkte von g koordinatenweise notieren:* $x_1 = 1 + 3r$; $x_2 = 3r$; $x_3 = 0{,}5 + 0{,}5r$
2. *Einsetzen in E:* $3 \cdot (1 + 3r) - 4 \cdot (3r) + 6 \cdot (0{,}5 + 0{,}5r) = 9r - 12r + 3r + 3 + 3 = 6 \neq 8$.
Es gibt keine gemeinsamen Punkte, also verläuft g parallel zu E.

D1 **MMS-Anleitung** Gleichungssysteme

Aufgaben

○ **1** Ordnen Sie die Situationen den Gleichungen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

A $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}30\\4\\8\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0{,}1\\-1\end{pmatrix}$ und $E: x_3 = 25$

B $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2{,}5\\5\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0{,}5\end{pmatrix}$ und $E: x_1 = 2$

C $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0{,}2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ und $E: x_2 = 10$

D $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-10\\2\\17\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ und $E: x_3 = 15$

1 Ein Vogel überfliegt ein Flachdach.

2 Ein Hubschrauber landet auf einem Dach.

3 Ein Spot strahlt an eine Hauswand.

4 Ein Aufzug fährt außen an einem Hochhaus.

○ **2** Untersuchen Sie jeweils die Lage der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ zur Ebene E.

Lerntipp Seite 251, Beispiel 1

a) $E: 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 16$ b) $E: 3x_1 - x_3 = 10$ c) $E: -2x_1 + x_2 + x_3 = 0$

d) $E: 4x_1 - 2x_2 = 4$ e) $E: -5x_1 + 4x_2 - x_3 = 5$ f) $E: -3x_1 - 6x_2 - 9x_3 = 4$

○ **3** Untersuchen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte von g und E. Bestimmen Sie für den Fall, dass die Gerade g die Ebene E schneidet, die Koordinaten des Schnittpunkts.

Lerntipp Seite 251, Beispiel 1

a) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = 0$ und $g: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

b) $E: 17x_1 + 12x_2 + 16x_3 = 46$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}22\\-18\\-7\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$

c) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\1\\-9\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix} = 0$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2\\-10\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}$

○ **4** Es sind die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und die drei Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ gegeben.

Lerntipp Seite 252, Beispiel 3

a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung von E zu jeder der drei Geraden, indem Sie die Parameterdarstellungen gleichsetzen und das so aufgestellte lineare Gleichungssystem lösen.

b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform an. Untersuchen Sie nun jeweils die Lagebeziehung von E zu jeder der drei Geraden, indem Sie die Gerade koordinatenweise notieren und in die Gleichung von E einsetzen.

c) Beurteilen Sie, ob Sie das Vorgehen in den Teilaufgaben a) oder b) vorteilhafter finden.

○ **5** Untersuchen Sie, ob die Ebenen E und F sich schneiden, parallel oder identisch sind.

Lerntipp Seite 252, Beispiel 2

a) $E: -4x_1 + 6x_2 - 1{,}5x_3 = 12$ und $F: 16x_1 - 24x_2 + 6x_3 = 48$

b) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\1\\-5\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix} = 0$ und $F: \vec{x} = \begin{pmatrix}11\\10\\-5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix}$

Test 1

Lösungen, Seite 501

○ **6** Untersuchen Sie jeweils die Lage der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix}$ zu der Ebene E.

Bestimmen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts.

a) $E: 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 21$ b) $E: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ c) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}-8\\-4\\2\end{pmatrix} = 0$

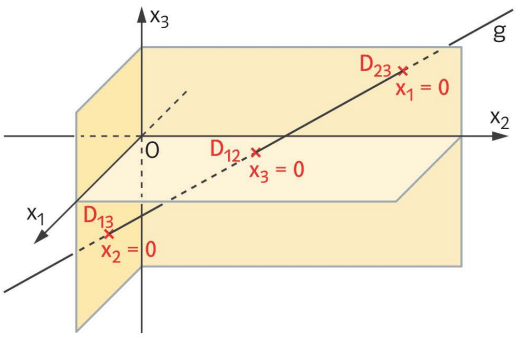
◒ **7** Gegeben sind $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ und $E_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix} = 0$ sowie die Gerade g durch die Punkte $P(1|2|4)$ und $Q(4|5|5)$.

a) Weisen Sie nach, dass es sich bei E_1 und E_2 um dieselbe Ebene E handelt.

b) Untersuchen Sie die Lage von g zu E. Wählen Sie hierfür eine der Ebenendarstellungen aus und begründen Sie Ihre Wahl.

◒ **8** Es sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}5\\4\\-2\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $k: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-10\\-8\\4\end{pmatrix}$ gegeben. Weisen Sie nach, dass die Geraden g, h und k in drei verschiedenen zueinander parallelen Ebenen liegen, und geben Sie jeweils eine Gleichung der drei Ebenen an. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

9 Untersuchen Sie jeweils mithilfe des Richtungsvektors der Geraden g und eines Normalenvektors der entsprechenden Koordinatenebene, ob g diese durchstößt. Berechnen Sie gegebenenfalls die Schnittpunkte. (In der Abbildung ist D_{12} der Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene.)



a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ b) $g: x = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ d) $g: \vec{x} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

10 a) Untersuchen Sie die Lage der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3{,}5\end{pmatrix}$ zur Ebene E, in der die Punkte $A(0|-7|0)$, $B(7|0|0)$ und $C(0|0|-2)$ liegen.

b) Vergleichen Sie Ihr Vorgehen mit einem Partner oder einer Partnerin.

c) Geben Sie jeweils eine Gleichung einer zu E parallelen Ebene F bzw. einer zu E orthogonalen Ebene G an. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

11 **Finden Sie den Fehler!**

Yoshi, Yuki und Takeo haben die Lage von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$ zu $E: \vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ untersucht. Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie die richtige Lösung.

Yoshi
Ich setze gleich:

$$s\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$$

Das MMS liefert:

CAS
linSolve $\left(\begin{cases}-3\cdot x+y=2\cdot y\\-2\cdot y=4-3\cdot y,\{x,y\}\\2\cdot x+y=2+3\cdot y\end{cases}\right)$
→ „Keine Lösung gefunden"

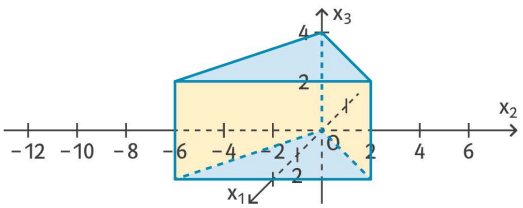
Die Gerade verläuft parallel zur Ebene.

Yuki
Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$ und der Spannvektor $\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ stehen senkrecht aufeinander, also ist klar, dass g die Ebene E senkrecht schneidet.

Takeo
Die Ebene enthält den Ursprung, die Gerade definitiv nicht, also sind sie parallel.

12 a) Gegeben sind die fünf Ebenen $E_1: x_3 = 0$, $E_2: x_3 = 4$, $E_3: x_1 + x_2 = 0$, $E_4: -x_1 + x_2 = 0$ und $E_5: x_1 = 4$. Begründen Sie, dass diese Ebenen das nebenstehende Prisma mit dem Eckpunkt $(4|-4|0)$ einschließen.

b) Berechnen Sie das Volumen des Prismas.



13 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Falls das Skalarprodukt eines zu einer Ebene senkrecht stehenden Vektors mit einem Richtungsvektor einer Geraden gleich null ist, dann verläuft die Gerade parallel zur Ebene.

b) Falls ein Richtungsvektor einer Geraden orthogonal zu jedem der beiden Spannvektoren einer Ebene ist, dann schneidet die Gerade die Ebene.

c) Wenn eine Gerade parallel zu einer Ebene verläuft, dann ist einer der beiden Spannvektoren der Ebene ein Vielfaches des Richtungsvektors der Geraden.

Test 2

Lösungen, Seite 502

14 **a)** Gegeben ist die Ebene $E: -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$. Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an, die

(1) parallel zur Ebene E verläuft,
(2) vollständig in E liegt,
(3) E orthogonal schneidet,
(4) E schneidet, jedoch nicht orthogonal.

b) Gegeben ist die Ebene $E: 1{,}5x_2 - 2{,}5x_3 = 4$. Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Ebene in Koordinatenform an, die

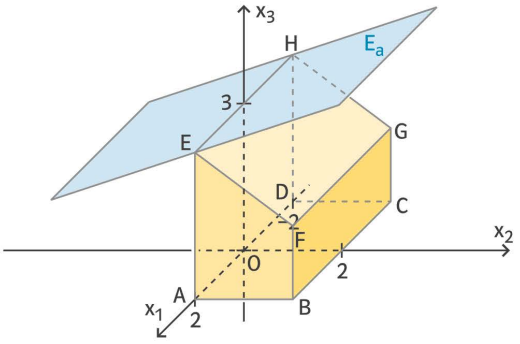
(1) zur Ebene E parallel verläuft,
(2) die Ebene E orthogonal schneidet,
(3) die Ebene E so schneidet, dass die x_1-Achse die Schnittgerade ist.

15 Gegeben sind das Prisma rechts mit den Punkten E(2|0|3) und F(2|2|1,5) sowie die Ebenenschar $E_a: ax_2 + x_3 = 3$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Weisen Sie nach, dass die Kante $\overline{EH}$ für alle Werte von a in E_a liegt.

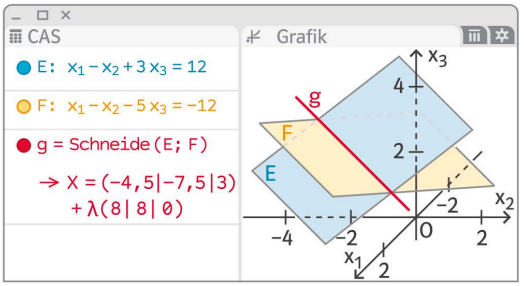
b) Stellen Sie für drei verschiedene Werte von a die Ebenengleichungen auf und untersuchen Sie den Einfluss des Parameters a auf die Lage der Ebene.

c) Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die Fläche EFGH in der Ebene E_a liegt.



16 **Die Schnittgerade zweier Ebenen bestimmen**

Die beiden Ebenen $E: x_1 - x_2 + 3x_3 = 12$ und $F: x_1 - x_2 - 5x_3 = -12$ müssen sich schneiden, da ihre Normalenvektoren nicht parallel sind. Eine dynamische Geometriesoftware liefert über die Funktion „Schneide zwei Flächen" als Ergebnis eine Geradengleichung g (s. Abbildung).



a) Begründen Sie, dass das Schnittgebilde eine Gerade sein muss.

b) Versuchen Sie herauszufinden, wie man rechnerisch vorgehen könnte, um aus den beiden Koordinatengleichungen der Ebenen die Gleichung der Schnittgeraden zu ermitteln. Alternativ können Sie auch Parametergleichungen der beiden Ebenen aufstellen und mit einem linearen Gleichungssystem arbeiten. Tauschen Sie sich gegenseitig aus.

c) Bestimmen Sie nun die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen E_1 und E_2 mit dem dynamischen Geometriemodul Ihres MMS.

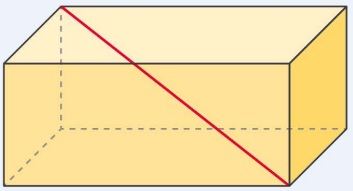
(1) $E_1: x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$ und $E_2: 6x_1 + x_2 - x_3 = -7$
(2) $E_1: x_1 + 5x_3 = 8$ und $E_2: x_1 + x_2 + x_3 = -1$
(3) $E_1: 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1$ und $E_2: x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 9$
(4) $E_1: 4x_2 = 5$ und $E_2: 6x_1 + 5x_3 = 0$

Grundwissen Test — Längen von Diagonalen berechnen

Grundwissen, Seite 418
Lösungen, Seite 502

G **17** **a)** Berechnen Sie die Länge der Diagonale eines Rechtecks mit den Seitenlängen 5 LE und 12 LE.

b) Berechnen Sie die Länge der Raumdiagonale in dem Quader mit den Kantenlängen 2 LE, 3 LE und 5 LE.

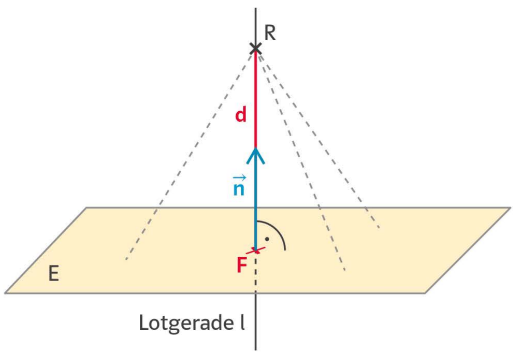


2 Abstand eines Punktes von einer Ebene

„Der Ballon befindet sich 25 m über der Insel!“
Beurteilen Sie diese Aussage.

Mithilfe von Vektoren kann man nicht nur die Lage von Objekten im Raum untersuchen, sondern auch Abstände bestimmen.

In der Geometrie bezeichnet man die kürzeste Entfernung zwischen zwei Objekten als Abstand. Um den Abstand d eines Punktes R von einer Ebene E zu bestimmen, fällt man das Lot von R auf die Ebene. Die **Lotgerade** l steht senkrecht auf E und der Lotfußpunkt F, also der Schnittpunkt der Lotgeraden l mit der Ebene E, ist dann derjenige Punkt der Ebene E, der die kürzeste Entfernung zum Punkt R hat. Der gesuchte Abstand entspricht damit der Länge der Strecke $\overline{FR}$.



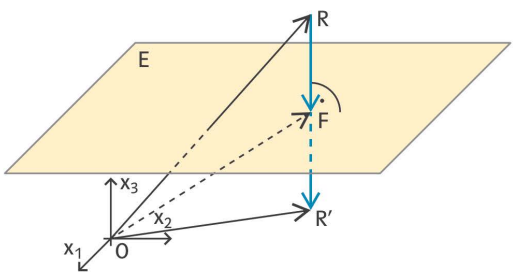
Eine Lotgerade steht senkrecht auf einer Ebene oder einer Geraden.

Um die Koordinaten des **Lotfußpunkts** zu berechnen, schneidet man die Lotgerade l mit der Ebene E. Als Richtungsvektor der Lotgeraden kann man den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E und als Stützvektor den Ortsvektor des Punktes R verwenden.

Abstand eines Punktes von einer Ebene
Der Abstand eines Punktes R von einer Ebene E ist die kürzeste Entfernung von R zu E.
Um den Abstand d des Punktes R mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ von der Ebene E zu bestimmen, kann man wie folgt vorgehen:

1. Bestimmen eines Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene E, sofern dieser nicht gegeben ist.
2. Aufstellen einer Gleichung der Lotgeraden durch R auf die Ebene E, z. B. $l: \vec{x} = \vec{r} + t \cdot \vec{n}$.
3. Berechnen der Koordinaten des Lotfußpunkts F als Schnittpunkt von g mit der Ebene E.
4. Berechnen des Betrags des Vektors $\overrightarrow{RF}$ und damit des Abstands $d = |\overrightarrow{RF}|$.

Spiegelung eines Punktes an einer Ebene
Die Lotgerade eines Punktes R auf eine Ebene E lässt sich auch nutzen, um den Punkt R an der Ebene E zu spiegeln, denn für den Ortsvektor des Spiegelpunkts R′ gilt die Beziehung $\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{RF}$ (s. rechts). Dabei ist F der Fußpunkt des Lotes von R auf die Ebene E.



Beispiel 1 **Den Abstand eines Punktes von einer Ebene bestimmen**

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $Q(2|0|1)$ von der Ebene $E: x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 25$.

Lösung

1. *Ablesen der Koordinaten eines Normalenvektors:* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$.
2. *Aufstellen einer Gleichung der Lotgeraden mit Stützvektor* $\overrightarrow{OQ}$*:* $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$.
3. *Einsetzen der Koordinaten von l in* $E: (2 + r) + 8 \cdot (8r) - 4 \cdot (1 - 4r) = 25$ *ergibt* $81r - 2 = 25$, also $81r = 27$ und damit $r = \frac{1}{3}$.
   Berechnen der Koordinaten des Lotfußpunkts F durch Einsetzen von $r = \frac{1}{3}$ *in l:*
   $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$, also $F\left(\frac{7}{3}\middle|\frac{8}{3}\middle|-\frac{1}{3}\right)$.
4. *Berechnen des Abstands:* $d = \left|\overrightarrow{QF}\right| = \sqrt{\left(\frac{7}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{9}} = 3\,[\text{LE}]$.

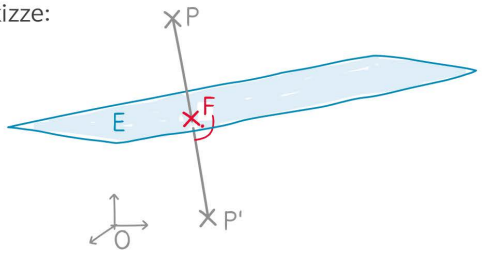
Beispiel 2 **Einen Punkt an einer Ebene spiegeln**

Spiegeln Sie den Punkt $P(2|-4|6)$ an der Ebene $E: 3x_1 - 4x_3 = -5{,}5$ und geben Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts an. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

Lösung

1. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Skizze:



2. Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
3. l in $E: 3 \cdot (2 + 3t) - 4 \cdot (6 - 4t) = -5{,}5$,
   also $9t + 16t + 6 - 24 = -5{,}5$,
   also $25t = 12{,}5$ und damit $t = 0{,}5$.
4. $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, also $F(3{,}5|-4|4)$ und $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
5. $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Man erhält damit $P'(5|-4|2)$.

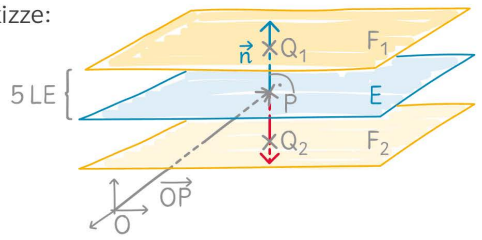
Beispiel 3 **Zu einer gegebenen Ebene eine bestimmte parallele Ebene ermitteln**

Gegeben ist die Ebene $E: 6x_1 + 8x_3 = 20$, die den Punkt $P(10|2|-5)$ enthält. Stellen Sie jeweils eine Gleichung für die beiden Ebenen F_1 und F_2 auf, die von der Ebene E den Abstand 5 LE haben. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

Lösung

1. *F_1 und F_2 sind parallel zu E, man kann jeweils den Normalenvektor von E verwenden.*
   $F_1: 6x_1 + 8x_3 = c$ bzw. $F_2: 6x_1 + 8x_3 = d$

Skizze:



2. *Da* $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = 10$, *gelangt man zu einem Punkt Q_1 in F_1 bzw. Q_2 in F_2, indem man von P aus eine halbe Länge in Richtung von* $\vec{n}$ *bzw. in entgegengesetzter Richtung von* $\vec{n}$ *geht:*
   $\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{OQ_2} = \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$,
   also $Q_1(13|2|-1)$ und $Q_2(7|2|-9)$.
3. *Einsetzen der Koordinaten von Q_1 in F_1:* $c = 6 \cdot 13 + 8 \cdot (-1) = 70$, $F_1: 6x_1 + 8x_3 = 70$
   Einsetzen der Koordinaten von Q_2 in F_2: $d = 6 \cdot 7 + 8 \cdot (-9) = -30$, $F_2: 6x_1 + 8x_3 = -30$

Aufgaben

1 Berechnen Sie jeweils die Abstände der Punkte A und B von der Ebene E.

a) E: $3x_2 + 4x_3 = 0$, $A(3|-1|7)$ und $B(6|8|19)$

b) E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$, $A(-2|0|3)$ und $B(13|8{,}5|-0{,}5)$

c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A(2|4|13)$ und $B(8|-6|-11)$

Lerntipp
Seite 257, Beispiel 1

Lösungen zu Aufgabe 1

≈ 7,4 | 18,8 | 3,5 | ≈ 15,3 | ≈ 10,3 | 14

2 a) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(1|-2|-3)$ von der x_1x_2-Ebene. Leiten Sie hieraus ab, wie man das Ergebnis an den Koordinaten von P ablesen kann.

b) Bestimmen Sie mit der in Teilaufgabe a) ermittelten Methode die Abstände des Punktes P von den anderen Koordinatenebenen.

3 Gegeben sind die drei Ebenen $E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E_3: x_1 + x_2 = 2$.

a) Beschreiben Sie die Lage der drei Ebenen im Raum.

b) Bestimmen Sie nun jeweils den Abstand des Koordinatenursprungs von den drei Ebenen.

c) Spiegeln Sie den Koordinatenursprung jeweils an den drei Ebenen und geben Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts an.

4 Spiegeln Sie den Punkt A an der Ebene E. Geben Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts an.

a) $A(-3|0|0)$ an E: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

b) $A(-2{,}5|5{,}5|4)$ an E: $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$

c) $A(2|0{,}2|4)$ an E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

d) $A(-2{,}5|-1{,}5|2)$ an E: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lerntipp
Seite 257, Beispiel 2

5 Gegeben ist die Ebene E, die den Punkt P enthält. Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung einer Ebene F, die von E den angegebenen Abstand hat. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

a) E: $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -20$; $P(2|0|-4)$; Abstand = 7 LE

b) E: $4x_1 + x_2 - 8x_3 = -17$; $P(-1|3|2)$; Abstand = 18 LE

Lerntipp
Seite 257, Beispiel 3

Test 1

Lösungen, Seite 502

6 Gegeben sind die Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ und der Punkt $P(2|2|-2)$.

a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

b) Spiegeln Sie den Punkt P an der Ebene E. Geben Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts an.

7 Gegeben ist die Ebene E: $2x_1 + 6x_2 - 9x_3 = -6$, die den Punkt $P(0|2|2)$ enthält. Stellen Sie jeweils eine Gleichung für die beiden Ebenen F_1 und F_2 auf, die von E den Abstand 33 haben. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

8 Gegeben sind der Punkt $R(5|-4|3)$ und die Ebene E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes R von der Ebene E sowie drei weitere Punkte, die den gleichen Abstand von E haben.

b) Beschreiben Sie, wo alle Punkte liegen, die den Abstand 7 von der Ebene E haben.

c) Bestimmen Sie die Gleichung einer Ebene F, die vom Punkt R den Abstand 7 hat und die Ebene E schneidet.

9 a) Hala hat im Jahr 2023 eine KI befragt. Beurteilen Sie die Antwort der KI.

> Was ist der Abstand von einem Punkt zu einer Ebene?
>
> Der Abstand von einem Punkt zu einer Ebene ist der kürzeste Abstand zwischen dem Punkt und einer beliebigen Stelle auf der Ebene.

b) Versuchen Sie, einen Prompt zu finden, der eine korrekte Erläuterung der KI liefert.

10 Die Punkte $A(1|1|-2)$, $B(3|0|0)$, $C(-2|3|-3)$ und $D(0|3|3)$ liegen in der Ebene $E: 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 9$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunkts F des Lotes von $P(1|7|-4)$ auf E sowie den Abstand von P zu E.

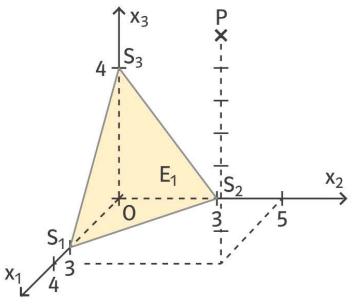
b) Lukas und Yakin wollen unter den Punkten A bis D denjenigen finden, der P am nächsten liegt. Erläutern Sie die Ansätze. Bestimmen Sie mit beiden Ansätzen den gesuchten Punkt.

Yakin:
„Ich berechne $|\overrightarrow{PA}|$, $|\overrightarrow{PB}|$ usw."

Lukas:
„Ich berechne $|\overrightarrow{FA}|$, $|\overrightarrow{FB}|$ usw."

11 a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E_1 in der Abbildung rechts.

b) Gegeben sind die Ebene $E_2: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$ und der Punkt $Q(5|8|-9)$. Bestimmen Sie den Lotfußpunkt F von Q auf E_2.
Zeichnen Sie einen Ausschnitt der Ebene E_2 sowie die Punkte Q und F in ein Koordinatensystem.



12 Der Punkt $P(3|1|1)$ liegt auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes P von der Ebene $E: 2x_1 + 10x_2 + 11x_3 = 252$.

b) Es gibt einen weiteren Punkt auf der Geraden g, der von E den Abstand d aus Teilaufgabe a) hat. Berechnen Sie seine Koordinaten.

13 Gegeben sind die Ebenen $E: x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$ und $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

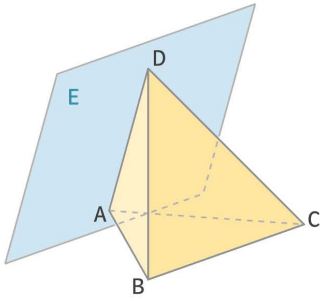
a) Weisen Sie nach, dass E und F parallel sind, und bestimmen Sie ihren Abstand.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $M\left(\frac{1}{6}\middle|\frac{8}{3}\middle|\frac{31}{6}\right)$ zu den Ebenen E und F denselben Abstand hat.

c) Der Punkt M wird jeweils an beiden Ebenen E und F gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spiegelpunkte.

14 a) Spiegeln Sie die Pyramide ABCD mit den Punkten $A(1|-1|0)$, $B(0|4|0)$, $C(-4|0|0)$ und $D(0|0|4)$ an der Ebene $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ (s. Abbildung).
Geben Sie die Koordinaten der Spiegelpunkte an.

b) Die Pyramide ABCD ist spiegelsymmetrisch. Ermitteln Sie eine geeignete Spiegelebene F.



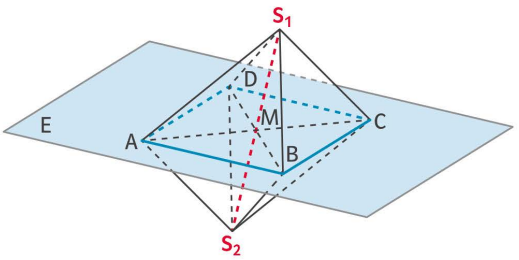
Test 2

Lösungen, Seite 503

15 Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$ und die Punkte $M(4|1|0)$ sowie $A(5|1|-1)$.

a) Bestimmen Sie die Pyramidenspitzen S_1 und S_2 so, dass die Körper $ABCDS_1$ bzw. $ABCDS_2$ quadratische Pyramiden mit der Höhe 6 LE sind und auf E senkrecht stehen.

b) Berechnen Sie das Volumen der Doppelpyramide $ABCDS_1S_2$.



16 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Wenn zwei Punkte A und B auf einer Geraden g liegen und denselben Abstand zu einer Ebene E haben, verläuft g parallel zu E.

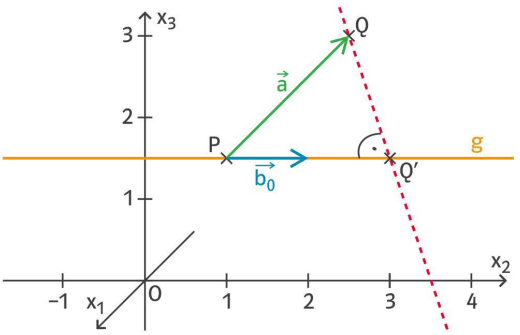
b) Wenn ein Punkt nacheinander an zwei verschiedenen Koordinatenebenen gespiegelt wird, entspricht dies einer Spiegelung an einer Koordinatenachse.

c) Wenn ein Punkt P senkrecht auf eine Ebene E projiziert wird, wird immer eine der drei Koordinaten des Punktes P gleich null gesetzt.

17 a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b_0} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (s. Abbildung).

Berechnen Sie $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{b_0}|$ sowie $\vec{a} \circ \overrightarrow{b_0}$ und stellen Sie einen Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt $\vec{a} \circ \overrightarrow{b_0}$ und dem Dreieck PQ'Q her.

Hinweis: Man nennt den Vektor $\overrightarrow{b_0}$ einen normierten Vektor und Q' die Projektion des Punktes Q auf die Gerade g.



Man nennt $\overrightarrow{PQ'}$ auch die Projektion von $\overrightarrow{PQ}$ auf g. Man kann sich die Projektion als „Schatten" von $\overrightarrow{PQ}$ auf g vorstellen.

b) Für das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt $\vec{a} \circ \vec{b} = \cos(\alpha) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Begründen Sie mithilfe dieser Gleichung und einer geeigneten Skizze, dass das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \overrightarrow{b_0}$ mit einem normierten Vektor $\overrightarrow{b_0}$ die Länge der Projektion von $\vec{a}$ auf $\overrightarrow{b_0}$ liefert.

c) Erläutern Sie, dass man mithilfe eines Skalarprodukts der Form $\vec{a} \circ \overrightarrow{b_0}$ auch den Abstand eines Punktes Q von einer Geraden g bestimmen kann, wenn man wie folgt vorgeht:

1. Man bringt den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g auf die Länge 1 und erhält $\overrightarrow{u_0}$.
2. Man wählt einen Punkt P auf der Geraden g und berechnet $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{u_0}$.
3. Man erhält den Abstand d von Q zu g mit $d = \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{u_0})^2}$.

d) Ermitteln Sie mit der obigen Methode den Abstand des Punktes R von der Geraden g.

(1) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-3\\0\\-4\end{pmatrix}$, $R(1|2|1)$

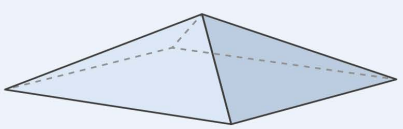
(2) $g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $R(0|-1|-2)$

Grundwissen Test

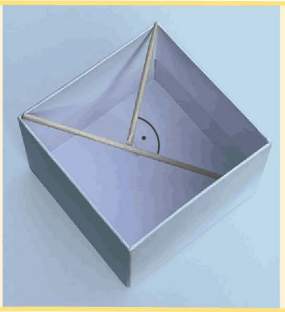
Volumen einer Pyramide berechnen

Grundwissen, Seite 419
Lösungen, Seite 503

G **18** Berechnen Sie die Höhe einer quadratischen Pyramide, deren Grundfläche einen Inhalt von 36 FE hat und deren Mantelkante 5 LE lang ist.



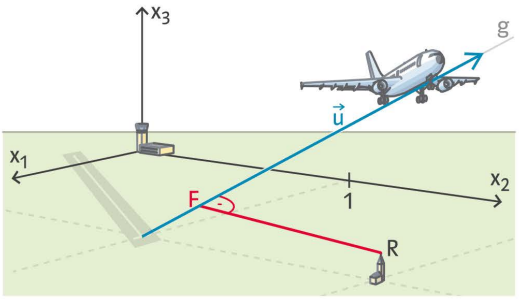
3 Abstand eines Punktes von einer Geraden



Der abgebildete quadratische Karton ist 9 cm breit und 6 cm hoch.
Wie lang ist wohl das kurze Stäbchen?
Überlegen Sie, wie man vorgehen könnte, um die gesuchte Länge zu ermitteln.

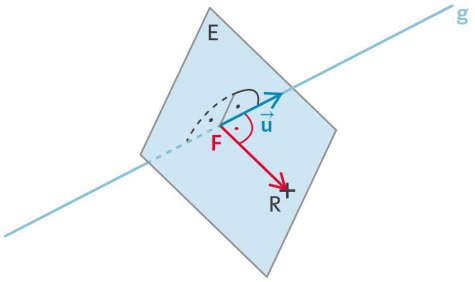
Es gibt Situationen, in denen nicht der **Abstand eines Punktes** von einer Ebene, sondern **von einer Geraden** relevant ist.

Es soll untersucht werden, ob das Flugzeug in der Abbildung in seinem Steigflug einen Sicherheitsabstand von 500 m zur Kirchturmspitze $R(1|2|0{,}08)$ einhält (1 LE = 1 km).
Das Flugzeug bewegt sich auf der Geraden
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor.



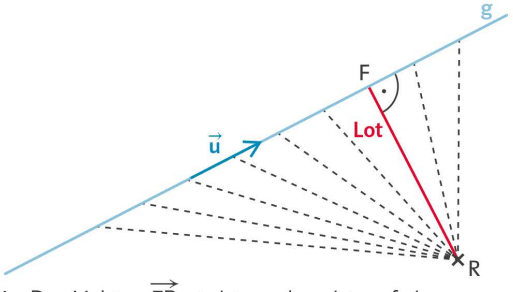
Um den Abstand von R zu g zu bestimmen, fällt man das Lot von R auf g. Der Lotfußpunkt F ist dann der Punkt der Geraden g mit der kürzesten Entfernung zu R, die der Länge des Vektors $\overrightarrow{FR}$ entspricht. Der Lotfußpunkt F lässt sich auf zwei Arten ermitteln.

1. Methode: eine Hilfsebene aufstellen



1. Man stellt eine Hilfsebene E auf, die senkrecht auf g steht und den Punkt R enthält. Als Normalenvektor $\vec{n}$ dient der Richtungsvektor $\vec{u}$ von g, also $E: 2x_1 + 3x_2 + x_3 = c$. Setzt man die Koordinaten von R ein, erhält man $E: 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8{,}08$.
2. Nun schneidet man die Gerade g mit der Hilfsebene E, indem man die allgemeinen Koordinaten von g in E einsetzt. So erhält man den Lotfußpunkt $F(1{,}44|1{,}66|0{,}22)$.

2. Methode: Orthogonalität nutzen



1. Der Vektor $\overrightarrow{FR}$ steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{u}$. Man sucht für den allgemeinen Geradenpunkt $F_t(1 + 2t|1 + 3t|t)$ den Wert von t, für den $\overrightarrow{F_tR} \circ \vec{u} = 0$ gilt.
2. $\overrightarrow{F_tR} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix}-2t\\1-3t\\0{,}08-t\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = -14t + 3{,}08.$
   Mit $-14t + 3{,}08 = 0$ erhält man $t = 0{,}22$.
   Das Einsetzen von $t = 0{,}22$ in die Gleichung von g liefert $F(1{,}44|1{,}66|0{,}22)$.

3. Der Abstand von R zur Geraden g beträgt damit $|\overrightarrow{FR}| = \sqrt{0{,}3228} \approx 0{,}573$.
   Das Flugzeug kommt der Kirchturmspitze nicht näher als 573 m, hält also nach diesem Modell den Abstand ein.

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Der **Abstand** eines Punktes R von einer Geraden g ist die kürzeste Entfernung von R zu g.
Zur Berechnung des Abstands d kann man so vorgehen:

1. Aufstellen einer Gleichung der Hilfsebene E, die orthogonal zu g ist und R enthält.
2. Berechnen der Koordinaten des Lotfußpunkts F als Schnittpunkt von g mit E.
3. Berechnen des Betrags des Vektors $\overrightarrow{FR}$ und damit des Abstands d, da $d = |\overrightarrow{FR}|$ gilt.

Alternativ kann man zur Bestimmung von F die Orthogonalitätsbedingung $\overrightarrow{FR} \circ \vec{u} = 0$ nutzen, wobei $\vec{u}$ der Richtungsvektor der Geraden g ist.

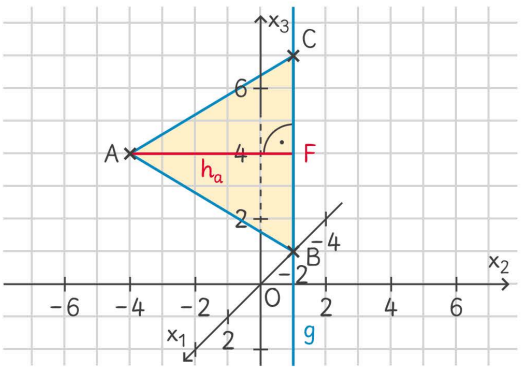
Beispiel **Den Flächeninhalt eines Dreiecks im Raum bestimmen**

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit $A(2|-3|5)$, $B(4|3|3)$ und $C(-2|0|6)$ und der Grundseite $\overline{BC}$.

Lösung

1. $|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}-6\\-3\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{36+9+9} = \sqrt{54} \approx 7{,}35.$

Skizze:



2. *Die Höhe h_a des Dreiecks entspricht dem Abstand des Punktes A von der Seite $\overline{BC}$ bzw. von der Geraden* $g: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + k \cdot \overrightarrow{BC}$.
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}-6\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-6k\\3-3k\\3+3k\end{pmatrix}$
3. *Zur Bestimmung des Abstands von A zu g wird eine Hilfsebene E mit $\vec{u}$ als Normalenvektor aufgestellt, die den Punkt A enthält:*
$E: -6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = c.$
Das Einsetzen der Koordinaten von A liefert $-6 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 = 12$ *und somit*
$E: -6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 12$ bzw. $E: -2x_1 - x_2 + x_3 = 4.$
4. *Nun berechnet man den Schnittpunkt F der Geraden g mit E, indem man die allgemeinen Koordinaten von g in E einsetzt:* $-2 \cdot (4-6k) - (3-3k) + (3+3k) = 4$. *Zusammengefasst ergibt sich* $18k - 8 = 4$ *und damit* $18k = 12$, *also* $k = \frac{2}{3}$. *Das Einsetzen von* $k = \frac{2}{3}$ *in die Gleichung der Geraden g liefert* $\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix}-6\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$ *und damit den Lotfußpunkt* $F(0|1|5)$.
5. $|\overrightarrow{FA}| = \left|\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{20} \approx 4{,}47$; *dies ist der Abstand des Punktes A von der Geraden g_{BC} und damit die Höhe h_a des Dreiecks.*
6. Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot h_a \approx 0{,}5 \cdot 7{,}35 \cdot 4{,}47 \approx 16{,}43$ [FE].

Aufgaben

○ **1** Berechnen Sie den Abstand des Punktes $R(2|-2|2)$ zur Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ mit beiden Methoden, indem Sie einmal eine Hilfsebene aufstellen und einmal die Orthogonalität von Vektoren nutzen (s. Seite 261). Verwenden Sie die Ansätze und führen Sie diese fort.

1. Methode: $2x_1 - x_3 = c$
$2 \cdot 2 - 2 = 4 - 2 = 2$
also: $2x_1 - x_3 = 2$

2. Methode: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2\lambda\\-1\\5-\lambda\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1+2\lambda\\-1\\5-\lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda-1\\1\\3-\lambda\end{pmatrix}$

○ **2** Berechnen Sie den Abstand der Punkte P(9|11|6) und Q(9|4|9) von der Geraden g mit der Methode „Hilfsebene aufstellen“ oder der Methode „Orthogonalität nutzen“ (s. Seite 261). Geben Sie die Koordinaten des Punktes der Geraden mit der geringsten Entfernung zu P bzw. Q an.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

○ **3** Berechnen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden g durch die Punkte A und B und bestimmen Sie anschließend den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

a) A(1|1|1), B(7|4|7), C(5|6|−1) **b)** A(1|−6|0), B(5|−8|4), C(5|7|7)

c) A(4|−2|1), B(−2|7|7), C(6|6|8) **d)** A(2|1|0), B(1|1|0), C(5|1|1)

Lerntipp Seite 262, Beispiel

Test 1

Lösungen, Seite 503

○ **4** Berechnen Sie den Abstand des Punktes R von der Geraden g. Geben Sie die Koordinaten des Punktes der Geraden mit der geringsten Entfernung zu R an.

a) R(−2|−1|1), $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** R(1|2|−3), $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

◒ **5** Gegeben sind der Punkt A(2|3|19) sowie die Gerade g durch die Punkte B(4|9|11) und C(3|4|7). Begründen Sie, dass B derjenige Punkt der Geraden g ist, der die geringste Entfernung vom Punkt A hat.

◒ **6** Je zwei der folgenden Geraden verlaufen parallel. Bestimmen Sie jeweils deren Abstand.

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}$

◒ **7** Spiegelt man die Punkte A(1|1|2) und D(−4|−9|14) an der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix}$, so erhält man das Trapez ABCD.

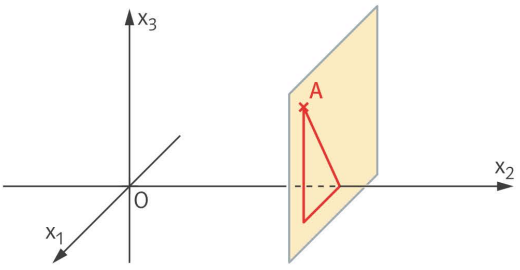
a) Bestimmen Sie die Punkte B und C als Spiegelpunkte von A und D und zeigen Sie, dass A, B, C und D in einer Ebene liegen.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes ABCD.

◒ **8** **a)** Berechnen Sie die Abstände des Punktes A(2|11|−5) zu den drei Koordinatenachsen mit beiden Methoden („Hilfsebene aufstellen“ und „Orthogonalität nutzen“).

b) Berechnen Sie die Abstände aus Teilaufgabe a) mithilfe des Satzes von Pythagoras.

c) Vergleichen Sie die Methoden der Abstandsberechnung. Nennen Sie Vor- und Nachteile.



◒ **9** Ein Ballon startet am Punkt A(2|5|0). Er bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit und ist nach 20 Minuten im Punkt B(4|8|1). Im Punkt C(3,5|7|0,5) befindet sich ein Sendemast (alle Angaben in km).

a) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem der Ballon dem Mast am nächsten kommt.

b) Beurteilen Sie, ob eine Kollision mit dem Mast ausgeschlossen werden kann.

10 Die Punkte A(−7|−5|2), B(1|9|6), C(5|−2|−1) und D(−2|0|9) sind die Ecken einer dreiseitigen Pyramide. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 503

11 Ein Hubschrauber fliegt im Dunkeln vom Punkt P(4|0|0,2) geradlinig in Richtung des Punktes Q(0|0|0,3). Auf dem Radar wird im Punkt K(10|0|0,1) die Kirchturmspitze des benachbarten Ortes angegeben (Angaben in km). Beurteilen Sie, ob die Kirchturmspitze für den Flug eine Gefahr darstellt.

12 **a)** Geben Sie drei verschiedene, zur Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$ parallele Geraden an, die vom Punkt P(2|4|2) den Abstand 5 LE haben.

b) Beschreiben Sie die besondere Lage der in Teilaufgabe a) angegebenen Geraden.

13 Gesucht ist der Abstand der Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-7\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, die zueinander parallel verlaufen. Beurteilen Sie die vier Lösungsvorschläge. Prüfen Sie, welche Ansätze zum Ziel führen.

A Anne:
Ich stelle eine Funktion auf, mit der ich den Abstand des Stützpunkts von g_1 zu einem beliebigen Punkt von g_2 berechnen kann. Dann bestimme ich das Minimum dieser Funktion.

B Benjamin:
Der Abstand ist 5. Das sieht man aufgrund der Koordinaten der Stützvektoren. Die Richtungsvektoren sind ja gleich.

C Hannes:
Ich suche zwei Punkte P_1 und P_2 auf g_1 und g_2, sodass der Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ orthogonal zu g_1 und g_2 steht.

D Amy:
Ich wähle einen zum Richtungsvektor von g_1 senkrechten Vektor als Richtungsvektor für eine Hilfsgerade durch einen Punkt von g_1, bestimme den Schnittpunkt mit g_2 und berechne den Abstand der beiden Punkte.

14 Erläutern Sie ein Verfahren, mit dem Sie die kürzeste Entfernung eines Punktes zu einer beliebigen Strecke im Raum bestimmen können. Fertigen Sie dazu zunächst Skizzen an.

15 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**
Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Wenn ein Punkt P denselben Abstand zu zwei Geraden g und h hat, dann verlaufen die Geraden parallel.

b) Wenn ein Punkt P denselben Abstand zu zwei parallelen Geraden g und h hat, dann liegt der Fußpunkt des Lotes von P auf die Ebene E, in der g und h liegen, zwischen g und h.

Grundwissen Test — Fehlende Größen im rechtwinkligen Dreieck berechnen

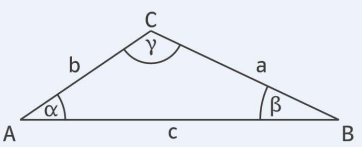
→ **Grundwissen**, Seite 418
Lösungen, Seite 504

G **16** Erstellen Sie zunächst eine Planfigur des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnen Sie dann die gesuchte Größe.

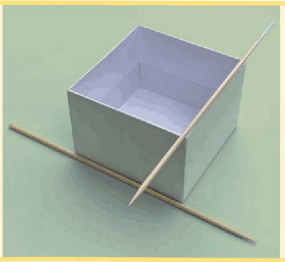
a) α = 30°; β = 90°; b = 4 cm; gesucht: a.

b) a = 6 cm; b = 5 cm; γ = 90°; gesucht: β.

c) a = 8 cm; α = 90°; γ = 40°; gesucht: b.



4 Abstand zwischen Geraden

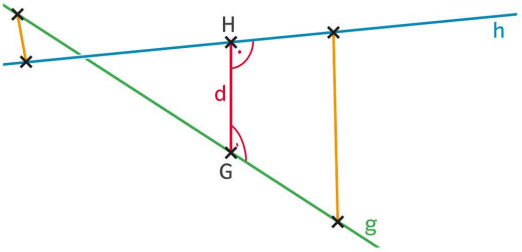


Welchen Abstand haben die beiden Stäbchen voneinander? Begründen Sie!

Die Frage nach dem Abstand zweier Geraden g und h ist nur für parallele oder windschiefe Geraden relevant. Den Abstand paralleler Geraden berechnet man, indem man den Abstand eines beliebigen Punktes der einen Geraden von der anderen Geraden ermittelt.
Bei zwei windschiefen Geraden gibt es zwei Vorgehensweisen.

1. Methode: Bestimmung der kürzesten Verbindungsstrecke

Die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen den Geraden g und h ist die Strecke $\overline{GH}$ (siehe Abbildung). Sie ist sowohl das Lot von G auf h als auch das Lot von H auf g und wird daher gemeinsames Lot von g und h genannt. Der Abstand der Geraden g und h entspricht der Länge der Strecke $\overline{GH}$.



1. Schritt: Bestimmen der Punkte G und H des gemeinsamen Lotes

Mit der Darstellung der Koordinaten $G_s(p_1 + s \cdot u_1 | p_2 + s \cdot u_2 | p_3 + s \cdot u_3)$ der Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$ und $H_t(q_1 + t \cdot v_1 | q_2 + t \cdot v_2 | q_3 + t \cdot v_3)$ der Geraden $h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$ stellt man ein lineares Gleichungssystem mit den Bedingungen $\overrightarrow{GH} \perp g$ und $\overrightarrow{GH} \perp h$ auf:

I $\overrightarrow{G_sH_t} \circ \vec{u} = 0$
II $\overrightarrow{G_sH_t} \circ \vec{v} = 0$

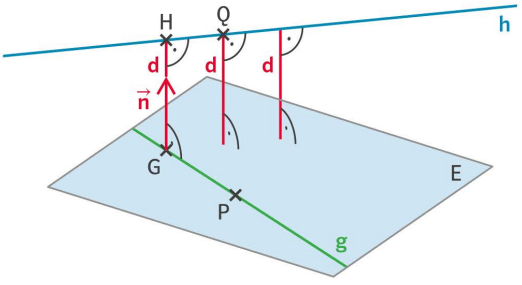
Die Lösung des LGS liefert die Werte für die Parameter s und t, mit denen man durch Einsetzen in die Geradengleichungen die Koordinaten der Lotfußpunkte G und H erhält.

2. Schritt: Berechnen des Abstands

Die Länge der Strecke $\overline{GH}$ liefert den Abstand d der Geraden g und h: $d = |\overrightarrow{GH}|$.

2. Methode: Rückführung auf den Abstand eines Punktes von einer Ebene

Zu zwei windschiefen Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$ lässt sich eine Hilfsebene E aufstellen, die g enthält und zu der h parallel verläuft (siehe Abbildung).



1. Schritt: Aufstellen einer Hilfsebene E

Die Ebene E kann z. B. aus dem Stützvektor $\vec{p}$ von g und einem Normalenvektor $\vec{n}$ gebildet werden, der senkrecht auf den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der beiden Geraden steht.

2. Schritt: Berechnen des Abstands

Den Abstand d von g und h erhält man, indem man den Abstand eines beliebigen Punktes H oder Q auf der Geraden h zur Ebene E berechnet.
Anders als bei der 1. Methode liefert diese Methode nur den Abstand, nicht jedoch die Punkte G und H auf den Geraden g und h, die die kürzeste Verbindungsstrecke markieren.

Der Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden

Den Abstand d zweier windschiefer Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$ kann man wie folgt ermitteln:

1. Bestimmen der Koordinaten der Lotfußpunkte G und H des gemeinsamen Lotes:
   - Berechnen des Vektors $\overrightarrow{G_sH_t} = \overrightarrow{OH_t} - \overrightarrow{OG_s}$ mit $G_s(p_1 + s \cdot u_1 | p_2 + s \cdot u_2 | p_3 + s \cdot u_3)$ und $H_t(q_1 + t \cdot v_1 | q_2 + t \cdot v_2 | q_3 + t \cdot v_3)$
   - Aufstellen und Lösen des LGS mit den Gleichungen $\begin{array}{ll} \text{I} & \overrightarrow{G_sH_t} \circ \vec{u} = 0 \\ \text{II} & \overrightarrow{G_sH_t} \circ \vec{v} = 0 \end{array}$

     Die Lösung liefert Werte für die Parameter s und t.
   - Berechnen der Koordinaten der Punkte G und H durch Einsetzen der Werte für s und t
2. Berechnen des Abstands. Es gilt: $d = |\overrightarrow{GH}|$

Alternativ berechnet man den Abstand eines Punktes der Geraden h von einer Hilfsebene E, die zu h parallel ist und g enthält. Man erhält so den Abstand der beiden Geraden, nicht jedoch die Punkte, die die kürzeste Verbindungsstrecke markieren.

Wie man mit dem „Kreuzprodukt" einen zu zwei Vektoren orthogonalen Vektor erhält, zeigt die Exkursion in Kapitel V auf Seite 204.

Beispiel **Abstand zweier windschiefer Geraden**

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, die zueinander windschief sind. Ermitteln Sie ihren Abstand mit zwei verschiedenen Methoden.

Lösung

1. Methode: Bestimmung der kürzesten Verbindungsstrecke

1. *Bestimmen der Lotfußpunkte G und H des gemeinsamen Lotes*
   - *Punkte auf g bzw. h:* $G_s(s|-1-s|1)$ und $H_t(9+2t|-8-3t|6+2t)$

     $\overrightarrow{G_sH_t} = \overrightarrow{OH_t} - \overrightarrow{OG_s} = \begin{pmatrix} 9+2t \\ -8-3t \\ 6+2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s \\ -1-s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+2t+9 \\ s-3t-7 \\ 2t+5 \end{pmatrix}$
   - Mit $\begin{pmatrix} -s+2t+9 \\ s-3t-7 \\ 2t+5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} -s+2t+9 \\ s-3t-7 \\ 2t+5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ erhält man das LGS:

     $\begin{array}{ll} \text{I} & -2s + 5t = -16 \\ \text{II} & -5s + 17t = -49 \end{array}$ mit der Lösung $s = 3$ und $t = -2$ *(händisch bzw. mit einem MMS).*
   - *Einsetzen der Werte von s und t in g bzw. h:* $G(3|-4|1)$ und $H(5|-2|2)$.
2. Der Abstand beträgt $d = |\overrightarrow{GH}| = \sqrt{(5-3)^2 + (-2+4)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9} = 3$.

2. Methode: Rückführung auf den Abstand eines Punktes von einer Ebene

1. *Aufstellen einer Hilfsebene E*
   - *Bestimmen von* $\vec{n}$ *mit den Richtungsvektoren von g und h:*

     $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ liefert $\begin{array}{ll} \text{I} & n_1 - n_2 = 0 \\ \text{II} & 2 \cdot n_1 - 3 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 = 0 \end{array}$

     $n_1 = n_2$ aus I in II eingesetzt, liefert $-n_2 + 2 \cdot n_3 = 0$.
     Man kann z.B. n_2 *frei wählen, mit* $n_2 = 2$ erhält man $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - *Einsetzen von* $P(0|-1|1)$ *aus g in* $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = c$ liefert $2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 1 = -1$, also $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1$.
2. *Berechnen des Abstands von* $Q(9|-8|6)$ *auf h zu E:*
   - *Lotgerade l durch Q mit* $\vec{n}$ *als Richtungsvektor:* $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2t \\ -8+2t \\ 6+t \end{pmatrix}$.
   - *Einsetzen von l in E:* $2 \cdot (9+2t) + 2 \cdot (-8+2t) + (6+t) = -1$ ergibt $t = -1$ und damit $F(7|-10|5)$.
   - Der Abstand beträgt $d = |\overrightarrow{QF}| = \sqrt{(7-9)^2 + (-10+8)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Aufgaben

○ **1** Berechnen Sie den Abstand der windschiefen Geraden. Geben Sie die Lotfußpunkte an.

Lerntipp Seite 266, Beispiel

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\6\\18\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\8\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

○ **2** Bestimmen Sie die geringste Entfernung der windschiefen Geraden nach der 2. Methode (s. Seite 265), indem Sie diese auf den Abstand eines Punktes von einer Ebene zurückführen.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

○ **3** a) Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\7\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}$. Ermitteln Sie die Koordinaten der Lotfußpunkte G und H des gemeinsamen Lotes der Geraden g und h.

b) Stellen Sie einem Partner oder einer Partnerin Ihren Lösungsweg vor und vergleichen Sie.

Test 1

Lösungen, Seite 504

○ **4** Ermitteln Sie den Abstand der windschiefen Geraden g und h.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\25\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}$ **b)** $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\5\\10\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

◒ **5** a) Auf den Kärtchen sind Geradenpaare abgebildet, deren Abstand ermittelt werden soll. Nutzen Sie, wo möglich, die besondere Lagebeziehung von g zu h.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$g: \vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\-1\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit einem Partner oder einer Partnerin und beurteilen Sie, wer vorteilhafter vorgegangen ist.

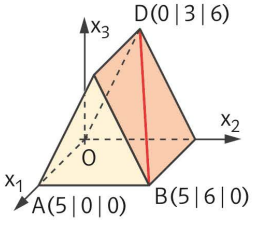
◒ **6** Jim hat im Jahr 2023 eine KI zum Abstand von Geraden befragt. Beurteilen Sie die Antwort der KI.

MK

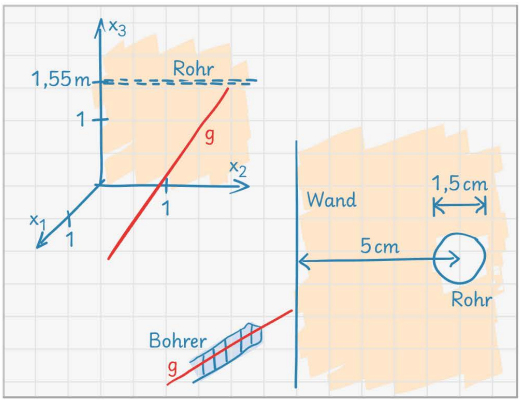
> Die kürzeste Entfernung zwischen zwei windschiefen Geraden kann durch den Abstand einer beliebigen Stelle auf der einen Geraden und der anderen Geraden berechnet werden. Es gibt jedoch keine Schnittpunkte zwischen den Geraden, da sie sich nicht schneiden. Daher ist der Abstand zwischen ihnen immer konstant.

◒ **7** Bestimmen Sie in einem Würfel der Kantenlänge 3 den Abstand einer Raumdiagonalen von einer Bodendiagonalen, die die Raumdiagonale nicht schneidet. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

◒ **8** Im nebenstehende Prisma sollen die Kanten $\overline{BD}$ und $\overline{OA}$ durch eine Strecke $\overline{EF}$ verbunden werden, die sowohl auf $\overline{BD}$ als auch auf $\overline{OA}$ senkrecht steht.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte E und F und berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{EF}$.



9 Der Koordinatenursprung eines Koordinatensystems mit der Längeneinheit 1 m liegt in der linken unteren Ecke des Zimmers der Abbildung rechts.
Auf einer Höhe von 1,55 m verläuft in der Hinterwand in 5 cm Tiefe eine Wasserleitung mit einem Durchmesser von 1,5 cm. Ein Heimwerker bohrt mit einem 6-mm-Bohrer ein Loch längs der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1{,}53 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Untersuchen Sie, ob der Bohrer die Wasserleitung beschädigen kann.



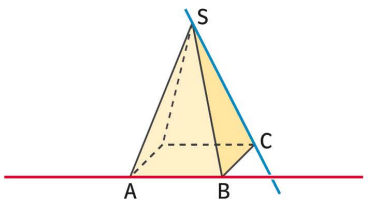
Test 2

→ **Lösungen**, Seite 504

10 Die quadratische Pyramide rechts ist 6 LE hoch, ihre Grundkante ist 4 LE lang.

a) Bestimmen Sie den Abstand der roten von der blauen Geraden, und vergleichen Sie diesen mit der Länge der Strecke $\overline{BC}$.

b) Beschreiben Sie die Lage der Punkte auf den beiden Geraden mit der geringsten Entfernung voneinander.



11 **a)** Zeigen Sie, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ für jeden Wert von a zur x_2-Achse windschief ist.

b) Bestimmen Sie den Wert von a, für den der Abstand zur x_2-Achse 0,5 beträgt.

c) Bestimmen Sie den Wert von a, für den der Abstand zur x_2-Achse maximal wird.

12 Niclas sieht die nebenstehende Rechennotiz und fragt sich, ob da ein Abstand zweier Geraden oder der Abstand einer Geraden von einer Ebene untersucht werden soll.
Negin meint, das sei doch dasselbe. Beurteilen Sie Negins Aussage.

Was ist der Abstand?

$0{,}5x_2 + x_3 = 5$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

13 **Wahr oder falsch?**
Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Wenn zwei windschiefe Geraden in zueinander parallelen Ebenen E und F liegen, lässt sich ihr Abstand deuten als Abstand der Ebenen E und F.

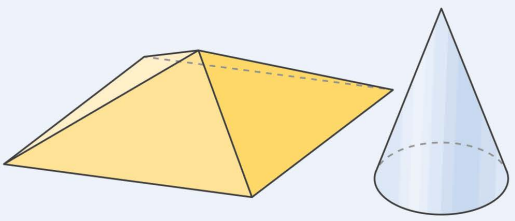
b) Alle zu einer Geraden g windschiefen Geraden mit einem festen Abstand von g liegen in zwei zu g parallelen Ebenen.

Grundwissen Test — Größen von Körpern berechnen

→ **Grundwissen**, Seite 419
Lösungen, Seite 505

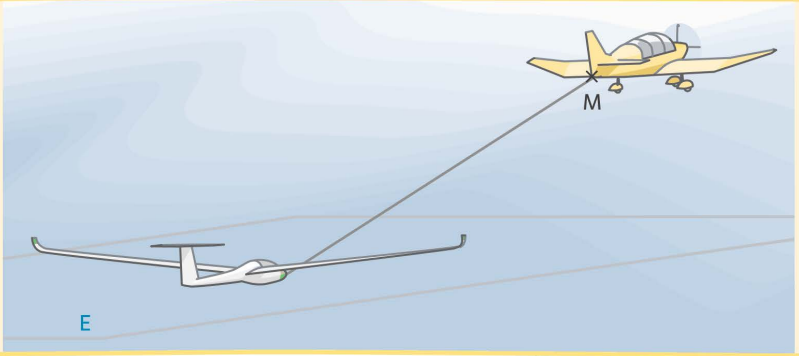
G **14** **a)** Berechnen Sie die Länge der Kanten des Mantels einer quadratischen Pyramide mit einer Grundfläche von 16 FE und einer Höhe von 1 LE.

b) Berechnen Sie die Länge der Mantellinie des Kegels mit einer Grundfläche von 25π FE und einer Höhe von 5 LE.



5 Abstandsberechnungen in Kontexten

Ein Motorflugzeug schleppt ein Segelflugzeug, das zur Seite ausscheren kann.
Das Heck des Motorflugzeugs befindet sich zu einem bestimmten Zeitpunkt im Punkt $M(2|5|0{,}5)$ und der Segler in der Ebene $x_3 = 0{,}48$ (1 LE = 1 km).
Untersuchen Sie, an welchen Positionen sich der Segler zu diesem Zeitpunkt befinden kann. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



Geometrische Fragestellungen, deren Beantwortung eine Untersuchung von Objekten im Raum erfordern, können komplex sein. An einem Abstandsproblem wird gezeigt, wie man vorgehen und bekannte Rechenstrategien auch aus anderen mathematischen Bereichen nutzen kann.

Abstandsbestimmung als Extremwertproblem

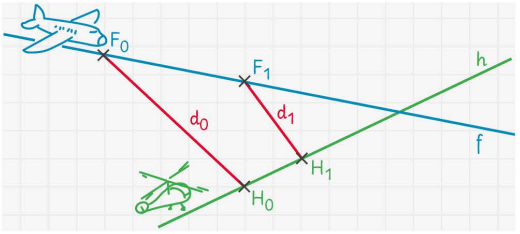
Ein Flugzeug hat zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ (in min) die Position $(-10{,}8|-4|9)$, ein Hubschrauber zum selben Zeitpunkt die Position $(16|5{,}4|3{,}8)$. Eine Minute später wird das Flugzeug im Punkt $(2|3|7)$ geortet, der Hubschrauber im Punkt $(11|5{,}8|3{,}6)$. Beide Objekte bewegen sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit, die Koordinaten sind in km angegeben. Es soll ermittelt werden, wann sich die Objekte am nächsten kommen, wie groß ihr Abstand ist und ob demzufolge eine Kollision ausgeschlossen werden kann.

1. Schritt: Verstehen der Aufgabe

Für die Modellierung ist es sinnvoll, die Informationen zu sortieren und zu benamen:
- Positionen des Flugzeugs F_t zum Zeitpunkt t: $F_0(-10{,}8|-4|9)$ und $F_1(2|3|7)$
- Positionen des Hubschraubers H_t zum Zeitpunkt t: $H_0(16|5{,}4|3{,}8)$ und $H_1(11|5{,}8|3{,}6)$
- Die Zeit t wird in min angegeben, die Längen (Koordinaten) in km.

I12 **interaktive Anwendung** Abstandsberechnung: Kollisionsproblem mit Flugzeug

Gesucht ist der Zeitpunkt t mit dem minimalen Abstand der beiden Flugobjekte.
Um die Situation besser zu verstehen und den Rechenweg zu planen, skizziert man die Situation (s. Abbildung). An den x_3-Koordinaten erkennt man, dass das Flugzeug sinkt $(7 < 9)$, ebenso der Hubschrauber $(3{,}6 < 3{,}8)$, zudem befindet sich das Flugzeug anfangs oberhalb des Hubschraubers.



2. Schritt: Zerlegen in Teilprobleme

Es ist sinnvoll zu überlegen, welche bekannten Rechenfertigkeiten nützlich sein können:
- Um den Abstand d zweier Punkte zu berechnen, benötigt man den Betrag eines Vektors.
- Um die Flugbewegungen zu beschreiben und Orte zu bestimmten Zeitpunkten zu ermitteln, benötigt man Bewegungsgleichungen der Fluggeraden f (Flugzeug) und h (Hubschrauber).
- Da der Abstand d eine Zahlengröße ist, die man in Abhängigkeit von der Zeit t darstellen kann, und da dieser Abstand d minimiert werden soll, könnte eine aus der Analysis bekannte Extremwertberechnung hilfreich sein.

Damit erhält man folgenden **Rechenplan**:
1. Darstellen der allgemeinen Punkte F_t und H_t der Geraden f und h in Abhängigkeit von t
2. Berechnen des Abstands d als Betrag des Differenzvektors $\overrightarrow{F_tH_t}$ in Abhängigkeit von t
3. Lösen des Extremwertproblems: Bestimmen des Wertes t mit minimalem Abstand d

3. Schritt: Durchführung des Rechenwegs

1. Da sich die Flugobjekte zeitgleich jeweils auf einem geradlinigen Kurs bewegen, kann man ihre Flugrouten durch zwei Geradengleichungen mit demselben Zeitparameter t beschreiben:

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10{,}8 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12{,}8 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10{,}8 + 12{,}8t \\ -4 + 7t \\ 9 - 2t \end{pmatrix} \text{ und analog}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 5{,}4 \\ 3{,}8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0{,}4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 - 5t \\ 5{,}4 + 0{,}4t \\ 3{,}8 - 0{,}2t \end{pmatrix}$$

Zum Zeitpunkt t sind die Objekte also an den Orten $F_t(-10{,}8 + 12{,}8t \mid -4 + 7t \mid 9 - 2t)$ bzw. $H_t(16 - 5t \mid 5{,}4 + 0{,}4t \mid 3{,}8 - 0{,}2t)$.

2. Man berechnet nun den Vektor $\overrightarrow{F_tH_t} = \begin{pmatrix} 16 - 5t \\ 5{,}4 + 0{,}4t \\ 3{,}8 - 0{,}2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10{,}8 + 12{,}8t \\ -4 + 7t \\ 9 - 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26{,}8 - 17{,}8t \\ 9{,}4 - 6{,}6t \\ -5{,}2 + 1{,}8t \end{pmatrix}$.

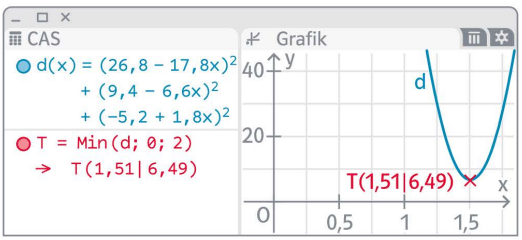
Mit $\left|\overrightarrow{F_tH_t}\right|$ erhält man den Abstand $d(t) = \sqrt{(26{,}8 - 17{,}8t)^2 + (9{,}4 - 6{,}6t)^2 + (-5{,}2 + 1{,}8t)^2}$.
Die Funktion d(t) liefert den Abstand in Abhängigkeit von der Zeit t, die Bestimmung des geringsten Abstands stellt also ein Extremwertproblem der Analysis dar: Gesucht wird das Minimum der Funktion d.

3. Für zwei Abstände d_1 und d_2 gilt: Ist $d_2^2 > d_1^2$, so ist auch $d_2 > d_1$. Es ist also vorteilhaft, die quadrierte Funktion $d^2(t) = \tilde{d}(t) = (26{,}8 - 17{,}8t)^2 + (9{,}4 - 6{,}6t)^2 + (-5{,}2 + 1{,}8t)^2$ für die Extremwertberechnung heranzuziehen.
Das Minimum lässt sich händisch oder mit einem MMS bestimmen:

ohne MMS

Mit $\tilde{d}' = 2 \cdot (-17{,}8) \cdot (26{,}8 - 17{,}8t) + 2 \cdot (-6{,}6) \cdot (9{,}4 - 6{,}6t) + 2 \cdot 1{,}8 \cdot (-5{,}2 + 1{,}8t) = 727{,}28t - 1096{,}88 = 0$ erhält man als mögliche Extremstelle $t = \frac{1096{,}88}{727{,}28} \approx 1{,}51$.
$\tilde{d}''(1{,}51) = 727{,}28 > 0$ bestätigt, dass $\tilde{d}$ an der Stelle $t \approx 1{,}51$ minimal wird.

mit MMS



Ablesen des lokalen Minimums aus dem Graphen von $\tilde{d}$: $t \approx 1{,}51$

Da der Graph von $\tilde{d}$ eine nach oben geöffnete Parabel darstellt, muss das Minimum als t-Wert des Scheitels vorliegen.

4. Schritt: Rückschau und Antwort

Ca. 90 Sekunden nach Betrachtungsbeginn kommen sich das Flugzeug und der Hubschrauber am nächsten. Am Funktionswert $d(1{,}51) = \sqrt{\tilde{d}(1{,}51)} \approx \sqrt{6{,}49} \approx 2{,}55$ liest man ab, dass der minimale Abstand ca. 2,55 km beträgt und eine Kollision ausgeschlossen werden kann.

Mögliches Vorgehen bei Abstandsberechnungen in Kontexten

Beim Lösen komplexerer geometrischer Probleme ist es sinnvoll, die vier folgenden Schritte mit Beachtung ihrer Unterpunkte systematisch zu bearbeiten:

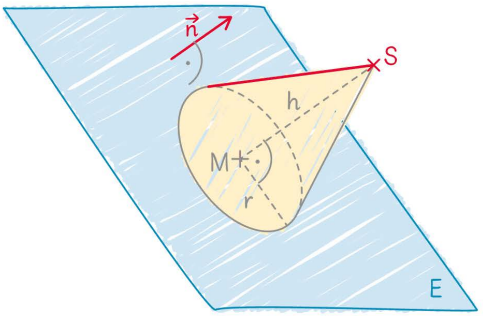
1	2	3	4
Verstehen der Aufgabe	**Zerlegen in Teilprobleme**	**Durchführung des Rechenwegs**	**Rückschau und Antwort**
Was ist gesucht? Was ist gegeben und wichtig? Wie kann man die Situation skizzieren?	Rechenweg planen: Welche bekannten geometrischen Beziehungen oder Rechenstrategien kann ich nutzen?	Wie kann ich rechnerisch vorteilhaft vorgehen? Kann ich ein digitales Hilfsmittel einsetzen?	Ist das Ergebnis plausibel? Ist das Problem vollständig gelöst? Wie lautet eine sinnvolle Antwort?

Beispiel **Kegelvolumen bestimmen**

Ein gerader Kegel mit einer Mantellinie der Länge 5 LE steht senkrecht auf der Ebene E mit $E: x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Die Spitze des Kegels befindet sich im Punkt $S(4{,}3|4{,}3|4{,}3)$.
Bestimmen Sie das Volumen des Kegels.

Lösung

1. Schritt:
gesucht: das Volumen des Kegels
Benötigt werden also der Radius r der Grundfläche sowie die Höhe h.
gegeben: die Spitze S, die Länge der Mantellinie und E (s. Skizze rechts)



2. Schritt:
Höhe h als Abstand von S zu E bestimmen:
- Lot von S auf E fällen, Lotfußpunkt M bestimmen und $|\overrightarrow{MS}|$ berechnen
- Radius r mithilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen
- Volumenformel für den Kegel anwenden

3. Schritt
- *Aufstellen der Lotgeraden* $l: \vec{x} = \vec{s} + k \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 4{,}3 \\ 4{,}3 \\ 4{,}3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}3 + k \\ 4{,}3 + k \\ 4{,}3 + k \end{pmatrix}$

  Einsetzen der Koordinaten von l in E: $3 \cdot (4{,}3 + k) = 6$ und damit $k = -2{,}3$.
  Einsetzen von $k = -2{,}3$ *in die Geradengleichung von l:* Für $k = -2{,}3$ erhält man $M(2|2|2)$.
  Also gilt: $h = |\overrightarrow{MS}| = \sqrt{3 \cdot (4{,}3 - 2)^2} = \sqrt{3 \cdot (2{,}3)^2} \approx 4$
- *Berechnung von r mit dem Satz des Pythagoras:* $r \approx \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$
- $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \approx \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 4 = 12\pi \approx 37{,}7$

4. Schritt
Der Kegel hat ein Volumen von ungefähr 37,7 VE.

Aufgaben

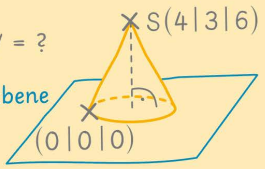
○ **1** Zu der folgenden Aufgabe wurden Lösungsschritte skizziert. Bringen Sie den Plan in die korrekte Reihenfolge, vervollständigen Sie ihn und führen Sie ihn aus.

→ **Lerntipp** Seite 271, Beispiel

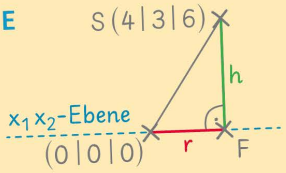
Ein gerader Kegel mit der Spitze $S(4|3|6)$ steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene und berührt den Koordinatenursprung.
Bestimmen Sie das Volumen.

A $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot \ldots$
$G = \pi \cdot \ldots$

B Das Volumen des Kegels ...

C


D h ablesen,
F bestimmen,
r bestimmen,
Formeln anwenden

E


F h = ...
F liegt in ..., also F(| |)
r ist der Abstand ..., also ...

○ **2** Bestimmen Sie einen Punkt, eine Gerade und eine Ebene, die zur Ebene E den Abstand d haben.

a) E: $3x_1 - 4x_3 = 0$, $d = 5$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $d = 14$

○ **3** Bestimmen Sie einen Punkt, eine Gerade und eine Ebene, die zur Geraden g den Abstand d haben.

a) g: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$; $d = 2$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $d = 5$

○ **4** Die Bewegungsgleichungen g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschreiben die Routen zweier Flugobjekte, wobei eine Längeneinheit 10 Metern entspricht und t die Zeit in Sekunden angibt. Es sollen (1) der minimale Abstand der Flugobjekte, sowie (2) der minimale Abstand der Flugrouten bestimmt werden.

a) Erläutern Sie, welcher der beiden Ansätze für welche Fragestellung sinnvoll ist.

(A) $\begin{pmatrix} 4+t-s \\ 4+t-2s \\ 2-2s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+t-s \\ 4+t-2s \\ 2-2s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ (B) $\sqrt{4^2 + (4-t)^2 + (2-2t)^2}$

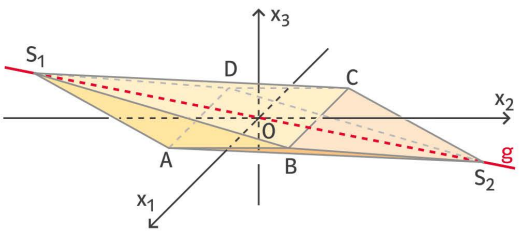
b) Berechnen Sie nun beide minimalen Abstände aus Teilaufgabe a) und erläutern Sie die Ergebnisse.

Test 1

Lösungen, Seite 505

○ **5** Die Punkte A(2|−2|0), B(2|2|0), C(−2|2|0) und D(−2|−2|0) sind die Ecken der quadratischen Grundfläche zweier schiefer Pyramiden, deren Höhe jeweils 3 LE beträgt und deren Spitzen auf der Geraden g: $\vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen.

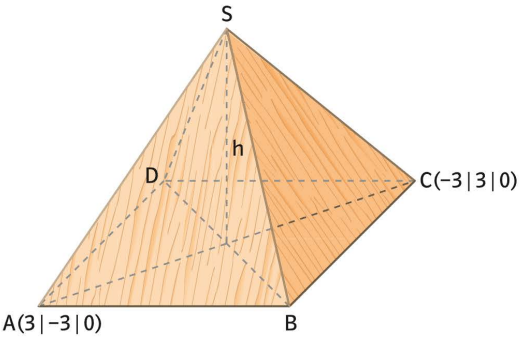
Ermitteln Sie die Koordinaten beider Spitzen.



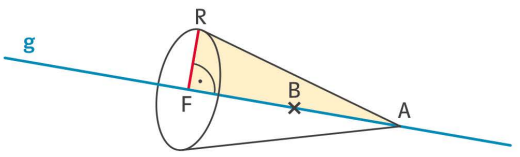
◒ **6** Gegeben sind die Ebene E: $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 8$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf g, die von der Ebene E den Abstand 3 LE haben.

◒ **7** Der nebenstehende Holzklotz ist eine quadratische Pyramide der Höhe 6 cm, die Seiten der Grundfläche verlaufen parallel zur x_1- bzw. x_2-Achse. Von einem Punkt der Fläche $\overline{BCS}$ aus wird senkrecht bis zur Mitte der Seite $\overline{AD}$ in den Klotz gebohrt. Berechnen Sie die Länge der Bohrung und ihren Eintrittspunkt.



◒ **8** Die Gerade g verläuft durch die Punkte A(17|11|12) und B(5|7|9). Der Punkt R(−7|−3|14) liegt auf der Kreislinie der Kegelgrundfläche. Bestimmen Sie das Volumen des Kegels (s. Abbildung rechts).



9 Bezogen auf ein geeignetes Koordinatensystem mit der Einheit 1 km befindet sich ein erstes Flugzeug zu Beobachtungsbeginn im Koordinatenursprung und bewegt sich geradlinig mit einer Geschwindigkeit von $300\,\frac{km}{h}$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Ein zweites Flugzeug befindet sich zu Beobachtungsbeginn im Punkt $(20|34{,}2|15{,}3)$ und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $400\,\frac{km}{h}$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die beiden Punkte, die den minimalen Abstand der beiden Flugrouten markieren, sowie die Zeitpunkte, zu denen die Flugzeuge diese Punkte erreichen.

b) Bestimmen Sie nun den Zeitpunkt, zu dem sich die Flugzeuge am nächsten kommen, sowie ihren minimalen Abstand voneinander.

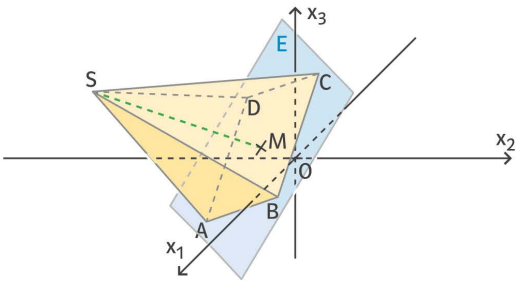
Test 2

Lösungen, Seite 505

10 Die quadratische Pyramide (s. rechts) steht senkrecht auf der Ebene $E: x_1 - x_2 + x_3 = 4$. Die Länge der Kanten von der Spitze $S(8{,}25|-8{,}25|8{,}25)$ zu den Eckpunkten der Grundfläche beträgt 13 LE.

a) Bestimmen Sie das Pyramidenvolumen.

b) Geben Sie jeweils einen Punkt auf der Grundfläche, einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb der Pyramide an.

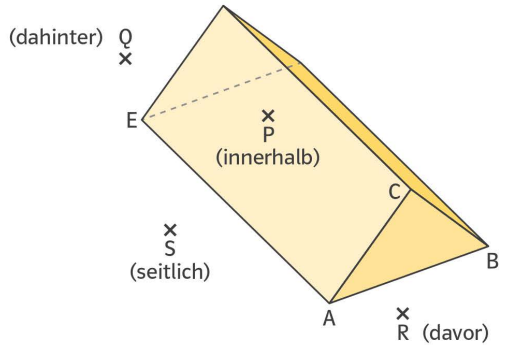


11 Das Prisma rechts hat eine dreieckige Grundfläche mit $A(4|6|6)$, $B(-2|6|9)$ und $C(1{,}5|5|11)$ sowie den Eckpunkt $E(4|-6|6)$.

a) Geben Sie einen Punkt P an, der innerhalb des Prismas liegt. Erläutern Sie.

b) Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem Sie prüfen können, ob ein Punkt im, vor, hinter oder seitlich des Prismas liegt.

c) Beschreiben Sie die Seitenflächen mithilfe von Parametergleichungen. Geben Sie Bedingungen für die Parameter an.



12 Die Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-4\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-0{,}5\end{pmatrix}$ und $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\-0{,}5\end{pmatrix}$ sind Bewegungsgleichungen geradliniger Flugrouten (mit t in 10 s). Untersuchen Sie, wann die Summe der Abstände zwischen den Flugobjekten minimal ist und wie groß diese dann ist.

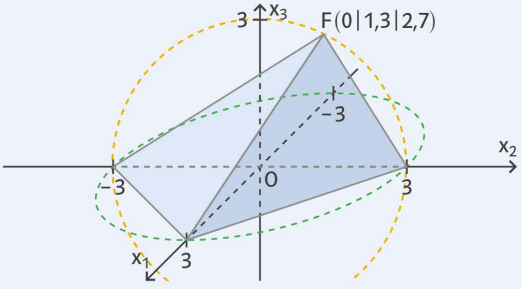
Grundwissen Test — Rechte Winkel und Pyramiden

Grundwissen, Seite 419
Lösungen, Seite 505

G **13** a) Begründen Sie, dass zwei Seitenflächen der Pyramide rechts rechtwinklig sind.

b) Bestätigen Sie die rechten Winkel aus Teilaufgabe a) mithilfe des Satzes von Pythagoras und mithilfe eines Skalarprodukts.

c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.



Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen

→ Lösungen, Seite 506

1 Ordnen Sie die gelben Kärtchen den blauen passend zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

A $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$, $E: 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 5$

B $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$, $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = 0$

C $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\4\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix}$, $E: 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 21$

D $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}$, $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$

1 g liegt in E.

2 g und E sind zueinander parallel, g liegt nicht in E.

3 g und E schneiden sich orthogonal.

4 g und E schneiden sich nicht orthogonal.

2 Gegeben ist die Ebene $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} = 0$. Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden g bzw. eine Parameter-, eine Normalen- und eine Koordinatengleichung einer Ebene F an, die die angegebene Bedingung erfüllt.

a) F bzw. g schneiden die Ebene E orthogonal.

b) F bzw. g verlaufen zur Ebene E weder orthogonal noch parallel.

c) F bzw. g verlaufen zur Ebene E parallel.

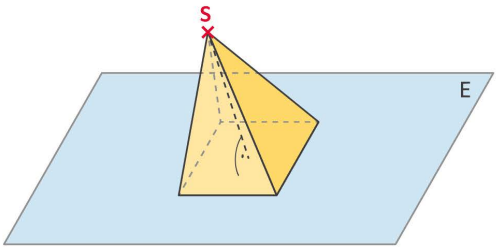
Abstand eines Punktes von einer Ebene

3 Der Punkt $P(3|1|1)$ liegt auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\4\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes P von der Ebene $E: 2x_1 + 10x_2 + 11x_3 = 252$.

b) Es gibt einen weiteren Punkt auf der Geraden g, der von E den Abstand d aus Teilaufgabe a) hat. Berechnen Sie seine Koordinaten.

4 Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge a steht senkrecht auf $E: 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 10$.
Die Spitze der Pyramide befindet sich im Punkt $S(2|-4|7)$.
Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens der Pyramide in Abhängigkeit von der Kantenlänge a an.



5 Der Punkt A wird an der Ebene $E: 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 10$ gespiegelt. Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunkts A'.

a) $A(3|4|-6)$ **b)** $A(6|8|-10)$ **c)** $A(-7|-10|12)$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

6 Berechnen Sie den Abstand des Punktes R von der Geraden g.

a) $R(11|5|-4)$, $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$

b) $R(9|1|10{,}5)$, $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}8\\0\\1\end{pmatrix}$

7 Die Punkte $A(1|1|2)$, $B(3|5|-2)$, $C(4|4|2)$ und $D(5|6|0)$ sind die Ecken eines Trapezes. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

D22 Check-out

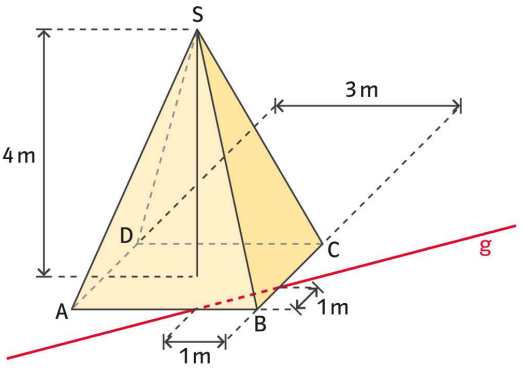
8 Der Punkt P wird an der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunkts P'.

→ **Lösungen**, Seite 507

a) P(4|−3|7) **b)** P(10|12|−2) **c)** P(14|30|17)

9 Gegeben sind der Punkt A(2|3|19) sowie die Gerade g durch die Punkte B(4|9|11) und C(3|4|7).
Zeigen Sie, dass B derjenige Punkt der Geraden g ist, der die kleinste Entfernung vom Punkt A hat.

10 Die Abbildung rechts zeigt eine quadratische Pyramide mit der Spitze S.
Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g von der Spitze S.



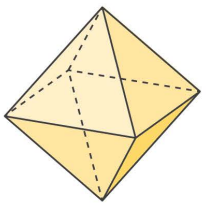
Abstand zwischen Geraden

11 Die Geraden g und h sind zueinander windschief. Berechnen Sie ihren Abstand.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) g durch A(2|7|6) und B(−4|7|6)
h durch A(2|−6|22) und B(2|10|10)

12 Ein Oktaeder ist eine quadratische Doppelpyramide, deren Kanten alle dieselbe Länge haben (s. Abbildung).
Bestimmen Sie für ein Oktaeder der Kantenlänge 1LE den Abstand zueinander windschiefer Kanten.



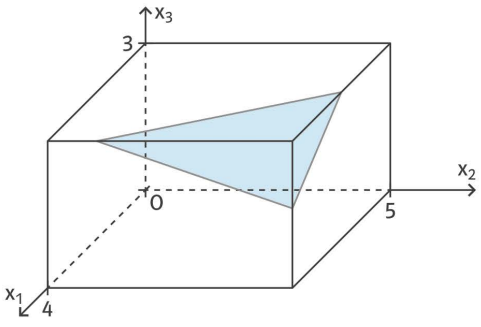
Abstandsberechnungen in Kontexten

13 Ein Schiff hat zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Position (5|1) (alle Angaben in km). Nach einer Stunde hat das Schiff die Position (7|2). Auf dem Gewässer liegt im Punkt C(10|3) eine Boje.
Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt das Schiff der Boje am nächsten kommt und wie weit die Boje dann vom Schiff entfernt ist.

14 Die Ebene $E: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20$ trennt, ähnlich wie in der Abbildung rechts, von dem Quader eine Pyramide ab.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte der Dreiecksgrundfläche.

b) Weisen Sie nach, dass die Pyramide ein Volumen von ca. 4,76VE hat.



15 Ein Fluglotse beobachtet auf einem Radarschirm zwei Flugzeuge. Flugzeug Boey X51 hat die Position (2|4|0), während das Flugzeug Boey X43 zum gleichen Zeitpunkt die Position (−3|8|7) hat. Zehn Sekunden später hat Boey X51 die Position (0|2|1) und Boey X43 (0|7|6). Die Koordinaten sind jeweils in Kilometern angegeben. Bestimmen Sie den minimalen Abstand beider Flugzeuge und entscheiden Sie, ob der Fluglotse eingreifen muss.

Weiterführende Aufgaben

Lösungen, Seite 509

16 Es sind die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$ und die Ebenenschar $E_b: 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = b$ gegeben.

a) Bestimmen Sie den Wert für a, für den die Gerade g_a die Ebene E_1 senkrecht durchstößt.

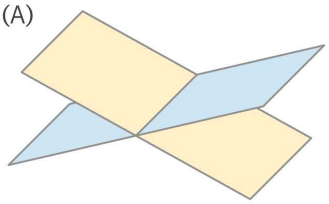
b) Bestimmen Sie den Wert für a, für den die Gerade g_a parallel zur Ebene E_1 verläuft, und berechnen Sie den Abstand zwischen der Geraden und der Ebene.

c) Bestimmen Sie Werte für a und b so, dass g_a in der Ebene E_b liegt.

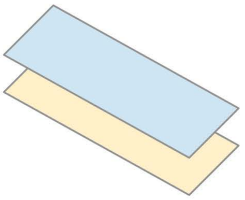
17 Wenn man die Gleichungen in den LGS als Ebenendarstellungen auffasst, kann man die Lösungen des LGS geometrisch interpretieren. Ordnen Sie jedem LGS die passende Figur zu und deuten Sie seine Lösung vor dem Hintergrund der Lagebeziehung zweier Ebenen.

(1) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -4x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= 18 \end{aligned}$ (2) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$ (3) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 &= 1 \end{aligned}$

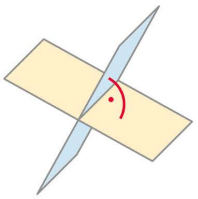
(A)



(B)



(C)



18 **Wahr oder falsch?**

Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Wenn das Skalarprodukt eines Normalenvektors einer Ebene E mit einem Richtungsvektor einer Geraden g gleich null ist, dann durchstößt g die Ebene E orthogonal.

b) Wenn ein Richtungsvektor einer Geraden g und ein Spannvektor einer Ebene E kollinear sind, dann kann es nicht vorkommen, dass g und E nur einen Punkt gemeinsam haben.

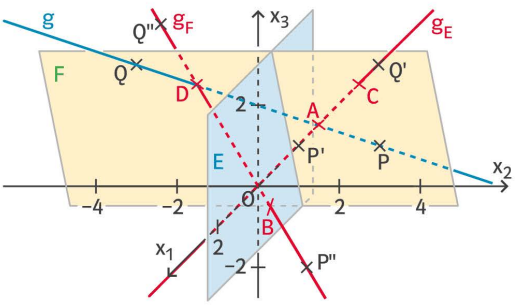
c) Wenn sich der Normalenvektor einer Ebene E aus den beiden Spannvektoren einer Ebene F linear kombinieren lässt, dann schneiden sich die Ebenen orthogonal.

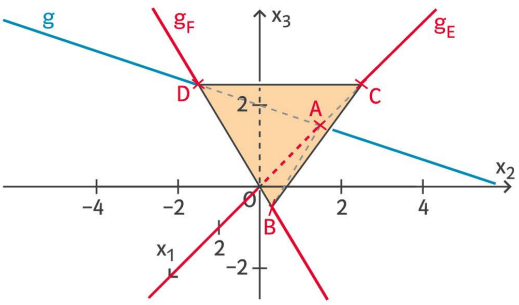
d) Wenn der Normalenvektor einer Ebene E senkrecht auf einem Spannvektor einer Ebene F steht und ein Punkt P in E und in F liegt, dann müssen E und F identisch sein.

19 Gegeben sind die Gerade g, die durch die Punkte P(−2|2|0) und Q(2|−2|4) verläuft, sowie die beiden Ebenen E: $x_2 = 1$ und F: $-3x_1 + x_3 = 0$.

a) Spiegelt man die Gerade g an der Ebene E bzw. an der Ebene F, erhält man die Geraden g_E und g_F (s. Abbildung). Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Geraden g_E und g_F.

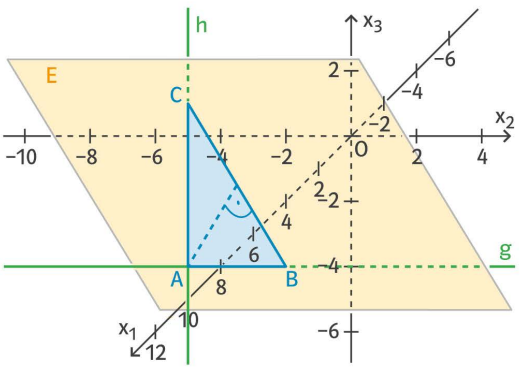
b) Die vier Schnittpunkte der Geraden g, g_E und g_F mit den Spiegelebenen E und F legen eine Pyramide ABCD mit einer dreieckigen Grundfläche fest (s. Abbildung).
(1) Beschreiben Sie die Grundfläche mithilfe einer Parametergleichung. Geben Sie die Bedingungen für die Parameter an.
(2) Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABC einen Flächeninhalt von ca. 5,66 FE hat.





→ **Lösungen**, Seite 510

20 Zwei Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ begrenzen mit der Ebene $E: 3x_1 - x_3 = 19$ ein Dreieck.



a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks.

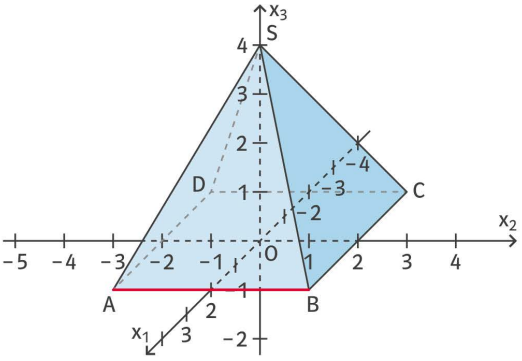
b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck gleichschenklig ist und in einer Ebene liegt, die zur Ebene E orthogonal verläuft.

c) Spiegeln Sie das Dreieck an der Ebene E. Geben Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts an, der gegenüber der längsten Seite des Dreiecks liegt.

d) Das Dreieck rotiert um seine längste Seite. Bestimmen Sie das Volumen des so entstehenden Doppelkegels.

e) Beschreiben Sie, wie man vorgehen könnte, um zu prüfen, ob ein Punkt P innerhalb des Doppelkegels aus Teilaufgabe d) liegt.

21 Es ist die Ebenenschar $E_t: tx_1 + x_3 = 2t$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.



a) Zeigen Sie, dass die Kante $\overline{AB}$ der quadratischen Pyramide rechts für alle Werte von t in der Ebene E_t liegt.

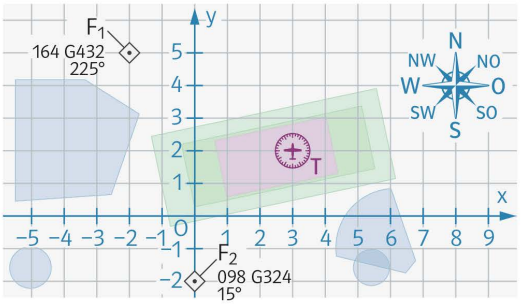
b) Bestimmen Sie jeweils den Wert für t, für den die Ebene E_t einmal die Pyramidengrundfläche und einmal die Pyramidenspitze enthält.

c) Für $t = 1$ schneidet die Ebene E_1 aus der Pyramide ein Trapez aus. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Trapezes.

d) Gesucht ist diejenige Ebene der Schar, die vom Mittelpunkt der Grundfläche der Pyramide den Abstand $\sqrt{2}$ LE hat. Ermitteln Sie den entsprechenden Wert für t.

e) (1) Die Pyramide wird an der Ebene gespiegelt, in der die Seitenfläche BCS liegt. Geben Sie die Koordinaten der Spiegelpunkte A′ und D′ an.
(2) Prüfen Sie, ob es durch Fortsetzung der Spiegelung gelingen kann, dass die rechte Seitenfläche einer gespiegelten Pyramide mit der linken Seitenfläche der Ausgangspyramide zusammenfällt.

22 Die Karte zeigt die Positionen der Flugzeuge F_1 und F_2 relativ zum Tower T (500 m NHN) zum Zeitpunkt $t = 0$. F_1 fliegt in einer Höhe von 5 km in südwestlicher Richtung. F_2 befindet sich im Steigflug mit einem Winkel von 15° in nördlicher Richtung und hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die Höhe 3 km (alle Höhenangaben bzgl. der Meeresspiegelhöhe).



Mit Normalhöhennull (NHN) bezeichnet man die Bezugsfläche für Angaben von Höhen über dem Meeresspiegel in Deutschland.

a) Bestimmen Sie die Entfernungen der Flugzeuge zum Tower zum Zeitpunkt $t = 0$.

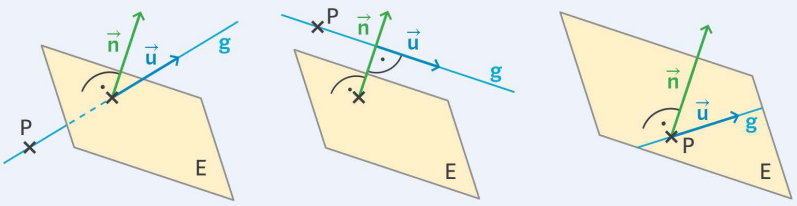
b) Bestimmen Sie die kleinste Entfernung der Flugzeuge zum Tower während des Vorbeiflugs.

c) Bestimmen Sie, wie nah sich die Flugzeuge im ungünstigsten Fall kommen.

d) Ermitteln Sie, wie weit die beiden Flugzeuge mindestens voneinander entfernt sind, wenn F_1 mit einer Geschwindigkeit von 800 $\frac{km}{h}$ und F_2 mit einer Geschwindigkeit von 600 $\frac{km}{h}$ fliegen.

Lagebeziehungen zwischen einer Ebene und einer Geraden

(1) $\vec{u} \circ \vec{n} \neq 0$ (2) $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ und $P \in g$ nicht in E (3) $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ und $P \in g$ in E

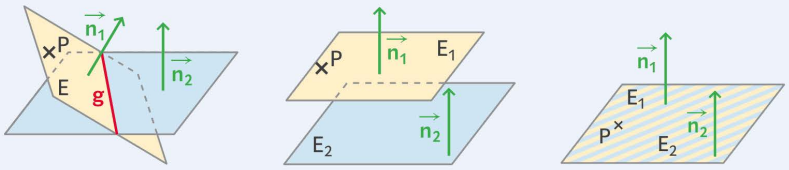


Man stellt ein LGS oder eine Gleichung auf.
Falls das LGS bzw. die Gleichung

- genau eine Lösung hat, schneiden sich g und E in einem Punkt,
- keine Lösung hat, verläuft die Gerade g parallel zur Ebene E,
- unendlich viele Lösungen hat, liegt die Gerade g in der Ebene E.

Lagebeziehungen zwischen Ebenen

(1) $\vec{n_2} \neq k \circ \vec{n_1}$ E_1 schneidet E_2. (2) $\vec{n_2} = k \circ \vec{n_1}$ und $P \notin E_2$ E_1 und E_2 sind parallel. (3) $\vec{n_2} = k \circ \vec{n_1}$ und $P \in E_2$ E_1 und E_2 sind identisch.



Abstand eines Punktes von einer Ebene

Den Abstand d des Punktes R mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ von der Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ kann man so bestimmen:

1. Aufstellen einer Gleichung der Lotgeraden durch R auf die Ebene E, z.B. $l: \vec{x} = \vec{r} + t \cdot \vec{n}$.
2. Berechnen der Koordinaten des Lotfußpunkts F als Schnittpunkt von g mit der Ebene E.
3. Berechnen des Betrags des Vektors $\overrightarrow{RF}$. Es gilt $d = |\overrightarrow{RF}|$.

Abstand eines Punktes von einer Geraden bestimmen

1. Aufstellen einer Ebene E, die orthogonal zu g ist und R enthält.
2. Berechnen des Lotfußpunkts F als Schnittpunkt von g mit E.
3. Berechnen des Betrags des Vektors $\overrightarrow{FR}$. Es gilt $d = |\overrightarrow{FR}|$.

Spiegelungen an Ebenen und Geraden

Man spiegelt einen Punkt R an einer Ebene E bzw. an einer Geraden g, indem man den Lotfußpunkt F der Lotes von R auf E bzw. auf g bestimmt (s.o.). Anschließend erhält man R' mit $\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OR} + 2 \cdot \overrightarrow{RF}$.

Abstand von windschiefen Geraden

So erhält man den Abstand von $g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$:

1. Notieren allgemeiner Punkte G_s und H_t auf den Geraden g und h.
2. Berechnen des Vektors $\overrightarrow{G_sH_t} = \overrightarrow{OH_t} - \overrightarrow{OG_s}$.
3. Lösen des LGS mit (1) $\overrightarrow{G_sH_t} \circ \vec{u} = 0$ und (2) $\overrightarrow{G_sH_t} \circ \vec{v} = 0$.
4. Berechnen der Koordinaten der Lotfußpunkte G und H.
5. Berechnen des Betrags des Vektors $\overrightarrow{GH}$. Es gilt: $d = |\overrightarrow{GH}|$.

Gegeben sind $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ *sowie* $E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$.
Wegen $\vec{u} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = 0$, *ist g parallel zu E oder g liegt in E. Die Punktprobe ergibt* $2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 3$, *also liegt g in E.*
Alternativ setzt man g in E ein:
$2 \cdot (1 - \lambda) - 1 \cdot (2 + \lambda) + 3 \cdot (1 + \lambda) = 3$
liefert $3 = 3$, *also liegt g in E.*

Gegeben sind $E_1: 2x_1 - 4x_3 = -2$ *und* $E_2: x_1 - 2x_3 = 2$.
$\vec{n_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \vec{n_1}$, *also sind* $\vec{n_2}$ *und* $\vec{n_2}$ *kollinear.*
Eine Punktprobe mit z.B. $P(1|0|1)$ *aus* E_1 *ergibt* $1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1 \neq 2$, *also sind* E_1 *und* E_2 *parallel.*

Gegeben: $E: x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 25$ *und* $R(2|0|1)$
1. *Lotgerade g zu E durch R:*
$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+r\\8r\\1-4r\end{pmatrix}$
2. $(2 + r) + 8 \cdot (8r) - 4 \cdot (1 - 4r) = 25$ *ergibt* $r = \frac{1}{3}$ *also* $F\left(\frac{7}{3}\middle|\frac{8}{3}\middle|-\frac{1}{3}\right)$.
3. $d = |\overrightarrow{RF}| = \sqrt{\left(\frac{7}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2} = 3$

Gegeben: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$; $R(0|5|6)$
$E: -4x_1 + x_2 + x_3 = 11$
$-4 \cdot (2 - 4t) + t + (1 + t) = 11$; $t = 1$; $F(-2|1|2)$
$d = |\overrightarrow{FR}| = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (5 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = 6$

Gegeben:
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ *und* $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\-8\\6\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{G_sH_t} = \begin{pmatrix}9 + 2t - s\\-8 - 3t - (-1 - s)\\-6 + 2t - 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-s + 2t + 9\\-s - 3t - 7\\-s + 2t + 5\end{pmatrix}$
liefert $s = 3$ *und* $t = -2$. *Mit* $G(3|-4|1)$ *und* $H(5|-2|2)$ *erhält man* $d = |\overrightarrow{GH}| = 3$.

D23 Lösungen
Probeklausur
Kapitel VII

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 1

45 min

1 Bestimmen Sie Werte von a, b und c für $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$ so, dass

a) die Gerade g parallel zur Ebene E ist, aber nicht in E liegt,

b) die Gerade g in der Ebene E liegt,

c) die Gerade g die Ebene E schneidet.

2 Gegeben sind die beiden Ebenen $E: 2x_1 - x_2 + x_3 = 6$ und $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie die Punkte $A(2|1|3)$ und $B(6|-1|10)$, die in E bzw. F liegen.

a) Zeigen Sie, dass die Ebenen E und F parallel zueinander verlaufen.

b) Es gibt eine Ebene G, die zu den Ebenen E und F parallel verläuft und die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt P so schneidet, dass $|\overrightarrow{AP}| = 2 \cdot |\overrightarrow{BP}|$ gilt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene G.

3 **a)** Der Punkt $P(0|10{,}5|3)$ wird an der Geraden g, die durch die Punkte $A(-3|-3|6)$ und $B(3|0|-6)$ verläuft, gespiegelt.
Geben Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts P' an.

b) Erläutern Sie, wie Sie prüfen können, ob es sich bei dem Viereck APBP' um eine Raute oder sogar um ein Quadrat handelt.

4 Die vier Eckpunkte eines Quadrats liegen in der Ebene $E: x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -32$. Das Quadrat mit der Kantenlänge 4 bildet die Grundfläche einer Pyramide mit dem Volumen 24VE. Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, in der die Spitze S der Pyramide liegen könnte.

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 2

45 min

1 Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie die Ebene $E: 2x_1 - x_2 = 4$.

a) Begründen Sie, dass die Gerade g die Ebene E orthogonal schneidet.

b) Die Gerade h verläuft parallel zur Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k, die in E liegt und von der Geraden h den geringsten möglichen Abstand hat.

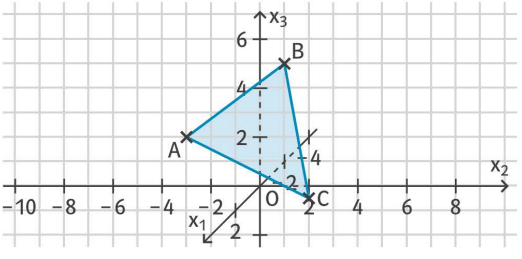
2 **a)** Bestimmen Sie eine Gleichung einer Ebene E so, dass die Punkte $A(1|1|0)$ und $B(3|4|6)$ bezüglich dieser Ebene Punkt und Spiegelpunkt darstellen.

b) Spiegeln Sie den Punkt $P(-6|-3|0)$ an der Ebene $F: 4x_1 + 6x_2 + 12x_3 = 154$. Geben Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts P' an.

3 Bestimmen Sie einen Punkt, der sowohl von der x_1x_3-Ebene als auch von der x_2x_3-Ebene sowie der Ebene $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ den Abstand 2 hat.

4 **a)** Erläutern Sie, wie man den Flächeninhalt eines Dreiecks im Raum bestimmen kann.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(2|-2|3)$, $B(2|2|6)$ und $C(2|3|0{,}5)$.

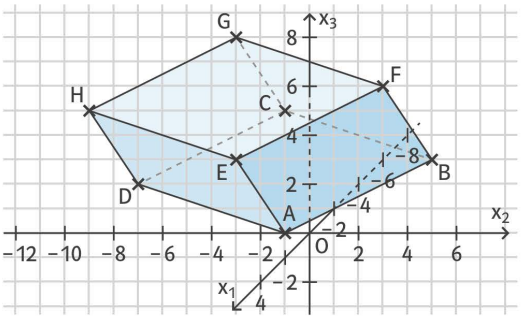


Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 1

90 min

D23 Lösungen Probeklausur Kapitel VII

1 Bei dem abgebildeten Körper handelt es sich um einen Spat, also ein schiefes Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche.
Der Spat hat die Eckpunkte A(6|2|3), B(−2|4|2), C(−2|−2|4), D(6|−4|5), E(6|0|6), F(−2|2|5), G(−2|−4|7) und H(6|−6|8).



a) Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABCD ein Parallelogramm ist.

b) Weisen Sie nach, dass das Parallelogramm ABCD den Flächeninhalt 50,6 FE hat.

c) (1) Geben Sie eine Gleichung der Ebene L an, in der die Grundfläche ABCD liegt.
(2) Weisen Sie nach, dass die Höhe des Spats ca. 2,2 LE beträgt, indem Sie das Lot vom Punkt E auf die Ebene L fällen.
(3) Berechnen Sie nun das Volumen des Spats.

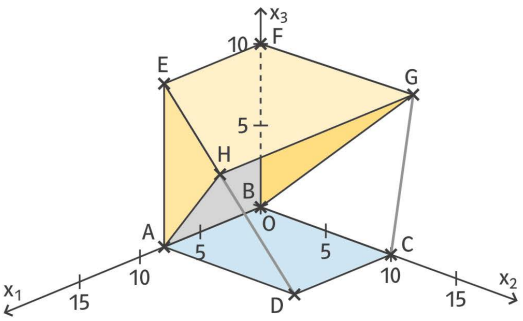
d) Die Rechenoperation $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ heißt Kreuzprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(1) Berechnen Sie das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$.

(2) Betrachtet wird nun der Term $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \circ \overrightarrow{AE}$. Begründen Sie, dass die Berechnung des Terms eine Zahl liefert, und führen Sie die Berechnung aus.

(3) Man nennt die Rechenoperation $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$ das Spatprodukt der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, die ein Spat „aufspannen". Erläutern Sie mithilfe des vorigen Ergebnisses, was mit dem Spatprodukt berechnet werden kann.

2 Der Eingangsbereich vor einer Konzerthalle wird modellhaft beschrieben durch den Körper mit den Eckpunkten A(8|0|0), B(0|0|0), C(0|10|0), D(8|10|0), E(8|0|10), F(0|0|10), G(−4|8|8) und H(12|8|8). Die Kanten stellen das Gerüst und die gelben Flächen das Vordach über dem blauen Teppich dar.
Eine Längeneinheit entspricht in der Realität einem Meter, die x_1x_2-Ebene beschreibt den Untergrund.



a) Begründen Sie, dass alle Dreiecke des Eingangsbereichs kongruent sind.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gesamten Vordachs.

c) Die Punkte G, H und A liegen in einer Ebene L.
(1) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene L in Koordinatenform auf.
(2) Begründen Sie, dass die Ebene L eine Symmetrieebene des Körpers ABCDEFGH ist.

d) Begründen Sie, dass für das Volumen V des umbauten Raums des Eingangsbereichs gilt:
$V_1 < V < V_2$ mit $V_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot 8 = 640$ [VE] und $V_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot 16 = 1280$ [VE].

e) Im Punkt J(2|4|0) ist ein Journalist positioniert, der die eintreffenden Stars interviewt. An der Gerüstkante $\overline{EH}$ soll an einem Punkt K eine Kamera installiert werden, die vom Interviewpunkt J den geringsten Abstand hat. Ermitteln Sie die Koordinaten von K.

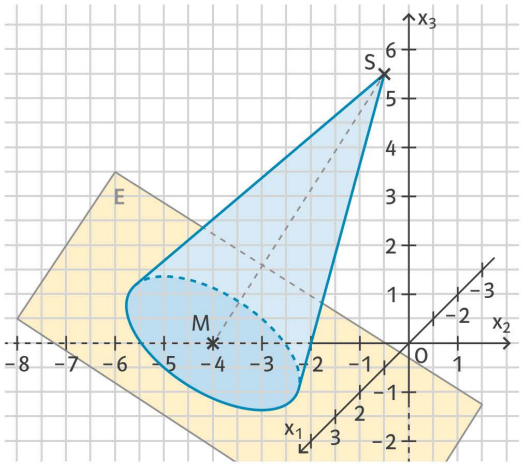
f) Im Punkt G ist ein Lichtspot angebracht. Damit der Spot den Bereich um den Punkt J herum gut ausleuchtet, sollte der Lichtstrahl nicht weiter als 0,5 m vom Punkt J entfernt sein.
Überprüfen Sie, ob dies der Fall ist, wenn der Spot in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ -1{,}8 \\ -4 \end{pmatrix}$ ausgerichtet ist.
Modellhaft wird dabei mit einem Lichtstrahl anstelle eines Lichtkegels gerechnet.

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 2

100 min

D23 Lösungen
Probeklausur
Kapitel VII

1 Ein Kegel mit einem Volumen von ca. 24,78 VE steht senkrecht auf der Ebene $E: x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 6$. Die Spitze des Kegels befindet sich im Punkt $S(1|0|6)$.



a) Weisen Sie nach, dass $M(2|-3|1)$ der Mittelpunkt der Kegelgrundfläche ist.

b) Ermitteln Sie die Höhe des Kegels sowie den Radius der Kegelgrundfläche.

c) Beschreiben Sie ein Vorgehen, um die Koordinaten eines Punktes P auf dem Kreisrand zu finden. Ermitteln Sie einen solchen Punkt. [z. B. $P(3|-4{,}39|2{,}03)$]

d) Berechnen Sie den Term $\sqrt{|\overrightarrow{MP}|^2 + |\overrightarrow{SM}|^2}$ und deuten Sie das Ergebnis im Kontext.

e) (1) Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g der Ebene E mit der x_1x_2-Ebene.
(2) Weisen Sie nach, dass der Punkt $D(1{,}5|-1{,}5|0)$ der Lotfußpunkt des Lotes von M auf die Gerade g ist.
(3) Beurteilen Sie mithilfe des Punktes D, ob der Kegel die x_1x_2-Ebene durchstößt.

f) Betrachtet wird nun die Ebenenschar $E_a: (3 + 5a) \cdot x_1 + x_2 + ax_3 = 11a + 3 \quad (a \in \mathbb{R})$.
(1) Zeigen Sie, dass alle Ebenen E_a der Schar Symmetrieebenen des Kegels sind.
(2) Geben Sie diejenige Ebene der Schar an, die den Ursprung enthält.

g) Eine Gerade k steht senkrecht auf der Ebene E. Beschreiben Sie, wie Sie überprüfen können, ob die Gerade k den Kegel weder berührt noch schneidet.

2 In einem Koordinatensystem entspricht die x_1x_2-Ebene der Meeresoberfläche. Das Tauchboot T_1 befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Koordinatenursprung und zwei Minuten darauf im Punkt $(104|128|-32)$. Das Tauchboot T_2 wird zu Beobachtungsbeginn im Punkt $(800|400|-100)$ und fünf Minuten später im Punkt $(450|785|-170)$ geortet.
1 LE entspricht in der Realität 1 Meter, die Zeit t wird in Minuten gemessen.

a) Stellen Sie zur Beschreibung der Routen beider Tauchboote jeweils zwei Bewegungsgleichungen g_1 und g_2 in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten auf und berechnen Sie die absoluten und die vertikalen Geschwindigkeiten, mit denen beide Boote unterwegs sind.

b) Ermitteln Sie die Entfernung der beiden Boote zu Beginn und nach 5 Minuten.

c) Formulieren Sie eine Fragestellung, die mit dem Ansatz $-16t = -100 - 14t$ bearbeitet werden könnte. Lösen die die Gleichung und deuten Sie das Ergebnis im Sachkontext.

d) Ein Satellit zeichnet die Positionen der Boote ohne Berücksichtigung der Tiefe auf. Bestimmen Sie den Ort, an dem sich die beiden Routen der Boote aus der Satellitenperspektive kreuzen, sowie die vertikale Distanz der Routen an dieser Stelle. Prüfen Sie, ob die vertikale Distanz zugleich die geringste Entfernung beider Routen angibt.

e) Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem Sie prüfen können, ob beide Boote zu jeder Zeit weiter als 500 m voneinander entfernt sind.

f) Bestimmen Sie den geringsten Abstand, in dem die Boote aneinander vorbeifahren, sowie den Zeitpunkt, zu dem dies geschieht.

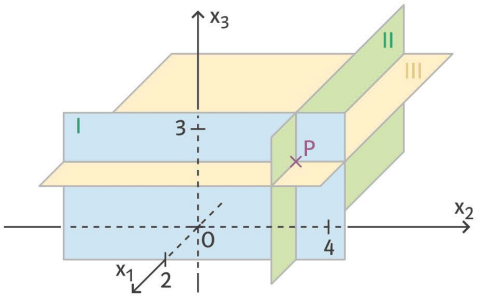
Geometrie in Gleichungssystemen

Ein Punkt als Lösung eines linearen Gleichungssystems

Der Punkt $P(2|4|3)$ ist ein Punkt im Raum mit den Koordinaten $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ und $x_3 = 3$. Notiert man diese drei Gleichungen als ein LGS mit den drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3, so erhält der Punkt P eine weitere geometrische Bedeutung.

Lineares Gleichungssystem (LGS) mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten:

I $x_1 = 2$
II $x_2 = 4$
III $x_3 = 3$



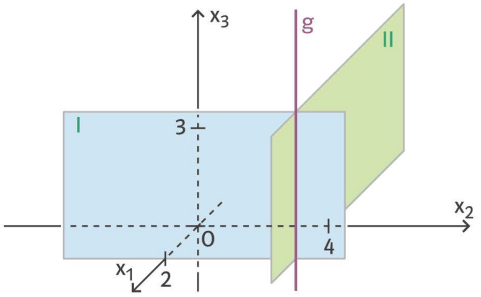
1 Setzen Sie das LGS links in Bezug zur Abbildung rechts. Erläutern Sie die geometrische Bedeutung der einzelnen drei Gleichungen sowie der Lösung des LGS.

Eine Gerade als Lösung eines linearen Gleichungssystems

Das LGS von oben mit den Unbekannten x_1, x_2 und x_3 wird nun um eine Gleichung bzw. „Bedingung" reduziert. Hat ein LGS weniger Gleichungen als Unbekannte, nennt man dies ein **unterbestimmtes LGS**.

LGS mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten:

I $x_1 = 2$
II $x_2 = 4$



2 Untersuchen Sie, wie sich die Lösung des unterbestimmten LGS und seine geometrische Bedeutung verändern. Stellen Sie den Bezug zur Abbildung rechts her.
Geben Sie die Lösung des LGS in einer Darstellung an, aus der sich ihre geometrische Bedeutung ablesen lässt.

3 **Eine Ebene als Lösung eines linearen Gleichungssystems**

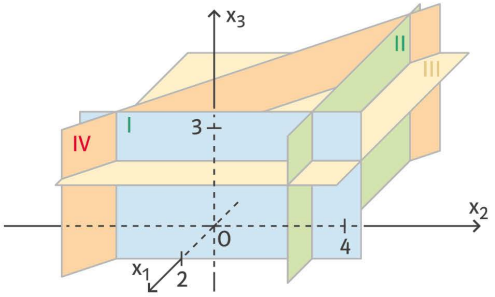
Das LGS von oben mit den Unbekannten x_1 und x_2 wird erneut um eine Gleichung reduziert. Man erhält ein LGS mit 1 Gleichung und 3 Unbekannten: I $x_1 = 2$.
Beschreiben Sie wie oben die geometrische Bedeutung dieses unterbestimmen LGS und geben Sie seine Lösung in verschiedenen Darstellungsformen an.

4 **Die Unmöglichkeit einer Lösung eines linearen Gleichungssystems**

Das LGS von oben mit den Unbekannten x_1, x_2 und x_3 wird nun um eine vierte Gleichung erweitert. Hat ein LGS mehr Gleichungen als Unbekannte, nennt man dies ein **überbestimmtes LGS**.

LGS mit 4 Gleichungen und 3 Unbekannten:

I $x_1 = 2$
II $x_2 = 4$
III $x_3 = 3$
IV $x_1 + x_2 = 0$



Setzen Sie das LGS in Bezug zur Abbildung rechts. Erläutern Sie, warum das LGS aus einer geometrischen Betrachtung heraus keine Lösung haben kann.

Info

Lineare Gleichungssysteme und ihre geometrische Deutung
Ein LGS heißt unterbestimmt, wenn es weniger Gleichungen als Unbekannte hat.
Es heißt überbestimmt, wenn es mehr Gleichungen als Unbekannte hat.

In einem LGS mit drei Unbekannten lässt sich jede Gleichung als Beschreibung einer Ebene auffassen. Damit lässt sich genau eine Lösung als Schnittpunkt von Ebenen deuten, unendlich viele Lösungen mit einer frei wählbaren Unbekannten dagegen als Schnittgerade.
Sind sogar zwei Unbekannte frei wählbar, stellt die Lösung eine Ebene dar.

Lineare Gleichungssysteme geometrisch bzw. algebraisch lösen
Beim Lösen eines LGS kann es nützlich sein, dies als ein geometrisches Schnittproblem von Ebenen aufzufassen. Es lässt sich z. B. das Wissen über die Lage von Ebenen einbeziehen.

5 a) Vermuten Sie unter Einbeziehung der geometrischen Betrachtung zunächst, ob das LGS keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat.
b) Stellen Sie anschließend das LGS in dem Geometriemodul Ihres MMS als geometrisches Problem dar.
c) Überprüfen Sie abschließend Ihr Ergebnis, indem Sie das LGS algebraisch lösen.

A
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 2 \\ \text{II} & x_3 & = & 6 \\ \text{III} & -4x_1 + 2x_2 - 8x_3 & = & -4 \\ \text{IV} & 0{,}5x_3 & = & 3 \end{array}$$

B
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 + x_2 & = & 4 \\ \text{II} & x_1 - x_2 & = & 4 \end{array}$$

C
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ \text{II} & x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ \text{III} & x_3 & = & 4 \end{array}$$

D
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ \text{II} & x_2 + x_3 & = & 6 \\ \text{III} & x_1 + x_3 & = & 4 \\ \text{IV} & x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \end{array}$$

E
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 - x_2 - x_3 & = & a \\ \text{II} & -x_1 + x_2 - x_3 & = & a \\ \text{III} & -x_1 - x_2 + x_3 & = & a \\ \text{IV} & x_1 + x_2 + x_3 & = & a \end{array}$$

F
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & -3x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 9 \\ \text{II} & 6x_1 - 6x_2 - 2x_3 & = & -18 \\ \text{III} & 3x_1 - 3x_2 - x_3 & = & -9 \end{array}$$

G
$$\text{I} \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

H
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 + x_2 & = & 0 \\ \text{II} & x_3 & = & -1 \end{array}$$

6 **Besondere Fälle untersuchen**
Untersuchen Sie, ob die folgenden Behauptungen korrekt sind. Geben Sie gegebenenfalls ein konkretes Beispiel an.

A Es gibt ein unterbestimmtes LGS, das keine Lösung hat.

B Es gibt ein LGS, dessen Lösung der gesamte Raum ist.

C Es gibt ein unterbestimmtes LGS, das genau eine Lösung hat.

D Es gibt ein LGS mit zwei Gleichungen und einem Punkt als Lösung.

VIII Daten und Wahrscheinlichkeit

In der Statistik werden Daten erfasst und mithilfe von Kenngrößen charakterisiert und dargestellt.

Wahrscheinlichkeiten sind unsichere Festlegungen. Sie entstehen in unserer Vorstellung, wenn aus Erfahrungen (Daten) Erwartungen (Modelle) werden.

Das können Sie bald

- Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung einsetzen
- bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen
- Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen
- stochastische Vorgänge simulieren
- statistische Daten durch Kenngrößen charakterisieren
- Erwartungswert und Standardabweichung einer Zufallsgröße berechnen

Check-in

Schätzen Sie sich ein:

	☺	😐	☹
1. Ich kann relative Häufigkeiten berechnen.	☐	☐	☐
2. Ich kann mit Prozenten und Anteilen rechnen.	☐	☐	☐
3. Ich kann den Mittelwert einer Liste von Daten bestimmen.	☐	☐	☐
4. Ich kann Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten schätzen.	☐	☐	☐
5. Ich kann Wahrscheinlichkeiten mithilfe eines Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel bestimmen.	☐	☐	☐

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen,** Seite 422
zu 2. **Grundwissen,** Seite 410
zu 3. **Grundwissen,** Seite 422
zu 4. **Grundwissen,** Seite 422

Test

Lösungen, Seite 511

1 **Relative Häufigkeiten berechnen**

In einer Lostrommel liegen Gewinne und Nieten.

a) Jan hat 20-mal in eine Lostrommel hineingegriffen und dabei 18 „Nieten“ gezogen. Berechnen Sie (im Kopf) die relative Häufigkeit für „Gewinn“ als Bruch und in Prozent.

b) Jana erreichte bei 12 Ziehungen eine Gewinnquote von 25 %. Berechnen Sie die absolute und die relative Häufigkeit der Nieten.

2 **Mit Prozenten und Anteilen rechnen**

Bei einer Wahl haben die angegebenen Parteien die in der Tabelle angegebenen Stimmen erzielt.

Partei	C4U	SAD	G2H
Stimmen	2500	3500	4000

Geben Sie den Anteil für jede Partei als Bruch, als Dezimalzahl und in Prozent an.

3 **Mittelwert einer Liste bestimmen**

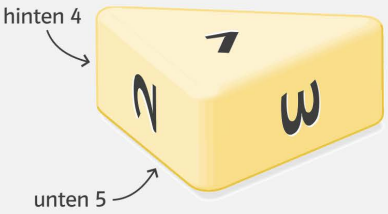
Berechnen Sie den Mittelwert der folgenden Zahlen: 2,5; 6,3; 1,9; 10,0; 2,8; 5,6; 5,1; 7,8.

4 **Wahrscheinlichkeiten schätzen**

Mit dem „Dreieckswürfel“ ergaben sich nach 300 Würfen folgende absolute Häufigkeiten.

Augenzahl	1	2	3	4	5
abs. Häufigkeit	104	37	29	34	96

Legen Sie mögliche Wahrscheinlichkeiten für die Augenzahlen fest.



5 **Mit Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln arbeiten**

Jugendliche der Unter-/Mittelstufe (S) und der Oberstufe ($\overline{S}$) werden befragt, ob sie Englisch mögen (E) oder nicht ($\overline{E}$).

	S	$\overline{S}$	
E	450	250	
$\overline{E}$		100	
			1000

a) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.

b) Erstellen Sie zwei verschiedene Baumdiagramme zu der Vierfeldertafel.

c) Eine Schülerin oder ein Schüler wird zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie bzw. er
(1) Englisch mag, (2) in der Unter-/Mittelstufe ist, (3) in der Oberstufe ist und Englisch mag.

D24 Check-in

Hol' den OPA aus dem Beutel

→ Lerneinheit 1
Seite 288

Vor dem Rechnen kann man den Beutel ruhig erst einmal im Kursraum kreisen lassen.
Ob sich „OPA" eher blicken lässt, wenn ein Euro Preisgeld auf dem Pult liegt?

Sie haben einen Beutel mit den drei Buchstaben A, P und O. Wenn Sie dreimal hineingreifen und die Buchstaben in der gezogenen Reihenfolge hintereinanderlegen, entsteht mit etwas Glück das Wort „OPA".

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür.
b) Untersuchen Sie, ob die Wahrscheinlichkeit größer wird, wenn man den Beutelinhalt verdoppelt, indem man alle Buchstaben zweimal hineinlegt.
c) Wenn jeder Buchstabe doppelt vorkommt, müsste es ziemlich wahrscheinlich sein, dass man „PAPA" zieht. Untersuchen Sie, wie wahrscheinlich das Wort „PAPA" genau ist.
d) Zieht man in Teilaufgabe a) das Wort „OPA", soll man 10 € gewinnen. Wie groß müsste der Einsatz sein, damit dieses Glücksspiel fair wird, man also langfristig weder Gewinn noch Verlust macht?

Drillinge gesucht

→ Lerneinheit 1
Seite 288

Auf dem Tisch liegen (verdeckt und gemischt) drei Buben, drei Damen und drei Könige. Legen Sie eine Münze auf den Tisch und ziehen Sie dafür drei der neun Karten.

Spiel 1

Wenn Sie einen Drilling (dreimal die gleiche „Person", etwa dreimal Dame) ziehen, bekommen Sie Ihren Einsatz zurück und 20 Münzen als Gewinn dazu.

Spiel 2

Wenn Sie drei verschiedene Personen (Bube, Dame, König) ziehen, bekommen Sie Ihren Einsatz zurück und vier Münzen als Gewinn dazu.

a) 👥 Spielen Sie die Spiele in Ihrer Gruppe so lange, bis jemand gewinnt.
b) Untersuchen Sie, bei welchem Spiel man eher gewinnt.
c) Untersuchen Sie, bei welchem Spiel man langfristig Gewinn bzw. Verlust macht.
d) Bestimmen Sie den Betrag, der ausgezahlt werden müsste, damit die Spiele jeweils fair werden.

Bertrand'sches Schubfächerproblem – bedingte Wahrscheinlichkeiten

→ Lerneinheit 3
Seite 297

Statt zu experimentieren, kann man die Lösung auch mithilfe eines Baumdiagramm finden.

Bertrand hat drei gleich aussehende Schränkchen mit je zwei Schubladen. In einem Schränkchen liegen in einer Lade eine Silber-, in der anderen eine Goldmünze. In den Laden des zweiten Schränkchens sind beide Münzen golden, in denen des dritten Schränkchens sind beide silbern. Sie wählen zufällig eines der drei Schränkchen, öffnen zufällig eine der Laden und sehen eine Goldmünze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die andere Lade des Schränkchens eine Goldmünze enthält?

👥 Finden Sie eine Antwort, indem Sie das Experiment mit drei „Schränkchen" aus je zwei zusammengeklebten Streichholzschachteln zu zweit mehrfach durchführen und die Ergebnisse im Kurs sammeln.

Laplace-Bleistifte?

Wenn Sie die Seiten Ihres Bleistiftes mit den Augenzahlen 1, 2, …, 6 beschriften und diesen Stift über den Tisch rollen lassen, haben Sie einen „Bleistiftwürfel".
Ist er „fair"? Werden alle Seiten Ihres Bleistifts mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ „gewürfelt"?
Sie werden vermutlich sagen: „Klar doch, symmetrischer als ein Sechskant-Bleistift kann man doch gar nicht sein". Aber seien Sie nicht zu sicher!
Zur Beurteilung der Wirklichkeit hilft kein Spekulieren, hier muss man experimentieren, simulieren und nachdenken!

Lerneinheit 4
Seite 301
Lerneinheit 5
Seite 305

Laplace-Stift:
Alle Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit.

1. **Experimentieren**
Rollen Sie Ihren Stift 120-mal, indem Sie einen Ordner oder ein Buch als Rampe nutzen.
Protokollieren Sie die gewürfelten Augenzahlen in einer Strichliste.
Entscheiden Sie intuitiv, ob Sie Ihren Stift als fair durchgehen lassen können, weil die Häufigkeiten aller Seiten hinreichend nahe am Wert 20 liegen.
Diskutieren Sie Ihre Einschätzung in Kleingruppen.
Da man bei einem Laplace-Stift jede Seite 20-mal erwartet, bezeichnet man 20 auch als Erwartungswert.

2. **Simulieren**
Wiederholen Sie das Experiment mit Spielwürfeln und Würfelbechern, um herauszufinden, wie stark die Häufigkeiten bei wirklich fairen Würfelstiften tatsächlich um den Wert 20 schwanken können.
Überprüfen Sie auf dieser Grundlage die Einschätzung Ihres Bleistiftes aus 1.
Das reale Würfeln können Sie auch mit einem MMS simulieren.

I13 **interaktive Anwendung**
Laplace-Stift-Simulation

3. **Nachdenken**
Nach den in 2. gewonnenen Erfahrungen hält Paul bei fairen Würfeln auch größere Abweichungen vom „Wert 20" für normal. Er schlägt vor, einen Stift erst dann als unfair „abzuqualifizieren", wenn die Häufigkeiten der sechs Seiten **im Mittel** um mehr als 5 vom Wert 20 abweichen. Für seine nebenstehende Häufigkeitsverteilung erhält er die mittlere Abweichung $(1 + 2 + 3 + 5 + 3 + 5) : 6 \approx 3{,}17$.

Pauls Verteilung

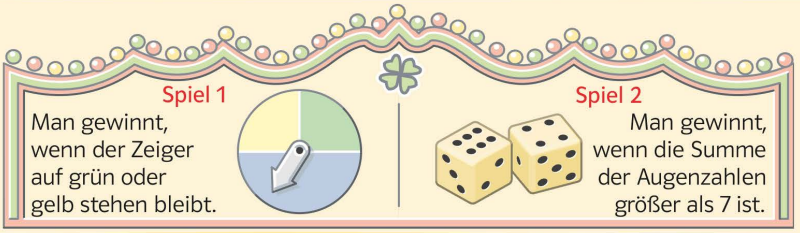
gewürfelte Zahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	21	18	23	25	17	15
Abweichung vom Wert 20	1	2	3	5	3	5

Wie man Abweichungen anders erfasst, lernen Sie in Lerneinheit 4 ab Seite 301.

a) Bewerten Sie Pauls Vorschlag vor dem Hintergrund der Simulationsergebnisse aus 2.
b) Zu welcher Einschätzung kommen Sie, wenn Sie Pauls Regel für Ihre Versuchsergebnisse aus 1. anwenden?
c) Sammeln und prüfen Sie Ideen für Alternativen zu Pauls Qualitätskriterium.
d) Bewerten Sie im Rückblick auf die Ergebnisse Ihrer Lerngruppe die Qualität von Bleistiftwürfeln.

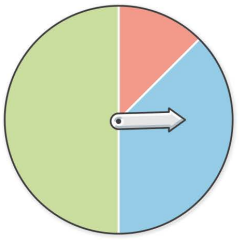
1 Wiederholung: Wahrscheinlichkeit

Untersuchen Sie, bei welchem Spiel Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit höher ist.



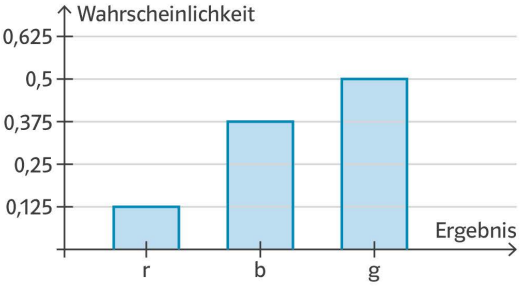
Es wird daran erinnert, wie Zufallsexperimente oder Datenerhebungen mithilfe von Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden.

Bei einem **Zufallsexperiment,** wie dem Drehen des nebenstehenden Glücksrades, sind mehrere **Ergebnisse** möglich. Man fasst sie in der **Ergebnismenge** $S = \{r, b, g\}$ zusammen. Dabei steht „r" für das Ergebnis, dass der Zeiger im roten Feld stehen bleibt; „b" und „g" sind entsprechend zu verstehen. Jedem Ergebnis ordnet man eine **Wahrscheinlichkeit** zu. Insgesamt erhält man eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung**. Wahrscheinlichkeiten sind mathematische Modelle für die Realität. Man geht hier davon aus, dass die Wahrscheinlichkeiten den Flächenanteilen des Glücksrades entsprechen. Die Erwartung, dass die relativen Häufigkeiten um die Flächenanteile des Glücksrades schwanken, führt zu dieser Festlegung. Wie die Summe der relativen Häufigkeiten, hat die Summe der Wahrscheinlichkeiten auch den Wert 1.

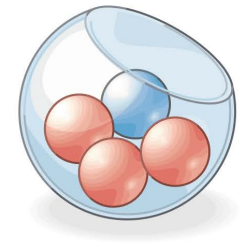


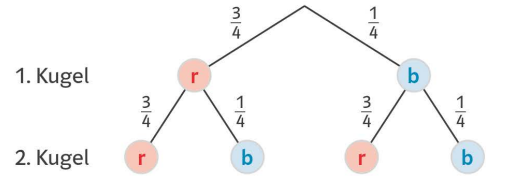
Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Ergebnis	r	b	g
Wahrscheinlichkeit	0,125	0,375	0,5



Viele Zufallsexperimente lassen sich als mehrstufige Experimente deuten. Man beschreibt sie durch **Baumdiagramme** und berechnet Wahrscheinlichkeiten mit der **Pfadregel**.
Wenn man aus der Urne zwei Kugeln (mit Zurücklegen) zieht, kann man das als zweistufiges Zufallsexperiment mit der Ergebnismenge $S = \{rr, rb, br, bb\}$ auffassen. S besteht aus Folgen von Einzelergebnissen, die man Tupel nennt. Man stellt sie als Pfade in einem Baumdiagramm dar. Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses wird bestimmt, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades multipliziert, z. B. $P(rb) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$. Das ist plausibel, denn in $\frac{3}{4}$ aller Fälle erhält man im ersten Schritt Rot und anschließend in $\frac{1}{4}$ der Fälle auch noch Blau. Somit erhält man in $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$ aller Fälle das Ergebnis rb, also in $\frac{3}{16}$.





e	rr	rb	br	bb
P(e)	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Baum mit Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ergebnisse werden mit e abgekürzt, ihre Wahrscheinlichkeit mit P(e).

Betrachtet man ein oder mehrere Ergebnisse unter einem Aspekt, spricht man von einem **Ereignis**. Beispielsweise ist „beide Kugeln haben die gleiche Farbe“ ein Ereignis. Die zugehörigen Ergebnisse fasst man zu einer Menge $E = \{rr, bb\}$ zusammen. E ist Teilmenge der Ergebnismenge S, kurz $E \subseteq S$, und kann im Extremfall kein Element enthalten (leere Menge $\{\ \}$). Dabei wird die zu dem Ereignis gehörende Menge E selbst auch als Ereignis bezeichnet. Ein Ereignis kann also in Worten und als Menge beschrieben werden. Um seine Wahrscheinlichkeit P(E) zu bestimmen, addiert man die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse aus E **(Summenregel)**:
$P(E) = P(rr) + P(bb) = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten
Die Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man in der Ergebnismenge zusammen. Ihre Wahrscheinlichkeiten sind Zahlen im Intervall $[0; 1]$ mit der Summe 1. Sie bilden eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Man legt sie so fest, dass sie die relativen Häufigkeiten gut vorhersagen.
Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis eines mehrstufigen Zufallsexperiments erhält man, indem man die zuvor festgelegten Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades am Baumdiagramm multipliziert.
Ereignisse: Ein Ereignis E ist eine Teilmenge der Ergebnismenge. Wenn man ein Ergebnis aus E erhält, sagt man: Das Ereignis E ist eingetreten.
Summenregel: Die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses E berechnet man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse addiert.

Beispiel 1 **Ergebnismenge festlegen – Teil des Modellierens**
Eine Münze mit den Seiten Wappen (W) und Zahl (Z) wird dreimal geworfen.

a) Bestimmen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn man als Ergebnismenge $S = \{WWW, ZWW, WZW, WWZ, ZZW, ZWZ, WZZ, ZZZ\}$ festlegt.
Bei den Ergebnissen ist jeweils die oben liegende Seite notiert.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit P(E) für das Ereignis $E = \{WWW, ZWW, WZW, WWZ\}$.
Beschreiben Sie das Ereignis in Worten.

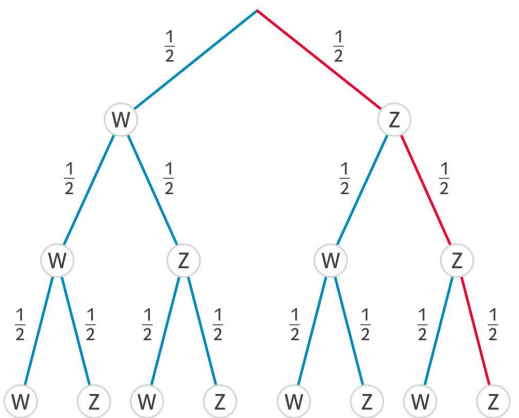
b) Bestimmen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn man als Ergebnismenge $S' = \{0, 1, 2, 3\}$ festlegt. Dabei geben die Zahlen an, wie oft Z oben liegt.
Geben Sie ein Ereignis E' an, das dem Ereignis E aus Teilaufgabe a) entspricht.

Lösung

Man geht davon aus, dass W bzw. Z jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ oben liegt.

a) Man erhält mit dem Baumdiagramm für alle Ergebnisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ und somit die Wahrscheinlichkeitsverteilung unter dem Baumdiagramm.
$P(E) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ nach der Summenregel.
E: „Es fällt höchstens einmal Zahl.“

b) Beispielsweise gehören zum Ergebnis 1 die Ergebnisse WWZ, WZW und ZWW der Verteilung von Teilaufgabe a). Daher ergibt sich $P(1) = \frac{3}{8}$. Insgesamt lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung:



e	0	1	2	3
P(e)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

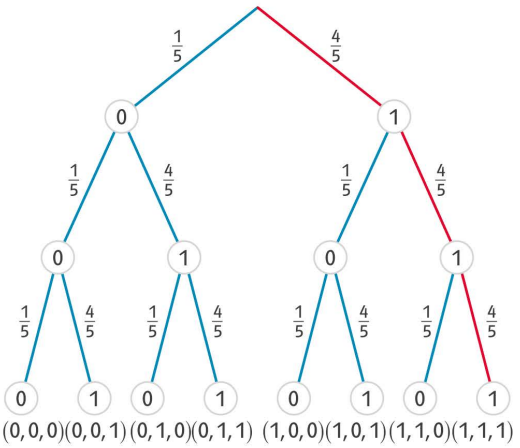
e	WWW	ZWW	WZW	WWZ	ZZW	ZWZ	WZZ	ZZZ
P(e)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E' = \{0; 1\}$ entspricht dem Ereignis E von Teilaufgabe a).

Beispiel 2 **Wahrscheinlichkeiten bei einer Modellierung berechnen**

Bei drei Patienten wird untersucht, ob die Diagnose eines Heilpraktikers falsch ist (0) oder stimmt (1). Das kann man als dreistufiges Zufallsexperiment auffassen und durch ein Baumdiagramm beschreiben. Die Ergebnisse für die drei Patienten werden dann in Tupeln wie (0, 1, 1) notiert.

Es wird angenommen, dass die Diagnose mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{5}$ stimmt.



a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse
E: „Genau zwei Diagnosen stimmen.“,
F: „Mindestens zwei Diagnosen stimmen.“.

c) Deutet Sie das Ereignis $E = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ im Sachzusammenhang und bestimmen Sie $P(E)$.

Lösung

a) *Die Wahrscheinlichkeiten werden für alle Ergebnisse mit der Pfadregel bestimmt. So ergibt sich z.B.* $P(0, 1, 1) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{125}$.

Ergebnis	(0, 0, 0)	(0, 0, 1)	(0, 1, 0)	(0, 1, 1)	(1, 0, 0)	(1, 0, 1)	(1, 1, 0)	(1, 1, 1)
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{125}$	$\frac{4}{125}$	$\frac{4}{125}$	$\frac{16}{125}$	$\frac{4}{125}$	$\frac{16}{125}$	$\frac{16}{125}$	$\frac{64}{125}$

b) $E = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ und $F = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$; mit der Summenregel ergibt sich $P(E) = \frac{16}{125} + \frac{16}{125} + \frac{16}{125} = \frac{48}{125}$ und $P(F) = \frac{16}{125} + \frac{16}{125} + \frac{16}{125} + \frac{64}{125} = \frac{112}{125}$.

c) Sachzusammenhang: „Höchstens eine Diagnose stimmt.“
Nach der Summenregel ergibt sich $P(E) = \frac{1}{125} + \frac{4}{125} + \frac{4}{125} + \frac{4}{125} = \frac{13}{125}$.

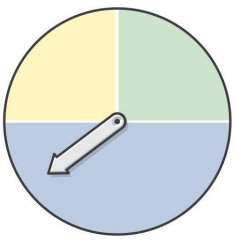
Aufgaben

○ **1** Das Glücksrad wird einmal gedreht.

a) Geben Sie eine passende Ergebnismenge an.

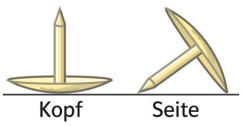
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und erstellen Sie dazu ein Säulendiagramm.

c) Geben Sie an, wie oft Sie das Ergebnis „Gelb“ in etwa erwarten können, wenn Sie das Glücksrad 80-mal drehen.



○ **2** Es soll eine Wahrscheinlichkeit dafür festgelegt werden, dass eine bestimmte Sorte von Heftzwecken auf „Kopf“ bzw. „Seite“ landet. Legen Sie mithilfe der Daten in der Tabelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Zufallsexperiment „Werfen einer solchen Heftzwecke“ fest. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

100 × Werfen	1. Durchgang		2. Durchgang	
Ergebnis	Kopf	Seite	Kopf	Seite
absolute Häufigkeit	65	35	57	43



○ **3** Beim Roulette kann man auf ein rotes oder schwarzes Feld oder auf die Null setzen oder auf eine gerade oder ungerade Zahl.

a) Formulieren Sie unterschiedliche Ergebnismengen.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Kugel auf
(1) ein rotes Feld fällt, (2) eine Zahl kleiner als 10 fällt.

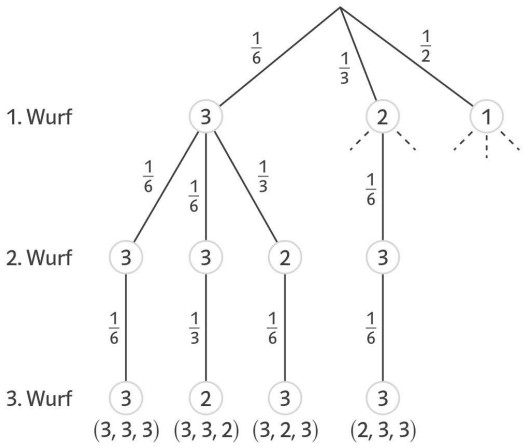
Lerntipp
Seite 289, Beispiel 1

4 Bei einer Lotterie werden drei Würfel geworfen. Bei jedem Würfel sind drei Seiten mit „1“, zwei Seiten mit „2“ und eine Seite mit „3“ beschriftet. Betrachten Sie die Ergebnismenge $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), \ldots, (3, 3, 3)\}$. Nebenstehend ist ein Teil des zugehörigen Baumdiagramms dargestellt.

a) Die angegebenen Ergebnisse bilden ein Ereignis E. Beschreiben Sie E in Worten und bestimmen Sie P(E).

b) Geben Sie das Ereignis F: „Die Augensumme beträgt 5.“ als Menge an und bestimmen Sie P(F).

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis G: „Höchstens Augensumme 8“.



Lerntipp
Seite 290, Beispiel 2

5 **Wahr oder falsch?**

Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Es gibt kein Zufallsgerät, mit dem man 7 gleich wahrscheinliche Ergebnisse erhält.

b) Wenn man zwei Münzen wirft, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einmal Wappen und einmal Zahl fällt, ebenso groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zweimal Zahl fällt.

c) Die Ergebnismenge S eines Zufallsexperiments ist auch ein Ereignis, und es gilt $P(S) = 1$.

d) Die leere Menge ist bei jedem Zufallsexperiment ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 0.

e) Wenn man beim Würfeln fünfmal nacheinander eine 6 erzielt, ist der Würfel gezinkt.

6 In einem Strumpf befinden sich sechs rote (r) und vier grüne (g) Kugeln. Sie ziehen zwei Kugeln mit Zurücklegen. Als Ergebnismenge wird $S = \{rr, rg, gr, gg\}$ festgelegt.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

b) Moritz beschreibt das Ergebnis rg: „Es wird eine rote und eine grüne Kugel gezogen.“. Nehmen Sie zu seiner Beschreibung Stellung.

c) Beschreiben Sie das Ereignis E: „Es wird mindestens eine grüne Kugel gezogen.“ als Menge und bestimmen Sie P(E).

d) Beschreiben Sie das Ereignis $F = \{rr, gr\}$ in Worten und bestimmen Sie P(F).

e) Untersuchen Sie, was sich in den Teilaufgaben a) bis d) ändert, wenn Sie ohne Zurücklegen ziehen.

Test 1

Lösungen, Seite 512

7 a) Das Glücksrad wird einmal gedreht.
Geben Sie jeweils die Ergebnismenge und die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung an, wenn man
(1) auf die Zahlen achtet, (2) auf die Farben achtet.

b) Erklären Sie, wie oft etwa eine Zahl vorkommen wird, die kleiner als 4 ist, wenn man 250-mal dreht.

8 Aus einem Korb mit vier Orangen, sechs Äpfeln und zwei Birnen wählt man zufällig drei Früchte aus.

a) Beschreiben Sie eine passende Ergebnismenge.

b) Stellen Sie das Ereignis als Teilmenge der Ergebnismenge dar. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.
E: „Man bekommt nur Äpfel.“
F: „Man bekommt zwei Birnen und einen Apfel.“
G: „Man bekommt eine Orange, einen Apfel und eine Birne.“

9 Beschreiben Sie ein mögliches Zufallsexperiment zur Wahrscheinlichkeitsverteilung.

a)

Ergebnis	rot	grün	blau
Wahrscheinlichkeit	0,5	0,25	0,25

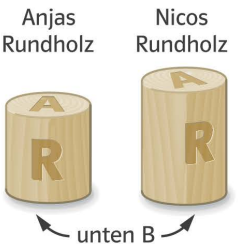
b)

Ergebnis	ungerade	gerade
Wahrscheinlichkeit	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

10 Anja und Nico würfeln je 300-mal mit einem der Rundhölzer und zählen jeweils, wie häufig die Ergebnisse A, B und R sind.

a) Entscheiden Sie begründet, welche Angaben eher zu Anjas Holz und welche eher zu dem von Nico gehören.

b) Legen Sie Wahrscheinlichkeiten für die beiden Rundhölzer fest.



A	B	R
81	92	127
40	42	218

11 Beim Werfen des Tetraeders (Fig. 1) gilt als Ergebnis die Zahl, auf der er liegen bleibt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim dreimaligen Werfen

a) die Augenzahlen immer größer werden,

b) die Augensumme 5 ist,

c) nicht drei gleiche Ergebnisse vorkommen.

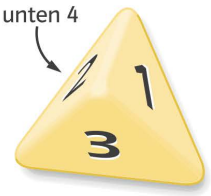


Fig. 1

Fig. 2

12 Bei dem Quader (Fig. 2) ergibt die Summe der gegenüberliegenden Zahlen jeweils 7.

a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine „4“ größer oder kleiner ist als bei einem normalen Spielwürfel.

b) Darius würfelt 100-mal mit dem Quader. Er erhält 21 Einsen, 22 Zweien, 8 Dreien, 7 Vieren, 23 Fünfen und 19 Sechsen. Er behauptet, dass demnach die Wahrscheinlichkeit für eine „1“ 21 %, für eine „2“ 22 %, für eine „3“ 8 %, für eine „4“ 7 %, für eine „5“ 23 % und für eine „6“ 19 % beträgt. Nehmen Sie hierzu Stellung und verbessern Sie ggf. die Lösung von Darius.

Test 2

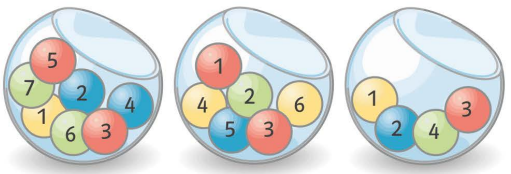
Lösungen, Seite 512

13 Sie wählen eine der Urnen zufällig aus und ziehen daraus eine Kugel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es

a) eine gelbe Kugel ist,

b) keine rote Kugel ist,

c) eine grüne Kugel mit Primzahl ist.



(1) (2) (3)

14 Ein Buch wird aufgeschlagen und man zeigt zufällig auf einen Buchstaben. Man möchte festlegen, wie wahrscheinlich es ist, dass man ein A, ein B, ein C usw. getroffen hat.

a) Beschreiben Sie, wie man dabei vorgehen kann.

b) Legen Sie nach Ihrem Plan aus Teilaufgabe a) die Wahrscheinlichkeit des im Deutschen häufigsten Buchstaben „e“ fest.

c) Im Internet findet man die Tabelle auf den Rand für die Häufigkeit von Anfangsbuchstaben deutscher Wörter. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Wort nicht mit einem Anfangsbuchstaben aus der Tabelle beginnt.

Buchstabe	rel. Häufigk.
D	14,2 %
S	10,8 %
E	7,8 %
I	7,1 %
W	6,8 %

Grundwissen Test

Anteile in Brüchen, Dezimalzahlen oder Prozenten angeben

Grundwissen, Seite 410
Lösungen, Seite 512

G **15** Geben Sie den Anteil in den anderen beiden Darstellungen an.

a) $\frac{4}{5}$ b) 0,7 c) 15 % d) $\frac{2}{3}$ e) 0,425 f) 1,5 % g) $\frac{1}{50}$ h) $0,\overline{7}$ i) $\frac{1}{2}$ %

2 Verknüpfen von Ereignissen

Maren überlegt: „Wenn ich einen Würfel nehme, ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs $\frac{1}{6}$, wenn ich zwei Würfel nehme, ist sie $\frac{2}{6}$, wenn ich drei Würfel nehme, ist sie $\frac{3}{6}$ usw.
Das ist ja einfach!"
Nehmen Sie Stellung zu Marens Überlegung.

Bei der Darstellung und Erfassung von Ereignissen werden Vierfeldertafeln und Baumdiagramme verwendet. Ereignisse lassen sich zudem mithilfe von Mengendiagrammen beschreiben. Damit kann man Verknüpfungen von Ereignissen veranschaulichen und neue Erkenntnisse gewinnen.

Das Gefäß enthält 6 blaue und 4 rote Kugeln, die zusätzlich nummeriert sind. Man zieht blind eine Kugel. Man legt als Ergebnismenge $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ fest. Das Ereignis E: „Ziehen einer blauen Kugel" wird dann als Menge $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dargestellt. Es gilt $P(E) = 0{,}6$.

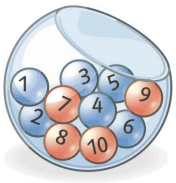


Fig. 1

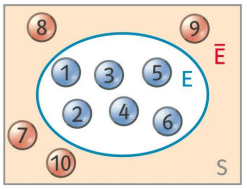


Fig. 2

Ein Ergebnis wie z. B. 3 liegt in der Ergebnismenge S, kurz: $3 \in S$, lies: „3 ist Element von S". Ein Ereignis wie z. B. $\{1, 2, 3\}$ ist eine Teilmenge von S, kurz $\{1, 2, 3\} \subseteq S$.

Man nennt $\overline{E} = \{7, 8, 9, 10\}$ das **Gegenereignis** von E. Es bedeutet hier „Ziehen einer roten Kugel". Es gilt $P(E) = 1 - P(E) = 0{,}4$, da E und $\overline{E}$ zusammen S ergeben. Mithilfe des **Mengendiagramms** kann man E und $\overline{E}$ veranschaulichen (Fig. 2). Das Rechteck enthält die Ergebnismenge S. Im Oval findet man die Elemente von E, außerhalb die von $\overline{E}$.

Betrachtet wird zusätzlich das Ereignis F: „Ziehen eines Vielfachen von 3" $= \{3, 6, 9\}$ mit $P(F) = 0{,}3$. Die beiden Ovale in Fig. 3 stellen die Mengen E und F dar. Sie überschneiden sich im rot markierten Bereich, weil sie gemeinsame Elemente haben. Die Menge dieser Elemente nennt man **Schnittmenge** $E \cap F$, gesprochen „E geschnitten F". Enthält $E \cap F$ kein Element, schreibt man $E \cap F = \{\ \}$ (leere Menge). Es gilt $P(\{\ \}) = 0$.

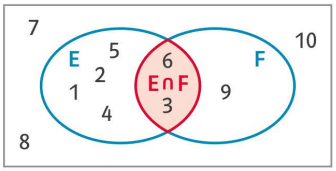


Fig. 3

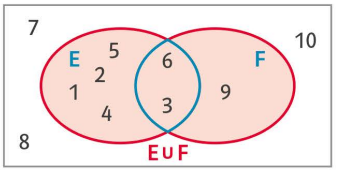


Fig. 4

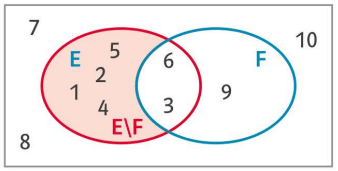


Fig. 5

Weitere Darstellungen von Verknüpfungen zeigen in Fig. 4 die **Vereinigungsmenge** $E \cup F$ (gesprochen „E vereinigt mit F") und in Fig. 5 die **Komplementmenge** $E \setminus F$ (gesprochen „E ohne F"). $E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ enthält alle Elemente, die in E oder in F liegen und $E \setminus F = \{1, 2, 4, 5\}$ enthält alle Elemente, die in E, aber nicht in F liegen.

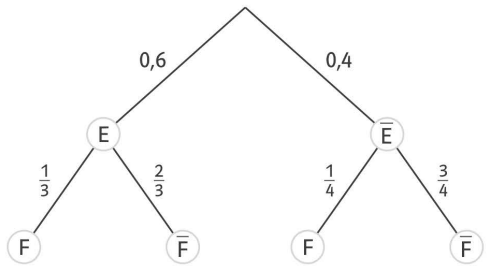
Verknüpfen von Ereignissen
Zu jedem Ereignis E gibt es ein Gegenereignis $\overline{E}$, das alle Ergebnisse enthält, die nicht zu E gehören. Man kann $P(E)$ aus $P(\overline{E})$ berechnen. Es gilt: $P(E) = 1 - P(\overline{E})$
Alle Ergebnisse, die zugleich in E und in F liegen, bilden die Schnittmenge $E \cap F$.
Alle Ergebnisse, die in E oder in F liegen, bilden die Vereinigungsmenge $E \cup F$.
Alle Ergebnisse, die in E, aber nicht in F liegen, bilden die Komplementmenge $E \setminus F$.

Die Berechnung von $P(E)$ mithilfe von $\overline{E}$ ist hilfreich, wenn $\overline{E}$ weniger Ergebnisse als E enthält.

Aus den Mengendiagrammen auf Seite 293 kann man außer $P(E)$, $P(F)$ und $P(\overline{E})$ auch weitere Wahrscheinlichkeiten ablesen: $P(E \cap F) = \frac{2}{10} = 0{,}2$, $P(E \cup F) = \frac{7}{10} = 0{,}7$ und $P(E \setminus F) = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

Zusammenhänge mit Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen ergeben sich, wenn man die Ziehungen als zweistufige Experimente auffasst. In der Vierfeldertafel stehen die Wahrscheinlichkeiten $P(E) = 0{,}6$ und $P(\overline{E}) = 0{,}4$ in der rechten Spalte, $P(F) = 0{,}3$ und $P(\overline{F}) = 0{,}7$ in der unteren Zeile. Die Wahrscheinlichkeit $P(E \cap F) = 0{,}2$ findet man in der Zelle, in der sich die Zeile zu E und die Spalte zu F schneiden. Dem Diagramm in Fig. 5 (Seite 293) entnimmt man, dass $E \setminus F = E \cap \overline{F}$. Also ist $P(E \cap \overline{F}) = 0{,}4$. Aus den Baumdiagrammen ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten $P(E \cap F)$ und $P(E \setminus F)$ mithilfe der Pfadregel.

	F	$\overline{F}$	Summe
E	0,2	0,4	0,6
$\overline{E}$	0,1	0,3	0,4
Summe	0,3	0,7	1

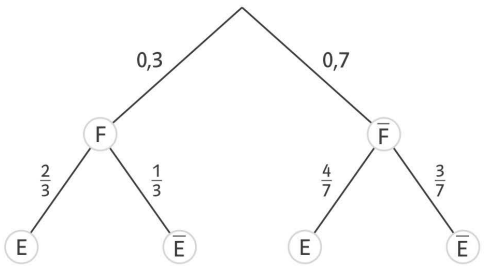


$P(E \cap F)$

Mit E auf der ersten Stufe, ergibt sich

$P(E \cap F) = 0{,}6 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}2$.

$P(E \setminus F) = P(E \cap \overline{F}) = 0{,}6 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}4$



$P(E \cap F)$

Mit F auf der ersten Stufe, ergibt sich

$P(F \cap E) = 0{,}3 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}2$.

$P(E \setminus F) = P(\overline{F} \cap E) = 0{,}7 \cdot \frac{4}{7} = 0{,}4$

Es ist plausibel, dass beide Ergebnisse gleich sind, weil $E \cap F = F \cap E$ bzw. $E \cap \overline{F} = \overline{F} \cap E$ gilt.

Beispiel 1 **Ereignisse verknüpfen**

Ein Würfel wird einmal geworfen, die Ergebnismenge enthält alle Augenzahlen. Dabei werden die Ereignisse $E = \{1, 3, 5\}$, $F = \{4, 5, 6\}$ und $G = \{1, 2, 3\}$ betrachtet.
Geben Sie die Elemente des Ereignisses als Menge an. Beschreiben Sie das Ereignis in Worten.

a) $E \cup F$ **b)** $E \cap F$ **c)** $\overline{E}$ **d)** $\overline{E \cap G}$ **e)** $E \setminus F$

Lösung

a) $E \cup F = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ enthält alle Augenzahlen, die ungerade oder größer als 3 sind.
b) $E \cap F = \{5\}$ enthält alle Augenzahlen, die ungerade und größer als 3 sind.
c) $\overline{E} = \{2, 4, 6\}$ enthält alle Augenzahlen, die gerade sind.
d) $\overline{E \cap G} = \{2, 4, 5, 6\}$ enthält alle Augenzahlen, die gerade oder größer als 3 sind.
e) $E \setminus F = \{1, 3\}$ enthält alle ungeraden Augenzahlen, die kleiner als 4 sind.

Beispiel 2 **Mengendiagramme mit Wahrscheinlichkeiten kennzeichnen**

Es gibt dunkle (D) und helle $(\overline{D})$ Glückskekse, die Gewinne (G) oder Nieten $(\overline{G})$ enthalten.

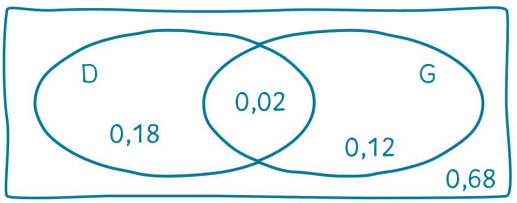
a) Erstellen Sie ein Mengendiagramm mit Ovalen für D und G. Tragen Sie die Wahrscheinlichkeiten an passenden Stellen ein. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

b) Geben Sie $P(D \cup G)$, $P(\overline{D \cap \overline{G}})$ und $P(\overline{D} \setminus G)$ an.

Merkmal	G	$\overline{G}$	Summe
D	0,02	0,18	0,2
$\overline{D}$	0,12	0,68	0,8
Summe	0,14	0,86	1

Lösung

a) In der Vierfeldertafel stehen in Zeile 2 die Wahrscheinlichkeiten $P(D \cap G) = 0{,}02$ und $P(D \cap \overline{G}) = 0{,}18$ sowie in Zeile 3 $P(\overline{D} \cap G) = 0{,}12$ und $P(\overline{D} \cap \overline{G}) = 0{,}68$.



b) $P(D \cup G) = 0{,}18 + 0{,}02 + 0{,}12 = 0{,}32$;
$P(\overline{D \cap \overline{G}}) = 0{,}82$; $P(\overline{D} \setminus G) = 0{,}68$

Aufgaben

1 Ordnen Sie jedem Ereignis eine Beschreibung zu (Ergebnismenge $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$).

$E = \{2, 3, 5, 7\}$	$F = \{2, 4, 6, 8\}$	gerade Zahl	Zahl größer als 1	gerade Primzahl
$E \cap F$	$E \cup F$	$E \setminus F$	$\overline{F}$	ungerade Primzahl	ungerade Zahl	Primzahl

2 Aus der Urne in Fig. 1 wird blind eine Kugel gezogen. Als Ergebnismenge wird $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ festgelegt. Betrachten Sie die Ereignisse $E = \{1, 2, 4\}$ und $F = \{2, 4, 6, 8\}$.

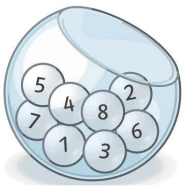


Fig.1

→ **Lerntipp** Seite 294, Beispiel 1

a) Zeichnen Sie ein Mengendiagramm zur Darstellung der Ereignisse E und F.

b) Geben Sie das Ereignis in Mengenschreibweise an und beschreiben Sie es in Worten.
(1) $E \cup F$ (2) $E \cap F$ (3) $\overline{E}$ (4) $\overline{E \cap F}$ (5) $\overline{E} \cap \overline{F}$ (6) $E \setminus F$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.
(1) E (2) $E \cup F$ (3) $E \cap F$ (4) $E \setminus F$

3 Die Vierfeldertafel gehört zu einem medizinischen Test.

Merkmal	K: krank	$\overline{K}$: gesund	Summe
Test + (T)	0,15	0,1	0,25
Test – ($\overline{T}$)	0,05	0,7	0,75
Summe	0,2	0,8	1

\+ bedeutet: der Test schlägt an
– bedeutet: negatives Testergebnis

→ **Lerntipp** Seite 294, Beispiel 2

a) Erstellen Sie ein Mengendiagramm mit Ovalen für T und K. Tragen Sie dort die Wahrscheinlichkeiten aus der Vierfeldertafel an passender Stelle ein. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

b) Geben Sie $P(T \cup \overline{K})$, $P(\overline{K \cap T})$ und $P(K \setminus \overline{T})$ an.

4 Beim Ziehen aus der Schale in Fig. 1 enthält das Ereignis E in dem Mengendiagramm (Fig. 2) alle Zahlen im linken Oval, das Ereignis F enthält alle Zahlen im rechten Oval.

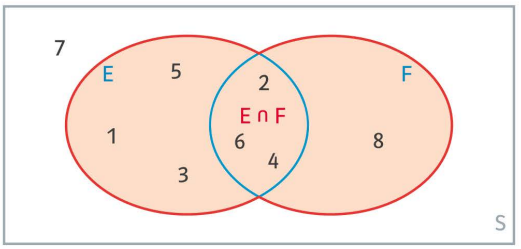


Fig. 2

a) Bestimmen Sie.
(1) P(E), P(F) (2) $P(\overline{E})$, $P(\overline{F})$ (3) $P(E \cap F)$
(4) $P(\overline{E} \cap \overline{F})$ (5) $P(E \setminus F)$ (6) $P(E \setminus \overline{F})$

b) Geben Sie eine passende Vierfeldertafel an.

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 513

5 Bei dem Ziehen aus der Urne (Fig. 1) sei E: „Es wird eine ungerade Zahl gezogen." und F: „Es wird eine Primzahl gezogen.".

a) Zeichnen Sie dazu ein Mengendiagramm wie in Fig. 2.

b) Geben Sie $E \cup F$, $E \cap \overline{F}$, $\overline{E}$ und $E \setminus F$ in Mengenschreibweise an.

c) Erstellen Sie für die Ereignisse E und F eine Vierfeldertafel sowie zwei Baumdiagramme.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse aus Teilaufgabe b).

6 **Finden Sie den Fehler!**

Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie die richtige Lösung.
„Wie groß ist wohl die Wahrscheinlichkeit, bei dreimaligem Würfeln mindestens eine 6 zu kriegen?" Pia, Lotti und Sami erstellen drei Lösungen.

Lotti: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

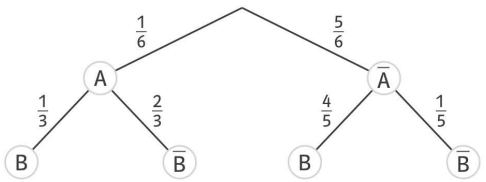
Pia: $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

Sami: $1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{13}{18}$

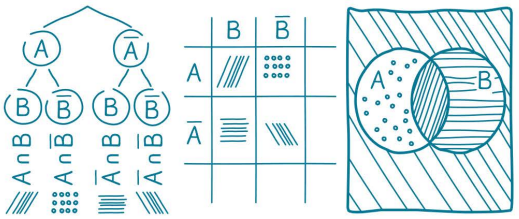
7 a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, bei fünf Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu werfen. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.
b) Luca behauptet, dass man für die Anzahl n der Würfe die Gleichung $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}9$ lösen muss, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Sechs erzielen möchte. Nehmen Sie zu Lucas Behauptung Stellung.

8 Zeichnen Sie ein Glücksrad mit den Farben Blau, Gelb und Grün, bei dem der Zeiger mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % auf „Gelb“ oder „Blau“ und mit
a) einer Wahrscheinlichkeit von 70 % auf „Gelb“ oder „Grün“ stehen bleibt.
b) einer Wahrscheinlichkeit von 90 % auf „Blau“ oder „Grün“ stehen bleibt.

9 a) Das Baumdiagramm beschreibt das Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit 18 nummerierten Kugeln. Zeichnen Sie ein passendes Mengendiagramm.
b) Geben Sie an.
(1) $P(A \cap B)$ (2) $P(A \setminus B)$
(3) $P(A \cup B)$ (4) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$



10 a) Nabil hat die nebenstehenden Skizzen erstellt. Beschreiben Sie, was Sie daraus entnehmen können.
b) Erläutern Sie, welche Skizze(n) man auf dreistufige Experimente übertragen könnte.
c) Zeichnen Sie für drei Ereignisse A, B, C Mengendiagramme und kennzeichnen Sie
(1) $A \cap B \cap C$, (2) $A \setminus (B \cup C)$,



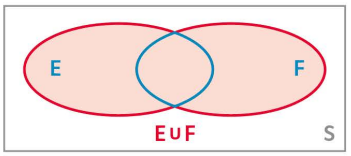
(3) $A \cap (B \setminus C)$, (4) $C \cap (A \cup B)$.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 513

11 Eine 10-Cent-Münze und eine 20-Cent-Münze werden geworfen. Es seien E: „Die 10-Cent-Münze zeigt Zahl.“ und F: „Die 20-Cent-Münze zeigt Wappen.“.
a) Ergebnismenge sei {ZZ, ZW, WZ, WW}; der erste Buchstabe steht für die 10-Cent-Münze. Geben Sie die Ereignisse $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ sowie $\overline{E} \cap \overline{F}$ in Mengenschreibweise an.
b) Drücken Sie die Ereignisse A und B durch E und F aus.
A: „Beide Münzen zeigen Zahl.“ B: „Mindestens eine Münze zeigt Zahl.“

12 Begründen Sie mithilfe des Mengendiagramms.
a) $\overline{E} = S \setminus E$ b) $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cap \overline{F}$
c) $\overline{E \cap F} = \overline{E} \cup \overline{F}$
d) $E \cup F = (E \cap F) \cup (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$



13 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**
Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.
a) $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ b) $P(S \setminus E) = 1 - P(E)$ c) $P(E \setminus F) = P(E) - P(F)$

Grundwissen Test — Mit Brüchen rechnen

→ **Grundwissen**, Seite 409
Lösungen, Seite 513

G **14** Berechnen Sie. Kürzen Sie das Ergebnis, wenn möglich.
a) $\frac{1}{8} + \frac{3}{8}$ **b)** $1 - \frac{3}{5}$ **c)** $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5}$ **d)** $\frac{3}{8} : \frac{3}{4}$
e) $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5}$ **f)** $\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{5}$ **g)** $\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right) : \frac{1}{5}$ **h)** $\frac{1}{5} : \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right)$

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit – stochastische Unabhängigkeit

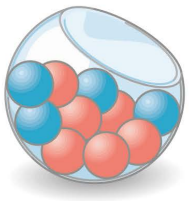
Peilen Sie – beide Augen sind offen – über den Daumen einen fernen Gegenstand an. Kneifen Sie nacheinander je ein Auge zu. Über welches der beiden geöffneten Augen – linkes Auge (LA) bzw. rechtes Auge (RA) hatten Sie den Gegenstand tatsächlich angepeilt? Das ist das dominante Auge. Falten Sie ihre Hände. Ist der rechte Daumen oben oder der linke (RD/LD)?
Führen Sie das Experiment mit etwa 100 Personen durch. Prüfen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel wie in der Abbildung, ob Daumenstellung und Augendominanz unabhängig voneinander sind.

	RD	LD	
RA	37	62	99
LA	4	1	5
	41	63	104

Linksdäumerin

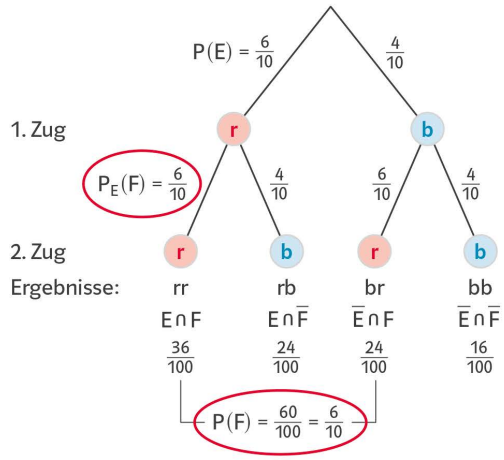
Intuitiv hat man eine Vorstellung davon, wann Ereignisse voneinander unabhängig sind. Mithilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten gelingt es, diese Vorstellungen mathematisch zu präzisieren.

Das wird mit folgender Fragestellung untersucht: Wie lässt sich erfassen, dass sich das Ziehen ohne Zurücklegen auf eine folgende Ziehung auswirkt, während das beim Ziehen mit Zurücklegen nicht so ist? Aus einem Gefäß mit 6 roten und 4 blauen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln zufällig gezogen, einmal mit, einmal ohne Zurücklegen. Die Ergebnismenge ist jeweils $S = \{rr, rb, br, bb\}$. Man betrachtet die Ereignisse $E = \{rr, rb\}$ („Im ersten Zug Rot") und $F = \{rr, br\}$ („Im zweiten Zug Rot"), um Abhängigkeiten zu beurteilen. Die Ergebnisse werden dazu zunächst mithilfe von Schnittmengen dargestellt: rr: $E \cap F$, rb: $E \cap \overline{F}$, br: $\overline{E} \cap F$, bb: $\overline{E} \cap \overline{F}$.

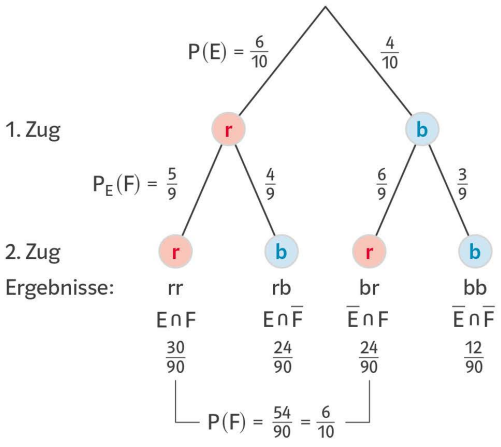


Das Eintreten von E kann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von F verändern. Man nennt $P_E(F)$ **bedingte Wahrscheinlichkeit** dafür, dass F eintritt, wenn man weiß, dass E eintritt. Nun vergleicht man $P_E(F)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(F)$, dass F – ohne Bedingung – eintritt. $P_E(F)$ findet man in den Baumdiagrammen am unteren linken Ast, $P(F) = P(rr) + P(br)$ wird mithilfe der Summenregel bestimmt:

Ziehen mit Zurücklegen
Der erste Zug beeinflusst den zweiten nicht.



Ziehen ohne Zurücklegen
Der erste Zug beeinflusst den zweiten.



Man erkennt, dass beim Ziehen mit Zurücklegen $P_E(F) = P(F)$ gilt. Wenn dies der Fall ist, nennt man E und F **stochastisch unabhängig**. Dies gilt beim Ziehen ohne Zurücklegen nicht.
Mithilfe der Pfadregel kann man eine Formel für $P_E(F)$ herleiten: Es gilt $P(E \cap F) = P(E) \cdot P_E(F)$.
Wenn man diese Gleichung nach $P_E(F)$ auflöst, ergibt sich $P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$, falls $P(E) \neq 0$.
Genau dann, wenn E und F stochastisch unabhängig sind, vereinfacht sich die Berechnung der Pfadregel, denn dann gilt $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$, weil man dann $P_E(F)$ durch $P(F)$ ersetzen kann.

Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass F eintritt, wenn E eintritt, wird mit $P_E(F)$ bezeichnet.

$P_E(F)$ kann man berechnen mit der Formel $P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$, falls $P(E) \neq 0$.

Zwei Ereignisse E und F heißen stochastisch unabhängig, wenn $P_E(F) = P(F)$.

Zwei Ereignisse E und F sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$.

Oft setzt man die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse als Modellannahme voraus. Wenn man z. B. für eine Folge von Torwandschüssen Wahrscheinlichkeiten ausrechnen will, nimmt man an, dass die einzelnen Schüsse voneinander stochastisch unabhängig sind. In Wirklichkeit ist das möglicherweise nicht so, da der Schütze sich vielleicht erst einschießen muss oder aber mit der Zeit ermüdet.

Da sich bei stochastischer Abhängigkeit wegen $P_E(F) \neq P(F)$ durch die Beobachtung von E die Wahrscheinlichkeit von F ändert, schätzt man nach der Beobachtung von E die Realität anders ein. Man hat aus der Beobachtung von E etwas über F „gelernt".

Beispiel 1 **Bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen**

Bei einer Kunstausstellung kann man einen Audioguide leihen und einen Katalog der Ausstellung erwerben. Die Vierfeldertafel zeigt die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für einen zufällig ausgewählten Besucher.

	E	$\overline{E}$	
F	45 %	30 %	75 %
$\overline{F}$	15 %	10 %	25 %
	60 %	40 %	100 %

E: Besucher leiht Audioguide
F: Besucher kauft Katalog

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten.

a) $P(E)$, $P(F)$, $P(E \cap F)$, $P_E(F)$ und $P_F(E)$

b) $P_{\overline{E}}(F)$ und $P_E(\overline{F})$. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Wahrscheinlichkeiten.

c) $P_E(E \cup F)$. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Wahrscheinlichkeit.

Lösung

a) $P(E) = 60\,\%$, $P(F) = 75\,\%$, $P(E \cap F) = 45\,\%$ (abgelesen)

$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{0{,}45}{0{,}6} = \frac{3}{4} = 75\,\%$; $P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}45}{0{,}75} = \frac{3}{5} = 60\,\%$

b) $P_{\overline{E}}(F) = \frac{P(\overline{E} \cap F)}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4} = 75\,\%$; $P_E(\overline{F}) = \frac{P(E \cap \overline{F})}{P(E)} = \frac{0{,}15}{0{,}6} = \frac{1}{4} = 25\,\%$

$P_{\overline{E}}(F)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Besucher einen Katalog kauft, wenn er keinen Audioguide leiht. $P_E(\overline{F})$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Besucher keinen Katalog kauft, wenn er einen Audioguide leiht.

c) $P_E(E \cup F) = \frac{P(E \cap (E \cup F))}{P(E)} = \frac{P(E)}{P(E)} = 1$. Wenn der Besucher einen Audioguide leiht, ist es sicher, dass er einen Audioguide leiht oder einen Katalog kauft.

Dass $E \cap (E \cup F) = E$ gilt, kann man an einem Mengendiagramm erkennen.

Beispiel 2 **Stochastische Unabhängigkeit prüfen und interpretieren**

Man würfelt zweimal und betrachtet die Ereignisse E: „Der erste Würfel zeigt eine 6." und F: „Die Augensumme liegt über 10.".

a) Zeigen Sie: Die Ereignisse E und F sind nicht stochastisch unabhängig.

b) Vergleichen Sie $P_E(F)$ mit $P(F)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung

a) *Beim zweimaligen Würfeln gibt es die 36 Ergebnisse* $(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)$. Es gilt

$E = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$; $F = \{(6, 5), (6, 6), (5, 6)\}$; $E \cap F = \{(6, 5), (6, 6)\}$.

Daraus folgt $P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(F) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, $P(E \cap F) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ und somit $P(E \cap F) \neq P(E) \cdot P(F)$.

b) Mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe a) erhält man $P(F) = \frac{1}{12}$ und $P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$.

Wenn man also weiß, dass der erste Wurf „6" zeigt, wächst die Wahrscheinlichkeit für eine Augensumme über 10 von $\frac{1}{12}$ auf $\frac{1}{3}$.

Aufgaben

1 a) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.
b) Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_F(U)$ und $P_U(F)$. Erklären Sie, was Sie daran erkennen.
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $\overline{U}$ eintritt, wenn man weiß, dass F eintritt.

	U	$\overline{U}$	
F	0,3	0,2	
$\overline{F}$	0,4		
		0,3	1

→ **Lerntipp** Seite 298, Beispiel 1

2 Aus der Urne werden nacheinander zufällig zwei Kugeln entnommen. Es sei E: „Die erste Kugel trägt den Buchstaben a." und F: „Die zweite Kugel trägt den Buchstaben h.".
a) Die erste Kugel wird nach dem Ziehen zurückgelegt. Bestimmen Sie die Mengen zu E und F und berechnen Sie $P_E(F)$. Weisen Sie nach: $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$
b) Die erste Kugel wird nach dem Ziehen nicht zurückgelegt. Berechnen Sie $P_E(F)$ und weisen Sie nach, dass $P(E \cap F) \neq P(E) \cdot P(F)$ gilt.

3 Zwei Würfel werden geworfen. Untersuchen Sie die Ereignisse E und F auf stochastische Unabhängigkeit und bestimmen Sie $P_E(F)$. Untersuchen Sie, wie sich E auf F auswirkt, indem Sie $P_E(F)$ mit $P(F)$ vergleichen. Dabei ist E: „Der erste Würfel zeigt eine 6." und
a) F: „Die Augensumme beträgt 7." b) F: „Die Augensumme beträgt 8."

→ **Lerntipp** Seite 298, Beispiel 2

4 Man wirft eine Münze zweimal hintereinander und betrachtet die Ereignisse.
A: „Die erste Münze zeigt Wappen." B: „Die zweite Münze zeigt Wappen."
C: „Beide Münzen zeigen Wappen." D: „Beide Münzen zeigen die gleiche Seite."
a) Untersuchen Sie auf stochastische Unabhängigkeit, indem Sie eine Vierfeldertafel erstellen.
(1) A und B (2) A und C (3) C und D (4) A und D
b) Entnehmen Sie der Vierfeldertafel die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P_B(A)$.
c) Skizzieren Sie für Teilaufgabe a) (4) ein zweistufiges Baumdiagramm.

5 Ein Glücksrad hat ein rotes, ein gelbes und ein blaues Feld. Das rote und gelbe sind gleich groß, das blaue ist doppelt so groß wie das rote. Es wird zweimal gedreht. Es sei E: „Beim ersten Drehen erscheint Rot.".
a) Untersuchen Sie, ob E und das Ereignis F: „Beim zweiten Drehen erscheint Blau." unabhängig sind. Berechnen Sie $P_E(F)$ und $P_F(E)$.
b) Rot zählt 1 Punkt, Gelb zählt 2 Punkte und Blau zählt 3 Punkte. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse E und F: „Man erzielt zusammen höchstens 3 Punkte." stochastisch unabhängig sind.

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 513

6 a) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.
b) Bestimmen Sie $P_Z(R)$ und $P_R(Z)$. Erklären Sie, was Sie daran erkennen.
c) Notieren Sie zwei zugehörige Baumdiagramme. Beschreiben Sie, wo Sie dort $P_Z(R)$ und $P_R(Z)$ finden.

	Z	$\overline{Z}$	
R	30 %		40 %
$\overline{R}$		30 %	
	60 %		

7 In einem schwarzen Strumpf sind vier rote und drei blaue Kugeln, in einem weißen Strumpf sind acht rote und sechs blaue Kugeln. Es wird ein Strumpf ausgewählt und eine Kugel aus dem gewählten Strumpf gezogen.
a) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse E: „Der schwarze Strumpf wird gewählt." und F: „Man zieht eine blaue Kugel." stochastisch unabhängig sind.
b) Untersuchen Sie, ob $\overline{E}$ und $\overline{F}$ stochastisch unabhängig sind.

8 In einen Kurs gehen 20 Jungen und 12 Mädchen. Jeder vierte Junge und drei von vier Mädchen spielen ein Musikinstrument. Frau Kumar hört jemanden musizieren.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich um ein Mädchen handelt.

9 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**
Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.
a) Für zwei Ereignisse E und F gilt immer $P_E(F) \geq P(F)$.
b) Wenn $E \cap F = \{\ \}$, dann sind die Ereignisse E und F stets stochastisch unabhängig.
c) Beim Würfeln mit zwei Würfeln gibt es keine Ereignisse, die nicht stochastisch unabhängig sind, weil die Würfel ja unabhängig voneinander ihre Ergebnisse anzeigen.
d) Wenn $P(E) = 0$, dann ist auch $P(E \cap F) = 0$.

10 a) Ein medizinischer Test kann positiv (+) oder negativ (–) ausfallen. Erläutern Sie, welche Information Sie der Vierfeldertafel entnehmen können.
b) Untersuchen Sie die Ereignisse „–“ und „gesund“ auf stochastische Unabhängigkeit.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person
(1) mit positivem Testergebnis krank ist, (2) mit negativem Testergebnis gesund ist.

	gesund	krank	
+	0,01	0,09	0,1
–	0,89	0,01	0,9
	0,9	0,1	

Test 2

Lösungen, Seite 513

11 Die Vierfeldertafel zeigt, wie viele Jugendliche am Theodor-Heuss-Gymnasium (THG) und am Lise-Meitner-Gymnasium (LMG) einheimisch bzw. auswärtig sind.
a) Untersuchen Sie, ob „Einheimischsein“ und „Zum-THG-Gehen“ unabhängig sind.
b) Ein Schüler verlässt das THG. Diskutieren Sie die Auswirkung auf die Unabhängigkeit.

	THG	LMG	gesamt
einheimisch	240	180	420
auswärtig	360	270	630
gesamt	600	450	1050

12 Gegeben sind zwei natürliche Zahlen x und y, beide größer als 0. Aus einem Gefäß mit x roten und y blauen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln zufällig gezogen, einmal mit, einmal ohne Zurücklegen. Die Ergebnismenge ist jeweils $S = \{rr, rb, br, bb\}$.
Untersuchen Sie für die beiden Ziehungsvarianten die Ereignisse E: „Im ersten Zug Rot“ und F: „Im zweiten Zug Rot“ auf stochastische Unabhängigkeit.

Mit einem MMS kann man die Termumformungen schnell durchführen.

13 Zeigen Sie, dass für zwei Ereignisse E und F mit $P(E) > 0$ und $P(F) > 0$ die folgende Beziehung gilt.
a) $P_E(\overline{F}) = \frac{P(E \setminus F)}{P(E)}$ b) Wenn $P_E(F) = P(F)$, dann $P_F(E) = P(E)$

14 In einem Gefäß sind zehn Kugeln. Eine ist mit 1, zwei sind mit 2, drei mit 3 und vier mit 4 beschriftet. Eine Kugel wird zufällig gezogen, die Ergebnismenge sei $S = \{1, 2, 3, 4\}$. E sei das Ereignis „Die gezogene Kugelnummer ist gerade.“.
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P_E(\{x\})$ für alle $x \in S$.
b) Geben Sie eine Ergebnismenge S_E an, auf die man S für die bedingten Wahrscheinlichkeiten P_E verkleinern kann. Untersuchen Sie, ob sich für S_E eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt.

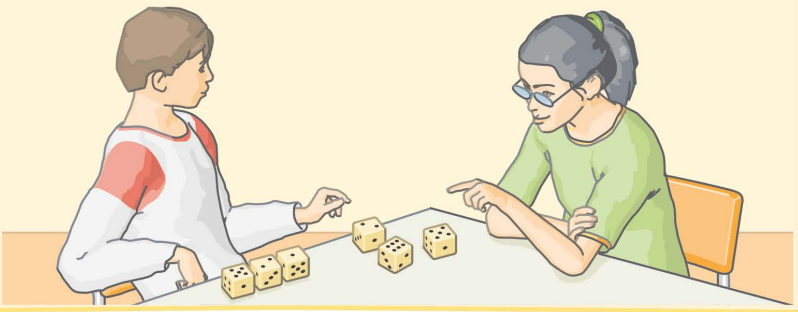
Grundwissen Test — Mit Brüchen und Dezimalzahlen rechnen

Grundwissen, Seite 409
Lösungen, Seite 514

G **15** Berechnen Sie. Entscheiden Sie, ob Sie mit Brüchen oder Dezimalzahlen rechnen wollen.
a) $\frac{1}{8} + 0{,}5$ b) $0{,}35 - \frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{6} \cdot 0{,}1$ d) $\frac{3}{8} : 37{,}5$ e) $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot 0{,}2$ f) $\left(1{,}6 - \frac{1}{6}\right) \cdot 6$ g) $\left(\frac{1}{5} + 1{,}5\right) : 5$

4 Simulationen

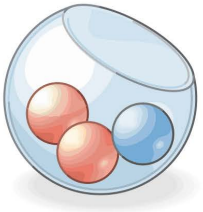
Die verflixte 6
Man wählt eine Anzahl von Würfeln und wirft sie gleichzeitig. Wenn keine 6 darunter ist, erhält man die Augensumme als Punkte. Wenn aber mindestens ein Würfel die „böse" 6 zeigt, verliert man alle Punkte.
Untersuchen Sie mithilfe eines MMS, wie viele Würfel man werfen sollte.



Wenn es zu komplex oder aufwendig ist, in der Realität Daten zu erheben, kann man Daten auch durch Simulieren („Nachspielen") gewinnen. Dazu nutzt man neben analogen Hilfsmitteln, wie Glücksrädern oder Würfeln, auch digitale Hilfsmittel als Zufallsgeräte.

Zunächst wird das Vorgehen bei einer Simulation an einer einfachen Situation erläutert, bei der man – wie allgemein bei jeder Simulation – eine Modellannahme zugrunde legt:
Beim Basketballfreiwurf wird angenommen, dass ein Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ trifft. Jedem Wurf wird eine zufällig von dem Zufallsgerät erzeugte Zahl – eine **Zufallszahl** – zugeordnet.

Simulation mit einem analogen Zufallsgerät
Als Zufallsgerät wird z. B. eine Urne verwendet, die eine blaue Kugel und zwei rote Kugeln enthält. Ziehen einer roten Kugel gilt als Treffer. Damit wird erreicht, dass bei der Simulation ein Treffer etwa so oft auftritt, wie es die Wahrscheinlichkeit erwarten lässt.



Simulation mit einem digitalen Hilfsmittel
Man erzeugt eine reelle Zufallszahl zwischen 0 und 1. In der Tabelle sind drei Beispiele angegeben. Eine Zufallszahl, die kleiner als $\frac{2}{3}$ ist, wird als Treffer gewertet.

B4 | = | WENN(A4<(2/3);"ja";"nein")

	A	B	C	D
1	Zufallszahl	Treffer?		
2	0,91823563	nein		
3	0,07966813	ja		
4	0,85845606	nein		

Man kann nun Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten bestimmen, die man nicht ohne Weiteres berechnen kann, zum Beispiel für die Wahrscheinlichkeit, bei zehn Würfen mindestens acht Treffer zu erzielen. Man erzeugt dann 10 Zufallszahlen und zählt die Treffer. Das wiederholt man z. B. 100-mal und kann dann die relative Häufigkeit der Trefferzahlen, die mindestens 8 betragen, als Schätzung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit angeben – hier 0,29.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Treffer	mind. 8 Treffer
2	n	n	j	n	n	n	j	j	n	n	3	29
3	j	n	n	j	j	j	n	j	n	n	5	
4	j	j	n	j	j	n	j	n	n	j	6	
5	n	n	j	j	n	j	j	j	n	j	6	
6	j	n	j	j	j	j	n	j	j	j	8	
7	j	j	n	j	j	j	n	j	j	n	7	

Auf der Grundlage vorgegebener Modelle werden so Wahrscheinlichkeiten bestimmt, die mit den üblichen Verfahren nicht oder nur schwer zu ermitteln sind. Dann kann man mithilfe einer Simulation Schätzwerte für diese Wahrscheinlichkeiten gewinnen.

Simulation von Datenerhebungen und Zufallsexperimenten
Eine Datenerhebung oder ein Zufallsexperiment kann man auf der Grundlage einer Modellannahme mithilfe von Zufallszahlen simulieren, die von analogen oder digitalen Zufallsgeräten erzeugt werden. Man ordnet dabei jedem beobachteten Ergebnis eine Zufallszahl so zu, wie es dem Auftreten des Ergebnisses entspricht.
Wenn man die Simulation n-mal wiederholt und dabei k-mal ein bestimmtes Ergebnis auftritt, so ist die relative Häufigkeit $\frac{k}{n}$ eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses.

Auch in komplexeren Situationen kann man mit Simulationen Wahrscheinlichkeiten abschätzen und herausfinden, wo reale Daten bei der Annahme eines Modells liegen müssten.

Beispiel 1 **Simulieren durch Werfen eines normalen Spielwürfels**
Bei einem Spiel gewinnt man mit einer Wahrscheinlichkeit von **a)** 50 %, **b)** $\frac{2}{3}$, **c)** 25 %. Beschreiben Sie, wie man das Spiel durch Werfen eines normalen Würfels simulieren kann.
Lösung
a) Man würfelt einmal und ordnet drei der sechs Würfelaugen das Ergebnis „Gewinn" zu und den anderen drei Würfelaugen das Ergebnis „Verlust".
b) Man würfelt einmal und ordnet vier der sechs Würfelaugen das Ergebnis „Gewinn" zu und den anderen zwei Würfelaugen das Ergebnis „Verlust".
c) Man würfelt zweimal und betrachtet nur die Ergebnisse gg, gu, ug, uu (g: gerade Augenzahl, u: ungerade Augenzahl). Dann ordnet man gg das Ergebnis „Gewinn" zu, bei gu, ug und uu ergibt sich „Verlust".

Beispiel 2 **Wahrscheinlichkeit schätzen – Modell beurteilen**
Miray möchte nach dem Abitur ein Praktikum machen. Sie hat sechs Stellen zur Auswahl. Ihre Strategie: Jede Stelle bewertet sie: „Was ist der Nutzen für meinen Wunschberuf?" Die ersten beiden Stellen schaut sie nur an, die setzen die Maßstäbe. Danach wählt sie die erste Stelle aus, die ihr nützlicher erscheint als die beiden ersten, die anderen schaut sie gar nicht mehr an. Wenn keine Stelle nützlicher ist als die beiden ersten, verzichtet sie auf eine Wahl.

a) Simulieren Sie Mirays Vorgehen mithilfe von Spielkarten. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
b) Bestimmen Sie durch eine Simulation eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit, dass Miray die Stelle mit dem höchsten Nutzen auswählt. Beurteilen Sie Mirays Strategie.
Lösung
a) Man wählt aus einem Kartenspiel sechs Karten aus und ordnet jeder Karte einen „Nutzungsgrad" von 1 bis 6 zu (1: höchster, 6: geringster Nutzen). Die Karten werden gemischt und der Reihe nach ausgelegt. Miray deckt die ersten zwei Karten auf. Bei jeder weiteren aufgedeckten Karte prüft sie, ob der Nutzungsgrad höher ist. Ist er das, beendet sie die Auswahl.
b) *Man definiert den Nutzen wie in Teilaufgabe a) und erfasst ihn in einer Liste A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Man vertauscht die Elemente von A zufällig und erhält z.B. eine Liste B = {4, 5, 2, 6, 1, 3}. Hier würde Miray z.B. die dritte Stelle mit Nutzungsrad 2 auswählen. Die Stelle mit dem höchsten Nutzungsgrad 1 wird hier also nicht gewählt.*
Erzeugt man nun hundertmal eine Liste wie B, kann man die gewählten Stellen in einer weiteren Liste L mit 100 Elementen wie L = {3, 0, 1, 2, …, 4, 0, 2} sammeln. 0 bedeutet dabei, dass Miray nicht gewählt hat. Bestimmt man die relative Häufigkeit der 1 in Liste L, stellt diese einen Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit dar. Bei wiederholter Durchführung schwanken die Werte um 0,43.
Mirays Strategie beschert ihr mit weniger als 50 % Wahrscheinlichkeit die beste Stelle.

D1 **MMS-Anleitung** Simulation und Auswertung von Zufallsexperimenten

I14 **interaktive Anwendung** Wahrscheinlichkeit schätzen durch Simulation

Hier wird jeder Stellensuche eine zufällige Liste zugeordnet. Liste B nennt man **Permutation** von A.

Aufgaben

○ **1** Führen Sie eine Simulation mit einem Würfel durch und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
- a) Werfen einer Münze
- b) Elfmeterschießen, wenn der Schütze mit 75-prozentiger Wahrscheinlichkeit trifft
- c) Wahl einer Partei, die von einem Drittel der Wählenden gewählt wird
- d) Verhalten eines Bauteils, das mit 80-prozentiger Wahrscheinlichkeit funktioniert

Lerntipp Seite 302, Beispiel 1

○ **2** Es werden drei Würfel geworfen und die Augensumme berechnet. Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme mindestens 9 beträgt, geschätzt werden.
- a) Führen Sie zehn Würfe durch und notieren Sie, wie oft die Augenzahl mindestens 9 beträgt. Schätzen Sie damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit.
- b) Fassen Sie alle Ergebnisse Ihres Kurses aus Teilaufgabe a) zusammen und bestimmen Sie damit eine Schätzung der gesuchten Wahrscheinlichkeit.
- c) Beurteilen Sie die Güte der Schätzungen in den Teilaufgaben a) und b) mithilfe einer Simulation. Sie können dazu auch ein MMS verwenden.

○ **3** Sie werfen zwei Tetraeder wie abgebildet. Ergebnis ist jeweils die Zahl, die unten liegt.
- a) Bestimmen Sie mithilfe einer Simulation von 250 Würfen näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Tetraeder dasselbe Ergebnis haben.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe a).
- c) Lösen Sie die Teilaufgaben a) und b) für drei Tetraeder.

D1 **MMS-Anleitung** Simulation und Auswertung von Zufallsexperimenten

Test 1

Lösungen, Seite 514

○ **4** Beim Basketballfreiwurf trifft ein Spieler der NBA mit 90 %iger Wahrscheinlichkeit.
- **a)** Simulieren Sie 20 Freiwürfe mithilfe von Kugeln in einer Urne und geben Sie die relative Häufigkeit der Treffer an.
- **b)** Simulieren Sie 200 Freiwürfe. Vergleichen Sie die relative Häufigkeit bei Ihrer Simulation mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a).

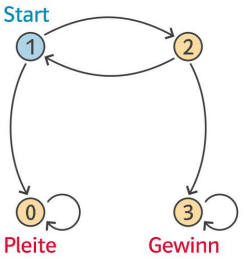
◒ **5** Aus einer Urne, in der 10 Kugeln liegen, die mit den Nummern 1 bis 10 beschriftet sind, werden 3 herausgenommen. Bestimmen Sie durch eine Simulation einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass sich dabei eine monoton wachsende Zahlenfolge ergibt, wenn sie
- a) mit Zurücklegen ziehen,
- b) ohne Zurücklegen ziehen.

Lerntipp Seite 302, Beispiel 2

◒ **6** Der Fürst der Toskana war ein begeisterter Würfelspieler. Ihm fiel auf, dass beim Würfeln mit drei Würfeln die Augensumme 10 wahrscheinlicher ist als die Augensumme 9, obwohl beide Summen auf sechs Arten auftreten können:
$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 4 + 4 = 2 + 3 + 5 = 3 + 3 + 4,$
$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3.$
- a) Überprüfen Sie die Beobachtung, indem Sie 100-mal bzw. 1000-mal das Werfen von drei Würfeln simulieren. Wiederholen Sie das Experiment mehrmals.
- b) Erklären Sie Ihre Beobachtung.

◒ **7**
- a) Erstellen Sie einen Lottozahlen-Generator. Dazu wählen Sie aus den Zahlen 1 bis 49 sechs Zahlen ohne Wiederholungen aus, wie z. B. {48, 23, 17, 3, 18, 44}, und ordnen Sie sie der Reihe nach an. Im Beispiel ergibt sich dann {3, 17, 18, 23, 44, 48}.
- b) Djoud meint, dass es nur selten vorkommt, dass bei einer Ziehung der Lottozahlen wie in Teilaufgabe a) zwei benachbarte Zahlen wie 17 und 18 auftreten, vielleicht in 10 % aller Fälle. Untersuchen Sie durch eine Simulation, ob Djoud recht hat.

8 Ein Glücksspieler hat nur einen Euro, er braucht 3 Euro. Dazu „setzt“ er seinen Euro. Dann wird eine Münze geworfen. Fällt Wappen, verliert er den gesetzten Euro, er ist pleite. Andernfalls erhält er einen Euro hinzu. Er setzt dann wieder einen Euro. Das Spiel endet, wenn der Spieler pleite ist oder 3 Euro besitzt.



a) Erläutern Sie an der Grafik, dass dieses Spiel prinzipiell unendlich lange dauern kann.
b) Spielen Sie dieses Spiel zehnmal zu zweit. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man 3 € gewinnt, sowie die mittlere Spieldauer.
c) Prüfen Sie Ihre Schätzungen aus Teilaufgabe b) mithilfe einer Simulation von 100 Spielen.

I15 **interaktive Anwendung** Spiel simulieren

9 Der Chevalier de Méré, ein Philosoph und Literat am Hofe von Ludwig XIV, wandte sich im Jahre 1654 mit folgendem Problem an den Mathematiker Blaise Pascal:
„Was ist wahrscheinlicher – bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs oder bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu werfen?“
Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten und bestimmen Sie für diese dann Näherungswerte mithilfe einer Simulation.

10 Es soll untersucht werden, wie bei häufiger Versuchswiederholung die relativen Häufigkeiten beim Münzwurf um den zu erwartenden Wert 0,5 schwanken. Dazu wird eine Münze n-mal geworfen und die relative Häufigkeit für „Wappen“ bestimmt. Dieses Experiment wird 100-mal wiederholt und von den 100 dabei bestimmten relativen Häufigkeiten wird die empirische Standardabweichung als Maß für die Schwankung berechnet.
Führen Sie für die Versuchszahlen $n = 10$, $n = 20$ und $n = 40$ je eine entsprechende Simulation durch. Beschreiben Sie, wie sich die Schwankungen mit zunehmender Versuchsanzahl verhalten.

Test 2

Lösungen, Seite 514

11 Aus der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ werden zufällig vier Zahlen mit Zurücklegen entnommen. Bestimmen Sie mithilfe einer Simulation eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur verschiedene Zahlen entnommen werden. Bestimmen Sie zum Vergleich die Wahrscheinlichkeit exakt. Beurteilen Sie Ihr Ergebnis aus der Simulation.

12 Jannis schlägt Ihnen folgendes Würfelspiel vor:
„Wir würfeln so lange, bis drei ungerade Zahlen nacheinander fallen, dann gewinnst du. Oder bis nacheinander gerade-ungerade-gerade fällt, dann gewinn' ich.“
a) Schätzen Sie Ihre Gewinnchancen und die von Jannis.
b) Spielen Sie das Spiel zehnmal zu zweit. Erläutern Sie, ob Sie Ihre Schätzung beibehalten.
c) Simulieren Sie so viele Spiele, dass Sie eine sichere Schätzung abgeben können.

13 **Das Geburtstagsproblem**
Elif wettet darauf, dass in einer Klasse mindestens zwei Personen am selben Tag im Jahr Geburtstag haben, wenn die Schülerzahl (1) 20, (2) 30 beträgt.
Untersuchen Sie die Erfolgsaussichten dieser Wette. Gehen Sie davon aus, dass die Geburtstage gleichmäßig verteilt sind. Schaltjahre werden vernachlässigt. Entscheiden Sie mit einer Simulation. Berechnen Sie dann die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Grundwissen Test — Brüche in Prozente umwandeln

Grundwissen, Seite 410
Lösungen, Seite 514

G **14** Geben Sie die Bruchzahlen in Prozent an.

a) $\frac{1}{4}$ b) 0,35 c) $\frac{5}{8}$ d) 0,375 e) $\frac{1}{3}$ f) 1,6 g) $\frac{2}{500}$ h) $\frac{0{,}001}{0{,}5}$ i) $\frac{0{,}1}{\frac{2}{25}}$

5 Daten erheben und mit Kenngrößen beschreiben

Projektaufgabe: Wie viel Prozent aller Familien haben in Deutschland 0, 1, 2, 3, … Kinder? Die Jahrgangsstufe 12 hat unter den Schülerinnen und Schülern eine große repräsentative Umfrage gemacht.

Erläutern Sie, was da schiefgelaufen ist.

so viele Kinder	haben so viele Familien
0	0
1	325
2	122
3	32
4 und mehr	4

Bevor man die Realität durch Wahrscheinlichkeitsmodelle beschreibt, muss man sie durch Messen und Zählen erfassen. Die dabei anfallenden Daten kann man grafisch visualisieren und durch die Kenngrößen Mittelwert und Standardabweichung beschreiben. Das wird an einer Situation erläutert, die auch den Nutzen der Kenngrößen verdeutlicht.

Beim Backen verwendet man Maßangaben, wie z. B. den gestrichenen (gs) oder den gehäuften (gh) Esslöffel. Die leichte Verwendbarkeit dieser Einheiten wird durch eine Ungenauigkeit erkauft. Wie viel ein gestrichener/gehäufter Esslöffel tatsächlich wiegt und wie genau diese Maßangabe ist, klärt man durch eine Datenerhebung.
Zunächst wird mithilfe einer Stichprobe bestehend aus 125 gestrichenen Esslöffeln Zucker eine Urliste ermittelt (s. rechts). Die Daten sind dann in der Tabelle und in dem Histogramm (Fig. 1) übersichtlich dargestellt. Für das mittlere Gewicht bestimmt man den

Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{125}(12 + 10 + 14 + \ldots) \approx 11{,}5$.

Ein gestrichener Esslöffel wiegt also ca. 11,5 g. Man kann diesen Mittelwert auch aus der relativen Häufigkeitsverteilung der Gewichte berechnen, indem man die Gewichte (Zeile A) mit den relativen Häufigkeiten (Zeile C) multipliziert und dann die Produkte summiert:

$\bar{x} = 5 \cdot \frac{1}{125} + 6 \cdot \frac{1}{125} + \ldots + 16 \cdot \frac{3}{125} \approx 11{,}5$

Die Streuung der Gewichte um den Mittelwert misst man durch die **empirische Standardabweichung**

$s = \sqrt{\frac{1}{125}\left[(12 - \bar{x})^2 + (10 - \bar{x})^2 + (14 - \bar{x})^2 + \ldots\right]} \approx 2{,}1.$

Urliste aller auf Gramm gerundeten Gewichte:
{12, 10, 14, 7, … ,11, 8, 10, 9}

Häufigkeitsverteilungen:

A	5	6	7	8	9	10	…	16
B	1	1	5	5	5	18	…	3
C	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{5}{125}$	$\frac{5}{125}$	$\frac{5}{125}$	$\frac{18}{125}$	…	$\frac{3}{125}$

Zeile A: vorkommende Gewichte in Gramm
Zeilen B/C: absolute/relative Häufigkeiten

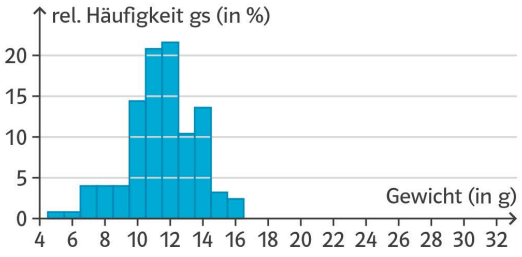


Fig. 1

Ein Säulendiagramm, bei dem die Säulenbreite 1 und die Säulenhöhe der relativen Häufigkeit entspricht, nennt man **Histogramm**.

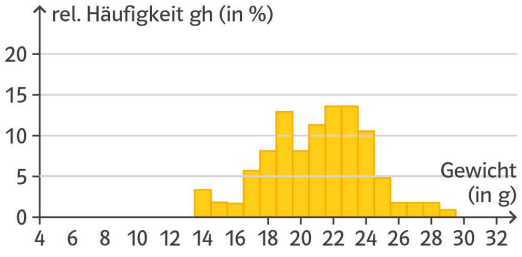


Fig. 2

Eine entsprechende Auswertung zeigt, dass gehäufte Esslöffel mit $x \approx 21{,}0$ g etwa das Doppelte wiegen. Zum Vergleich sieht man in Fig. 2 das Säulendiagramm für gehäufte Esslöffel.

Man kann auch hier mit den relativen Häufigkeiten aus Zeile C arbeiten:

$s = \sqrt{(5 - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{125} + (6 - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{125} + \ldots + (16 - \bar{x})^2 \cdot \frac{3}{125}} \approx 2{,}1$

Dabei gilt $s = \sqrt{v}$. Der Radikand $v = \frac{1}{125}\left[(12 - \bar{x})^2 + (10 - \bar{x})^2 + (14 - \bar{x})^2 + \ldots\right]$

bzw. $v = (5 - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{125} + (6 - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{125} + \ldots (16 - \bar{x})^2 \cdot \frac{3}{125}$ wird als **empirische Varianz** bezeichnet.

Für das Experiment auf Seite 305 brachte jeder einen Löffel von zu Hause mit. Die unterschiedlichen Löffelmodelle erhöhen die Streuung: Gewichte, die weit vom Mittelwert $\bar{x}$ entfernt liegen, erhöhen den Wert der empirischen Standardabweichung s. Das belegt auch ein Vergleich der beiden Säulendiagramme auf Seite 305. Die Gewichte gehäufter Esslöffel schwanken stärker um den Mittelwert 21,0 g als diejenigen gestrichener Esslöffel um den Mittelwert 11,5 g. In der Tat ist die Standardabweichung der Gewichte gehäufter Esslöffel mit $s \approx 3{,}0\,g$ etwa um den Faktor 1,5 größer als bei gestrichenen Esslöffeln. Man erkennt: „Je breiter ein Säulendiagramm, desto größer die empirische Standardabweichung."
Seriöse Angaben beinhalten bei gemessenen Größen den Mittelwert und die Messungenauigkeit in der Form $\bar{x} = 11{,}5 \pm 2{,}1\,g$. Das bedeutet, dass die Messungen den Mittelwert 11,5 g und die empirische Standardabweichung 2,1 g lieferten.

Bei der Darstellung $\bar{x} = \frac{1}{125}(12 + 10 + 14 + \ldots)$ für die Berechnung des Mittelwertes kann man die Schreibweise mit den Pünktchen verwenden. Man ersetzt sie bei allgemeinen Formeln durch die mathematische Summendarstellung. Ist beispielsweise eine Urliste mit n Werten x_i und $1 \leq i \leq n$ gegeben, so schreibt man $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$.
Dabei wird $\sum_{i=1}^{n} x_i$ gelesen als „Summe über x_i von $i = 1$ bis n".

Kenngrößen bei einer Datenerhebung
Gegeben ist eine Urliste $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Die zugehörigen Kenngrößen sind
der **Mittelwert** $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ und die **empirische Standardabweichung**

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2)} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}.$$

Wenn eine relative Häufigkeitsverteilung mit den Werten $m_1, m_2, m_3 \ldots, m_k$ und den relativen Häufigkeiten $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_k$ vorliegt, so gilt auch

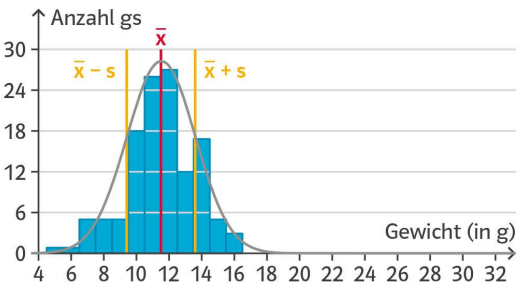
$$\bar{x} \approx m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2 + m_3 \cdot h_3 + \ldots + m_k \cdot h_k = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot h_i \text{ und}$$

$$s \approx \sqrt{(m_1 - \bar{x})^2 \cdot h_1 + (m_2 - \bar{x})^2 \cdot h_2 + \ldots + (m_k - \bar{x})^2 \cdot h_k} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (m_i - \bar{x})^2 \cdot h_i}.$$

Bei Messungen charakterisiert die empirische Standardabweichung die Messungenauigkeit.
Es gilt $s = \sqrt{v}$, wobei man den Term v unter der Wurzel **empirische Varianz** nennt.

Die empirische Varianz v (und damit die empirische Standardabweichung s) kann man auch mit der Formel $v = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$ berechnen. Sie wird beispielsweise bei wissenschaftlichen Taschenrechnern (WTR) zur Berechnung genutzt, siehe Seite 307, Beispiel 2. Zur Begründung der Formel siehe Seite 309, Aufgabe 15.

Die tiefere Bedeutung der empirischen Standardabweichung ergibt sich aus der Tatsache, dass bei Verteilungen mit einer „Glockenform" wie in der Abbildung die „Gauß'sche 68 %-Regel" gilt: Etwa 68 % der Werte liegen im s-Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$.
Bei der Stichprobe mit den gestrichenen Esslöffeln liegen 83 von 125 Gewichten im s-Intervall $[9{,}4; 13{,}6]$, also 66,4 % der Gewichte.



Beispiel 1 **Empirische Kenngrößen berechnen und vergleichen**

Berechnen Sie für die Listen $L_1 = \{2; 4; 3; 6; 5\}$ und $L_2 = \{1; 4; 2; 7; 6\}$ den Mittelwert, die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung. Vergleichen Sie.

Lösung

Mittelwert bei L_1: $\overline{x_1} = \frac{2+4+3+6+5}{5} = 4$; Mittelwert bei L_2: $\overline{x_2} = \frac{1+4+2+7+6}{5} = 4$.

Empirische Varianz und empirische Standardabweichung

- bei L_1: $v_1 = \frac{(2-4)^2+(4-4)^2+(3-4)^2+(6-4)^2+(5-4)^2}{5} = 2$; $s_1 = \sqrt{2} \approx 1{,}41$;
- bei L_2: $v_2 = \frac{(1-4)^2+(4-4)^2+(2-4)^2+(7-4)^2+(6-4)^2}{5} = \frac{26}{5}$; $s_2 = \sqrt{\frac{26}{5}} \approx 2{,}28$.

Beide Urlisten haben den gleichen Mittelwert 4. Die empirischen Standardabweichungen 1,41 bzw. 2,28 zeigen, dass die Werte bei Liste L2 stärker um den Mittelwert streuen.

Beispiel 2 **Kenngrößen mit Hilfsmitteln bestimmen**

a) Die Liste {0, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 3, 3, 4} für „Anzahl Kopf" ergab sich bei 10 Würfen von vier Münzen.
Berechnen Sie den Mittelwert, die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung.

b)

m_i (Anzahl Kopf)	0	1	2	3	4
h_i (rel. Häufigkeit)	0,04	0,23	0,44	0,19	0,1

100 Würfe der vier Münzen ergaben die Häufigkeitsverteilung in der Tabelle.
Berechnen Sie dazu die Kenngrößen.

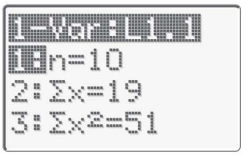
Lösung

a) *Mit einem MMS erhält man:*

$\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 1{,}9$,

$v = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = 1{,}49$ und $s = \sqrt{v} \approx 1{,}22$

Beim WTR gibt man die Werte der Liste zum Beispiel in Liste L1 ein und erhält das gleiche Ergebnis.

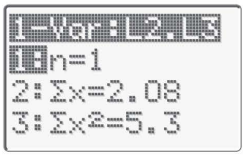


b) $\overline{x} = \sum_{i=1}^{100} m_i \cdot h_i = 2{,}08$

$v = \sum_{i=1}^{100}(m_i - \overline{x})^2 \cdot h_i = 0{,}9736$

$s = \sqrt{v} \approx 0{,}99$

Beim WTR gibt man die Werte der Tabelle zum Beispiel in Liste L2 und L3 ein und erhält das gleiche Ergebnis.



D1 **MMS-Anleitung** Eingabe von Daten

Aufgaben

○ **1** Berechnen Sie den Mittelwert, die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung der Liste {2; 0; 5; 6; 3; 8.}

→ **Lerntipp** Seite 307, Beispiel 1

○ **2** Vier Würfel wurden mehrmals geworfen. Die Tabelle zeigt die relativen Häufigkeiten h_i für die Anzahlen m_i der geraden Augenzahlen.

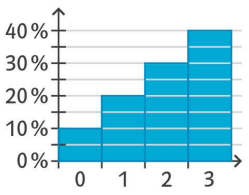
a) Stellen Sie die Daten in einem Histogramm dar.
b) Bestimmen Sie für die Werte der Tabelle den Mittelwert und die empirische Standardabweichung.
c) Prüfen Sie, ob für die Daten die Anwendung der 68 %-Regel sinnvoll ist.

m_i	h_i
0	0,1
1	0,18
2	0,48
3	0,16
4	0,08

→ **Lerntipp** Seite 307, Beispiel 2

○ **3** Gegeben ist die relative Häufigkeitsverteilung.

a) Bestimmen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung.
b) Untersuchen Sie, welche der Werte aus Teilaufgabe a) sich ändern, wenn alle Säulen gleich hoch sind.



→ **Lerntipp** Seite 307, Beispiel 2

○ **4** Widerstände werden bei elektronischen Geräten zur Steuerung des Stroms in großen Mengen benötigt. Bastler erhalten sie in Zehnerpackungen. Eine Nachmessung ergab die Urliste {975, 982, 986, 975, 1003, 985, 987, 1002, 971, 965}, Werte in Ω (Ohm).

a) Bestimmen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung der Urliste.

b) Die Widerstandswerte sind durch Farbringe kodiert. Der goldene Ring besagt dabei, dass der kodierte Wert eine Toleranz von 5 % hat. Überprüfen Sie, ob die Widerstände der Urliste die Toleranz einhalten.

○ **5** Die Tabellen zeigen Ergebnisse bei 50-maligem Würfeln.

a) Berechnen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung der Augenzahl.

b) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	7	6	11	11	7	8

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	11	7	7	5	8	12

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 514

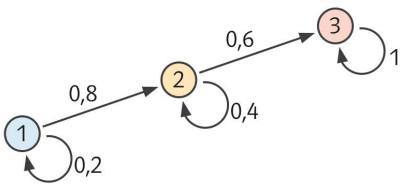
○ **6** Berechnen Sie den Mittelwert, die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung der Liste {5; 9; 6; 8; 12}.

○ **7** Bei einem Spiel wird ein Glücksrad mit drei Feldern, die mit 1 €, 2 € und 4 € beschriftet sind, sehr oft gedreht. Der angezeigte Betrag ist der Gewinn. 1 € erscheint bei 75 %, 2 € bei 20 % und 4 € bei 5 % aller Drehungen.

a) Berechnen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung für den Gewinn.

b) Interpretieren Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a).

◒ **8** Bei einem Computerspiel gibt es die Level 1, 2 und 3. Mia beginnt auf Level 1 und bewältigt die Übergänge von 1 nach 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % und von 2 nach 3 mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %. Wenn Level 3 nach sechs Durchgängen nicht erreicht ist, gibt Mia auf, das Spiel zählt nicht.



a) Simulieren Sie das Spiel mithilfe von Zufallszahlen. Führen Sie es mehrmals durch. Schätzen Sie die mittlere Anzahl von Durchgängen, bis Level 3 erreicht wird.

b) Simulieren Sie 25 Spiele und sammeln Sie jeweils die Anzahl von Durchgängen, bis Mia Level 3 erreicht, in einer Urliste.
Bestimmen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung der Urliste.

c) Untersuchen Sie, ob die Anwendung der 68 %-Regel sinnvoll ist.

◒ **9** **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Gegeben sei eine Urliste $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit Mittelwert $\bar{x}$, empirischer Varianz v und empirischer Standardabweichung s. Zu jeder Zahl x_i werden 5 addiert und man erhält die Urliste L_{neu}. Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Der Mittelwert von L_{neu} ist $\bar{x} + 5$.

b) Der Mittelwert von L_{neu} ist 0.

c) Die empirische Varianz ist bei L und L_{neu} gleich.

d) Der Wert von s ist bei L_{neu} um $\sqrt{5}$ größer als bei L.

10 In vielen Kochbüchern ist die Rede von einer „Prise Salz". Erfahrene Köche können diese Menge abschätzen.

a) Überprüfen Sie durch Nachmessen einer größeren Stichprobe arbeitsteilig die nebenstehenden Angaben.

b) Nutzen Sie die empirische Standardabweichung, um die Genauigkeit dieser Angaben zu quantifizieren.

Kochen mit Fingerspitzengefühl
Hier finden Sie ein paar Zahlen zu Prisen, Messerspitzen, Teelöffeln etc.
- 1 Prise Salz = 0,04 Gramm
- 1 Messerspitze = 0,25 Gramm
- 1 gestrichener Teelöffel = 5 Gramm
- 1 gestrichener Esslöffel = 15 Gramm

11 **Summenschreibweise**

Erinnerung: Mit $1^2 + 2^2 + \ldots + 6^2$ stellt man die Summe der ersten sechs Quadratzahlen dar.

Mathematiker verwenden dafür die Schreibweise $\sum_{i=1}^{6} i^2$.

a) Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{6} i^2$.

b) Stellen Sie die Summe der ersten 5 positiven geraden Zahlen mithilfe des Summenzeichens dar.

c) Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$ für $n = 5$ und $n = 10$. Erläutern Sie die Bedeutung der Summe.

d) Überprüfen Sie die Formel $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ für drei Werte von n (natürliche Zahlen).

12 Werfen Sie einzeln oder in Gruppen jeweils 50-mal jeweils vier Münzen. Zählen Sie, wie oft bei jedem Wurf „Kopf" oben liegt. Fassen Sie die Ergebnisse in einer Liste zusammen.

a) Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{x}$ und die empirische Standardabweichung s der Liste.

b) Bestimmen Sie, wie viel Prozent ihrer Werte sich im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ befinden. Untersuchen Sie, ob für diese Liste die 68 %-Regel gilt.

c) Stellen Sie die Verteilung in einem Säulendiagramm dar. Untersuchen Sie, ob es sich um eine glockenförmige Verteilung handelt.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 514

13 Bei einer Fluggesellschaft beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fluggast bei einem gebuchten Flug mitfliegt, 90 %. 200 Fluggäste haben den Flug gebucht.

a) Simulieren Sie einen solchen Flug. Geben Sie an, wie viele Fluggäste dabei „mitfliegen".

b) Simulieren Sie 25 Flüge wie in Teilaufgabe a) und bestimmen Sie zu der resultierenden Urliste den Mittelwert und die empirische Standardabweichung.

c) Beurteilen Sie mithilfe der 68 %-Regel, wie viele Plätze ein Flugzeug haben sollte, das für einen solchen Flug verwendet wird, damit im Extremfall nur wenige nicht mitfliegen können.

14 a) Gegeben ist die Liste $\{1, 3, 8\}$. Bestimmen Sie den Mittelwert, die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung der Liste.

b) Bestimmen Sie den Tiefpunkt des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}((1 - x)^2 + (3 - x)^2 + (8 - x)^2)$ und stellen Sie einen Zusammenhang zu den Werten von Teilaufgabe a) her. Überprüfen Sie Ihre Beobachtungen.
Überprüfen Sie Ihre Vermutung an einem anderen selbst gewählten Beispiel.

15 In einer Formelsammlung findet man für die empirische Varianz v einer Urliste $\{x_1, \ldots, x_n\}$ mit dem Mittelwert $\bar{x}$ auch die Formel $v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$.
Überprüfen Sie die Formel an einem selbst gewählten Beispiel. Leiten Sie die Formel her.

Grundwissen Test

Brüche und Prozente umwandeln und berechnen

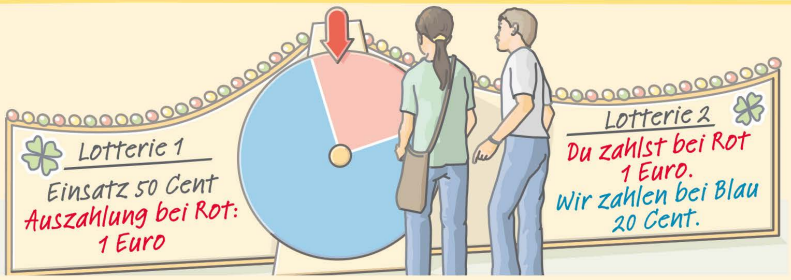
→ **Grundwissen**, Seite 410
Lösungen, Seite 514

G **16** a) Geben Sie einen Bruch an. (1) 1 % (2) 19 % (3) 75 % (4) 95 %

b) Berechnen Sie. (1) 20 % von 3,2 (2) 0,5 % von 3,2 (3) $\frac{1}{4}$ % von 7000 €

6 Zufallsgrößen – Erwartungswert und Standardabweichung

Mara meint, dass Lotterie 1 günstiger ist, weil man mehr gewinnt. Jakob hält Lotterie 2 für günstiger, weil das blaue Feld bei dem Glücksrad größer ist. Anna fürchtet, dass man bei beiden Lotterien nur verlieren kann.



Wenn es zu Häufigkeitsverteilungen auch entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilungen gibt, dann definiert man dafür entsprechende Kenngrößen, wie bei den Häufigkeitsverteilungen. Damit wird eine Prognose der empirischen Kenngrößen ermöglicht. Das wird an einem Spiel erläutert.

Es werden zwei Würfel geworfen. Je nach dem Betrag d der 6 möglichen Differenzen der Augenzahlen gewinnt man einen Geldbetrag X, siehe Fig. 1. Bei einer Simulation von 100 Durchführungen des Spiels ergaben sich die relativen Häufigkeiten h_i für die vier möglichen Gewinne x_i (Fig. 2).
Für die Werte x_i kann man auch Wahrscheinlichkeiten bestimmen, die man mit $P(X = x_i)$ bezeichnet. Ihre Berechnung veranschaulicht das Diagramm (Fig. 3). Die Punkte stehen für die 36 möglichen, gleich wahrscheinlichen Würfelergebnisse. Gleiche Farben kennzeichnen gleiche Werte für d. So liefern die 10 schwarz markierten Punkte mit $d = 1$ und die 8 blau markierten Punkte mit $d = 2$ den Gewinn $X = 1$ (nach Fig. 1).
Daher ist $P(X = 1) = \frac{10 + 8}{36} = \frac{18}{36} = 0{,}5$. Entsprechend bestimmt man die anderen Gewinnwahrscheinlichkeiten. Man erkennt an Fig. 2, dass die Wahrscheinlichkeiten gute Prognosen für die relativen Häufigkeiten sind.

d	0	1	2	3	4	5
X	2	1	1	2	3	5

Fig. 1

x_i	1	2	3	5
h_i	0,48	0,37	0,11	0,04
$P(X = x_i)$	0,500	0,333	0,111	0,056

Fig. 2

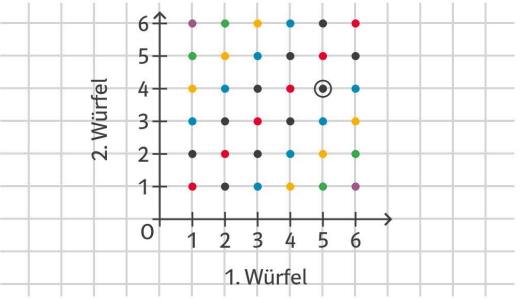


Fig. 3

Der eingekreiste Punkt steht für das Ergebnis „Der erste Würfel zeigt 5, der zweite zeigt 4", kurz (5; 4).

D1 **MMS-Anleitung** Simulation und Auswertung von Zufallsexperimenten

Da der Gewinn X eine Größe ist, die vom Zufall abhängt, nennt man X eine **Zufallsgröße**. Die Wahrscheinlichkeiten in Fig. 2 bilden die **Wahrscheinlichkeitsverteilung von X**.

Für die relativen Häufigkeiten der Gewinne berechnet man die empirischen Kenngrößen

Mittelwert $\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot h_i = 1{,}75$, empirische Varianz $v = \sum_{i=1}^{4} (x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i = 0{,}8875$ und empirische Standardabweichung $s = \sqrt{v} \approx 0{,}942$.

Entsprechende Modell-Kenngrößen definiert man auch für die Zufallsgröße X:

Erwartungswert $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot P(X = x_i) = 1 \cdot 0{,}500 + 2 \cdot 0{,}333 + 3 \cdot 0{,}111 + 5 \cdot 0{,}056 = 1{,}779$,

Varianz $V(X) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) = (1 - 1{,}779)^2 \cdot 0{,}5 + \ldots + (5 - 1{,}779)^2 \cdot 0{,}056 \approx 1{,}07$ und

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(X)} \approx 1{,}03$.

Die Bezeichnung „Erwartungswert“ ist etwas missverständlich. Erwarten kann man eigentlich nur, dass dieser Wert eine gute Prognose für den zugehörigen Mittelwert ist.

Kenngrößen einer Zufallsgröße
Eine Zufallsgröße X ordnet den Ergebnissen eines Zufallsexperiments reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu. Sie hat folgende Kenngrößen.

Erwartungswert: $\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$

Varianz: $V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)}$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)}$

Die Modell-Kenngrößen sind gute Prognosen für die entsprechenden empirischen Kenngrößen. Bei wiederholter Datenerhebung schwanken die relativen Häufigkeiten um die Wahrscheinlichkeiten, die empirischen Kenngrößen um die Modell-Kenngrößen.

Beispiel 1 **Modell und Realität vergleichen**
Gegeben sei die Zufallsgröße X: „Augensumme beim Würfeln mit zwei Würfeln“.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung (Tabelle und Histogramm), den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

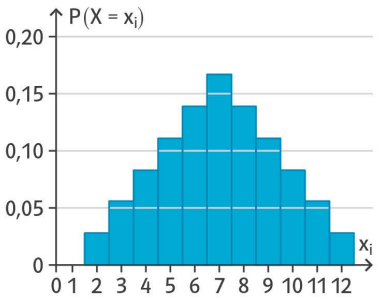
b) Würfeln Sie 100-mal mit zwei Würfeln oder simulieren Sie die Würfe mit einem MMS. Berechnen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung Ihrer Urliste. Erstellen Sie das Histogramm der Häufigkeitsverteilung. Vergleichen Sie mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Teilaufgabe a).

Lösung

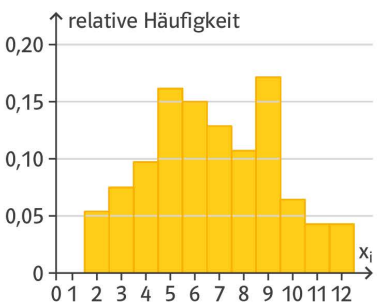
a) Wahrscheinlichkeitsverteilung (Tabelle und Histogramm):

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

So berechnet man z. B. $P(X = 5)$:
Zum Ereignis „$X = 5$“ gehören die vier Ergebnisse $(1; 4)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$ und $(4; 1)$.
Da diese Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind,
ist $P(X = 5) = \frac{4}{36}$.
Erwartungswert: $\mu = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$
Standardabweichung:
$\sigma = \sqrt{(2 - 7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3 - 7)^2 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + (12 - 7)^2 \cdot \frac{1}{36}} \approx 2{,}42$

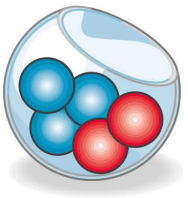


b) In dem Histogramm unten rechts ist die Häufigkeitsverteilung einer Simulation dargestellt. Es ergibt sich $\bar{x} = 6{,}85 \approx \mu$, $s = 2{,}4099 \approx \sigma$.
Der Mittelwert $\bar{x}$ wird durch den Erwartungswert μ und die empirische Standardabweichung s durch die Standardabweichung σ gut vorhergesagt.
Die Form des Histogramms ist nicht so regelmäßig wie die der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Beim Erwartungswert ist hier die relative Häufigkeit nicht am größten.
Die relativen Häufigkeiten schwanken bei wiederholter Simulation um die Wahrscheinlichkeiten. Die empirischen Kenngrößen schwanken um die des Modells.



I16 **interaktive Anwendung** Simulation eines 100-maligen doppelten Würfelwurfs

Beispiel 2 **Auszahlungsbetrag für ein faires Spiel bestimmen**



Bei einem Spiel beträgt der Einsatz 1 €. Dann werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne mit zwei roten und drei blauen Kugeln gezogen. Wenn zwei gleichfarbige Kugeln gezogen werden, erhält man a € zurück, ansonsten ist der Einsatz verloren.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns.

b) Bestimmen Sie den Auszahlungsbetrag so, dass man bei dem Spiel auf lange Sicht weder gewinnt noch verliert. Man spricht dann von einem fairen Spiel.

Lösung

a) Der Gewinn ergibt sich als Differenz „Auszahlung minus Einsatz". Also hat die Zufallsgröße X „Gewinn in €" die Werte -1 und $a-1$ und die Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Tabelle, denn es gilt

$P(X=-1) = P(\{br, rb\}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = 0{,}6$ und $P(X=a-1) = 1 - P(X=-1) = 0{,}4$ also ist $\mu = (-1)\cdot 0{,}6 + (a-1)\cdot 0{,}4 = 0{,}4\,a - 1$.

x_i	-1	$a-1$
$P(X=x_i)$	0,6	0,4

b) Das Spiel ist fair, wenn $\mu = 0$ gilt. Die Gleichung $0{,}4\,a - 1 = 0$ hat die Lösung $a = 2{,}5$. Der Auszahlungsbetrag muss 2,50 € betragen.

Aufgaben

○ **1** Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung für die Zufallsgröße X.

x_i	-10	0	5	10
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

→ **Lerntipp** Seite 311, Beispiel 1

○ **2** In einem Beutel liegen zwei 1-Cent- und zwei 2-Cent-Münzen. Jana zieht zwei Münzen ohne Zurücklegen. Es sei X die Zufallsgröße „Summe der Münzwerte".

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X (Tabelle und Histogramm).

b) Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X.

c) Ziehen Sie 50-mal aus dem Beutel oder simulieren Sie 50 Ziehungen. Bestimmen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung der Ziehungsergebnisse. Erstellen Sie das Histogramm der Häufigkeitsverteilung. Vergleichen Sie mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Teilaufgabe a) und den Werten aus Teilaufgabe b).

D1 **MMS-Anleitung** Simulation und Auswertung von Zufallsexperimenten

○ **3** Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X „Gewinn in €" bei einem Glücksspiel mit dem Einsatz 1 €.

x_i	-1	0	1	4
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$

→ **Lerntipp** Seite 312, Beispiel 2

a) Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X.

b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung, den Erwartungswert und die Standardabweichung in einem Histogramm dar.

c) Bestimmen Sie den Einsatz so, dass das Spiel fair ist.

d) Ändern Sie die maximale Auszahlung so ab, dass das Spiel bei einem Einsatz von 1 € fair ist.

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 514

○ **4** **a)** Berechnen Sie für die Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Tabelle den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung.

x_i	-2	1	4	7
$P(X=x_i)$	5 %	20 %	40 %	35 %

b) Beschreiben Sie, welche Ergebnisse Sie für die Kenngrößen bei einer Simulation des zugehörigen Zufallsexperiments erwarten können. Gehen Sie auf die Unterschiede zu den Modell-Werten ein.

5 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

In einer Urne befinden sich fünf Kugeln. Jede trägt eine der Nummern 1, 2, 3, 4 oder 5. Jede Nummer kommt einmal vor.

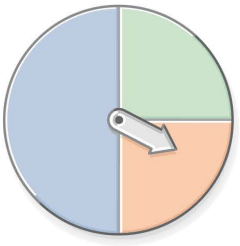
Es wird eine Kugel gezogen und die Zufallsgröße X „Nummer auf der Kugel" betrachtet.

a) Der Erwartungswert von X ist 3.

b) Wenn alle Nummern gleich sind, ist die Standardabweichung von X null.

c) Die Varianz von X kann auch null sein, wenn es verschiedene Nummern auf den Kugeln gibt.

6 Bei einer Lotterie zahlt man einen Einsatz von 50 Cent und dreht das Glücksrad zwei Mal. Bei zwei gleichen Farben wird ein Euro ausgezahlt, sonst wird nichts ausgezahlt.



a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X „Gewinn in Euro" an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für den Gewinn.

c) Bestimmen Sie den Einsatz neu, sodass die Lotterie fair ist.

d) Führen Sie die Lotterie 100-mal durch. Bestimmen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung. Vergleichen Sie mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Teilaufgabe a) und den Werten aus Teilaufgabe b). Erläutern Sie die Bedeutung der Kenngrößen.

7 Beim Würfelspiel „2 & 12" werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen. Die Bank zahlt der Spielerin das Zehnfache der Augensumme in Cent aus, sofern diese 2 oder 12 ist. Bei der Augensumme 3 oder 11 erhält sie das Fünffache in Cent und bei der Augensumme 4 oder 10 das Doppelte in Cent. Bei den Augensummen 5 bis 9 wird so viel in Cent ausbezahlt, wie die Augensumme angibt.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße „Auszahlung der Bank" an.

b) Bestimmen Sie den Einsatz, den die Bank mindestens verlangen muss, um langfristig keinen Verlust zu machen.

Test 2

Lösungen, Seite 515

8 a) Aus einem Beutel mit zwölf 50-Cent-Münzen, fünf 1-Euro-Münzen und acht 2-Euro-Münzen nimmt man mit einem Griff zwei Münzen. Bestimmen Sie mithilfe einer Zufallsgröße X einen Wert, der den Geldbetrag m vorhersagt, den man durchschnittlich herausziehen wird.

b) Berechnen Sie die Standardabweichung der Zufallsgröße X aus Teilaufgabe a). Erläutern Sie die Bedeutung dieser Kenngröße im Hinblick auf die Durchführung einer Ziehung.

c) Benennen Sie weitere Zufallsgrößen, die zu diesem Experiment passen könnten.

9 Bei den Eishockey-Ausscheidungsspielen spielen zwei Mannschaften so oft gegeneinander, bis eine der beiden drei Spiele gewonnen hat. Das ist nach höchstens fünf Spielen der Fall (Best of Five). Bestimmen Sie die Anzahl der Spiele, mit denen man im Mittel rechnen muss, wenn beide Mannschaften gleich stark sind. Bestimmen Sie die zugehörige Standardabweichung.

10 Eine Zeitschrift veröffentlicht ein Kreuzworträtsel. Unter den Anrufern mit dem richtigen Lösungswort werden ein Preis zu 1000 €, vier Preise zu je 300 € und 200 Preise zu je 20 € verlost.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für den Gewinn, wenn man von 10 000 eingegangenen richtigen Lösungen ausgeht.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen, die eingehen müssten, damit der zu erwartende Gewinn gerade der Gesprächsgebühr von 0,45 € entspricht.

Grundwissen Test Prozentrechnung

Grundwissen, Seite 410
Lösungen, Seite 515

G **11** Vervollständigen Sie die Tabelle. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Grundwert	500	800	5000	
Prozentsatz	3 %	6 %		5 %
Prozentwert	15		250	320

Wiederholung: Wahrscheinlichkeit

→ **Lösungen**, Seite 515

1 Als Sonja die Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Tabelle sieht, meint sie: „Da stimmt doch was nicht!“ Nehmen Sie dazu Stellung.

Ergebnis	a	b	c	d	e
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

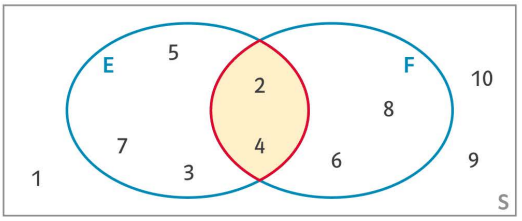
2 In einer Urne befinden sich vier blaue und zwei rote Kugeln. Zwei Kugeln werden zufällig entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: „Beide Kugeln sind blau.“ B: „Höchstens eine Kugel ist blau.“

3 Ein Glücksrad mit vier gleich großen Feldern, auf denen die Zahlen 1, 2, 4 und 8 stehen, wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das beschriebene Ereignis.
a) Beim ersten Drehen erhält man mindestens 4 oder beim zweiten Drehen höchstens 2.
b) Beim ersten Drehen erhält man höchstens 2 oder die Summe der Zahlen beträgt höchstens 4.

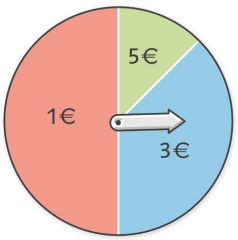
4 Valentin hat beim Lotto „6 aus 49“ die Zahlen 1, 7, 13, 22, 23 und 37 getippt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste und die zweite Kugel bei der Lotto-ziehung keine Zahl tragen, die Valentin getippt hat.

Verknüpfen von Ereignissen

5 Das Mengendiagramm veranschaulicht die Ergebnismenge S eines Zufallsexperiments sowie zwei Ereignisse E und F.
a) Geben Sie E und F als Mengen an.
b) Stellen Sie die rot markierte Fläche mithilfe von E und F dar.
c) Markieren Sie $\overline{E \cup F}$ und $\overline{E} \cup \overline{F}$.



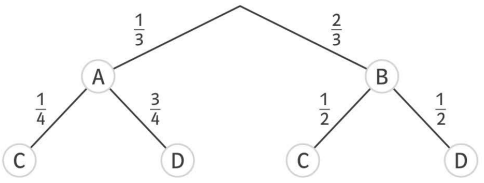
6 Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Die Geldbeträge der angezeigten Farben werden ausgezahlt. Betrachten Sie die Ereignisse E: „Man erhält höchstens 4 €.“ und F: „Es erscheint zweimal Blau.“.
a) Erstellen Sie ein Mengendiagramm.
b) Beschreiben Sie in Worten und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten.
(1) $P(E \cap F)$ (2) $P(E \cap \overline{F})$ (3) $P(\overline{E \cap F})$ (4) $P(E \cup F)$ (5) $P(E \backslash F)$



Bedingte Wahrscheinlichkeit – stochastische Unabhängigkeit

7 Aus einer Urne mit acht von 1 bis 8 nummerierten Kugeln wird eine entnommen. Man betrachtet die Ereignisse E: „Man zieht eine ungerade Zahl.“ und F: „Man zieht eine Zahl, die größer als 4 ist.“.
a) Erstellen Sie eine passende Vierfeldertafel und ein Mengendiagramm.
b) Bestimmen Sie $P(E)$, $P(E \cap F)$, $P(\overline{E} \cap \overline{F})$ und $P(\overline{E})$.
c) Untersuchen Sie die Ereignisse E und F auf stochastische Unabhängigkeit.

8 **a)** Geben Sie an, wie B mit A und C mit D zusammenhängt.
b) Erstellen Sie eine Vierfeldertafel.
c) Erstellen Sie ein Baumdiagramm, in dem C und D auf der ersten Stufe stehen.
d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P_A(C)$ und $P_C(A)$. Formulieren Sie dazu eine Aussage, die zum Kontext passt.
e) Untersuchen Sie die Ereignisse A und D auf stochastische Unabhängigkeit.



A: Vater ist Linkshänder
C: Tochter ist Linkshänderin

D25 Check-out

Simulationen

→ **Lösungen**, Seite 516

9 Bei einer Fluggesellschaft beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fluggast bei einem gebuchten Flug mitfliegt, 90 %.

a) Bestimmen Sie mithilfe einer Simulation für einen Flug mit 20 Buchungen die Anzahl mitfliegender Fluggäste.

b) Wiederholen Sie die Simulation 50-mal und ermitteln Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung für die Anzahl der mitfliegenden Fluggäste.

10 Es soll untersucht werden, wie sich bei häufiger Versuchswiederholung die relativen Häufigkeiten der Augenzahl 6 beim Würfeln verhalten.

a) Führen Sie $n = 50$ Würfelsimulationen durch und bestimmen Sie die relative Häufigkeit der Augenzahl 6.

b) Wiederholen Sie die Simulation 200-mal und vergleichen Sie das Ergebnis mit den Werten aus Teilaufgabe a).

Daten erheben und mit Kenngrößen beschreiben

11 Erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle und ein Histogramm mit relativen Häufigkeiten. Berechnen Sie den Mittelwert, die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung der Urliste.

a) {2; 5; 7; 3; 4; 2; 4; 2; 5; 6; 2}

b) {−5; 3; 0; 2; 5; 3; −4; 5; −4; 1; 1; 3}

c) {21; 17; 18; 21; 17; 21; 20; 19; 18; 24; 20; 17; 15; 15; 25; 20; 17; 24; 16; 19}

12 In einer Messreihe wurden die Längen (in cm) von Schrauben in einer Werkzeugkiste ermittelt und ergaben die Liste {7, 8, 5, 6, 3, 5, 6, 8, 9, 7, 5, 7, 9, 4, 6, 8, 7, 6, 6, 5}.

a) Bestimmen Sie den Mittelwert, die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung der Länge der Schrauben.

b) Erläutern Sie die Rolle der empirischen Varianz und der empirischen Standardabweichung als Maße für die Streuung der Daten.

c) Stellen Sie die Werte der Liste in einem Histogramm dar.

d) Untersuchen Sie, ob es sich um eine glockenförmige Verteilung handelt und ob für diese Liste die 68 %-Regel gilt (vgl. Seite 306).

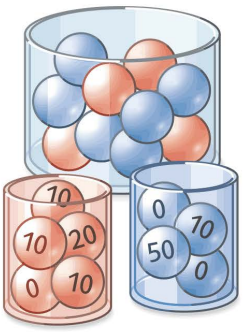
Zufallsgrößen – Erwartungswert und Standardabweichung

13 **a)** Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Tabelle.

k	−10	0	5	10
P(X = k)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

b) Erzeugen Sie durch eine Simulation mithilfe einer Urne mit 12 passend nummerierten Kugeln Daten zur Zufallsgröße X. Bestimmen Sie die empirischen Kenngrößen und vergleichen und interpretieren Sie deren Verhalten im Vergleich zu den Modell-Kenngrößen von X.

14 Bei einer Lotterie zahlt man 20 Cent Einsatz und zieht eine Kugel aus der oberen Urne mit den roten und blauen Kugeln. Je nach der gezogenen Farbe zieht man aus der unteren roten bzw. blauen Urne wieder eine Kugel. Die Zahl auf dieser Kugel ist die Auszahlung in Cent.



a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße „Gewinn = Auszahlung − Einsatz“ an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für den Gewinn.

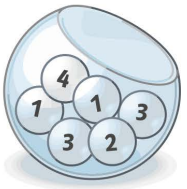
c) Bestimmen Sie den Einsatz so, dass die Lotterie fair ist.

Weiterführende Aufgaben

→ **Lösungen**, Seite 518

15 Bei einem Zufallsexperiment gibt es nur die Ausgänge Treffer (T) und Niete (N). Im Speicher eines Rechners ist die Trefferwahrscheinlichkeit p abgespeichert. Es kommen nur $p = 0{,}3$ oder $p = 0{,}7$ infrage. Der Rechner liefert bei vier Wiederholungen des Experiments TNTT.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Speicher 0,7 (und nicht 0,3) steht.

16 In einer Schale liegen sechs Kugeln. Man entnimmt daraus – ohne Hinsehen – nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen. Vor jedem Zug werden die Kugeln gut gemischt.
Die Ergebnisse werden in der Form $(3; 1)$ notiert, falls z. B. die erste Kugel die Nummer 3 und die zweite Kugel die Nummer 1 trägt. Betrachten Sie die Ereignisse
E: „Die Summe der Zahlen auf den Kugeln beträgt höchstens 3." und
$F = \{(1; 1), (2; 1), (3; 1), (4; 1)\}$.

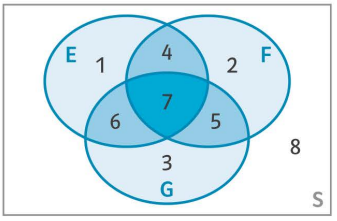


a) Geben Sie E in Mengenschreibweise an.
b) Beschreiben Sie F und das Gegenereignis von E in Worten.
c) Bestimmen Sie P(E) und P(F).
d) Untersuchen Sie E und F auf stochastische Unabhängigkeit.

17 Bei der Überprüfung von Fahrgästen der städtischen Verkehrsbetriebe wurde ermittelt, dass etwa 2 % der Fahrgäste ohne Fahrschein sind, davon sind 75 % männlich. Allerdings wurden insgesamt auch 55 % männliche Fahrgäste gezählt.
Ein Fahrgast wird überprüft.
a) Erstellen Sie eine Vierfeldertafel und ein Mengendiagramm.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Überprüfung eine weibliche Person mit Fahrschein angetroffen wird.
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, auf eine männliche Person oder eine Person mit Fahrschein zu treffen.

18 Ein Würfel wird geworfen. Die Zufallsgröße X gibt die Augenzahl bei einem Wurf an.
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
b) Es werden n Würfe des Würfels simuliert. Die Augensumme der n Würfe wird durch n geteilt. Wiederholen Sie dieses Experiment 20-mal, jeweils für $n = 25$, $n = 100$, $n = 400$. Sie erhalten drei Urlisten mit jeweils 20 Werten.
Bestimmen Sie für die erhaltenen Urlisten jeweils den Mittelwert sowie die empirische Standardabweichung. Beschreiben Sie die Zusammenhänge mit Teilaufgabe a).

19 Die Abbildung zeigt ein Mengendiagramm für drei Ereignisse E, F und G.



a) Stellen Sie mithilfe von E, F, G und den Mengenverknüpfungen ∪, ∩, \ dar:
(1) $A = \{7\}$ (2) $B = \{1, 4, 6\}$ (3) $C = \{4, 5, 6, 7\}$.
b) Geben Sie alle Elemente an.
(1) $E \cup F$ (2) $E \cap (F \cup G)$ (3) $E \setminus (F \cup G)$

20 **Wahr oder falsch?**
Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.
Wird in einer Zahlenreihe mit acht Zahlen …
a) eine Zahl um 8 erhöht, so erhöht sich der Mittelwert um 1.
b) jeder Wert um 2 erhöht, so ändert sich die empirische Standardabweichung nicht.
c) ein Wert verdoppelt, so wird die empirische Standardabweichung größer.
d) jeder Wert verdoppelt, so ändert sich die empirische Standardabweichung nicht.

→ **Lösungen**, Seite 519

21 **a)** 💻 Wenn man die dritten Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis 9 addiert, erhält man eine naheliegende Jahreszahl.
Stellen Sie die Summe mit dem Summenzeichen dar und berechnen Sie die Jahreszahl.

b) 💻 Bestimmen Sie eine natürliche Zahl n so, dass die Summe $\sum_{i=1}^{n}(i^2 - 4i)$ eine naheliegende Jahreszahl ergibt.

c) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X ordnet den natürlichen Zahlen 1 bis 10 Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_{10}$ zu. Geben Sie mithilfe des Summenzeichens Formeln für den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X an.

22 Kim hat einen Spickzettel geschrieben.

a) Erläutern Sie die Tabelle an einem selbst ausgewählten Beispiel mithilfe geeigneter Zahlen.

b) Tina meint, dass man Wahrscheinlichkeiten auch erst nach einem Experiment festlegen kann. Sie begründet das mit dem Spruch: „Aus Erfahrung wird Erwartung…" Kommentieren Sie.

Zufallsexperiment/Datenerhebung mit möglichen Ergebnissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$	
Realität relative Häufigkeiten $h_1, h_2, \ldots, h_n$	Modell Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$
$0 \leq h_i \leq 1$: Summe 1	$0 \leq p_i \leq 1$: Summe 1
nach Experiment	vor Experiment
empirische Kenngrößen $\bar{x}$ und s schwanken	Modell-Kenngrößen μ und σ festgelegt

23 Zur Früherkennung einer Stoffwechselkrankheit bei Säuglingen wurde eine neue Untersuchungsmethode entwickelt. Mit dieser Methode wird in 0,01% aller Fälle eine vorliegende Stoffwechselkrankheit nicht entdeckt, während sie in 0,1% aller Fälle irrtümlich eine Krankheit anzeigt. Durchschnittlich haben bei 1,1 Millionen Geburten 100 Säuglinge diese Stoffwechselkrankheit.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein als krank diagnostizierter Säugling wirklich diese Stoffwechselkrankheit hat.

24 Vier Münzen werden geworfen. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl von „Wappen".

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 2)$ und $P(X \neq 1)$.

c) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass X mindestens 2 ist, wenn „Wappen" und „Zahl" nicht gleich oft fallen.

d) Eine Simulation von 10 Würfen ergab die Urliste $L = \{2, 2, 3, 1, 3, 2, 1, 0, 2, 1\}$. Berechnen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung von L.

e) Beschreiben Sie, welche Ergebnisse Sie für Teilaufgabe d) bei weiteren Simulationen erwarten. Beschreiben Sie die Zusammenhänge mit Teilaufgabe a).

25 Ronnie hat beim Snooker eine durchschnittliche Trefferquote von 92%. Es wird wiederholt eine Serie von fünf Versuchen analysiert. Betrachtet werden die Ereignisse E: „Ronnie trifft bei genau vier Versuchen." und $F = \{(1, 1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}$. (Treffer $\triangleq$ 1, Misserfolg $\triangleq$ 0).
Die Trefferquote wird für die folgenden Teilaufgaben als Wahrscheinlichkeit festgelegt.

a) Geben Sie eine Bedingung an, unter der das eine sinnvolle Modellannahme ist.

b) Geben Sie E als Menge an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit von E.

c) Beschreiben Sie F in Worten und bestimmen Sie $P(F)$ und $P(\overline{F})$.

d) Beschreiben Sie ein Ereignis G mit $P(G) = 1 - 0{,}92^5$.

e) Stellen Sie schematisch die Ergebnismenge S sowie die Ereignisse $E \cap F$ und $E \setminus F$ mithilfe eines Mengendiagramms dar, ohne dass Sie dort alle Ergebnisse eintragen.

f) Bestimmen Sie $P(E \cup F)$ und $P_E(F)$ und interpretieren Sie im Sachzusammenhang.

g) Oscar meint: „Die Schnittmenge von $E \setminus F$ und $(E \cup F)$ ist E, weil E in beiden vorkommt." Nehmen Sie dazu Stellung.

h) Beschreiben Sie, wie man mithilfe einer Simulation Näherungswerte für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Trefferzahl bei fünf Versuchen bestimmen kann.

Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse eines Zufallsexperiments sind Zahlen zwischen $[0; 1]$ mit der Summe 1. Sie bilden eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung**. Man legt Wahrscheinlichkeiten so fest, dass sie die relativen Häufigkeiten gut vorhersagen. Alle Ergebnisse bilden die **Ergebnismenge**.

Mehrstufige Experimente

Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis eines mehrstufigen Zufallsexperiments ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Ereignisse

Teilmengen der Ergebnismenge nennt man Ereignisse.
Summenregel: Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses E ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse.
Zu jedem Ereignis E gibt es ein Gegenereignis $\overline{E}$, das alle Ergebnisse enthält, die nicht zu E gehören. Es gilt $P(E) = 1 - P(\overline{E})$.
Ereignisse kann man in einem Mengendiagramm darstellen.
E und F seien zwei Ereignisse. Dann bilden alle Ergebnisse, die

- zu E und F zugleich gehören, die **Schnittmenge** $E \cap F$,
- zu E oder F gehören, die **Vereinigungsmenge** $E \cup F$,
- zu E, aber nicht zu F gehören, die **Komplementmenge** $E \setminus F$.

Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis F, wenn man weiß, dass E eingetreten ist, nennt man **bedingte Wahrscheinlichkeit**. Man bezeichnet sie mit $P_E(F)$ und berechnet sie mit der Formel $P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$.

E und F heißen **stochastisch unabhängig**, wenn $P_E(F) = P(F)$.
E und F sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$.

Kenngrößen bei Daten

Gegeben ist eine Urliste $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Die zugehörigen Kenngrößen sind der **Mittelwert** $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$, die **empirische Varianz** $v = \frac{1}{n} \cdot ((x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ sowie die **empirische Standardabweichung** $s = \sqrt{v}$.
Wenn eine relative Häufigkeitsverteilung mit den Werten $m_1, \ldots, m_n$ und den relativen Häufigkeiten $h_1, \ldots, h_n$ vorliegt, so gilt

$\overline{x} = m_1 \cdot h_1 + \ldots + m_n \cdot h_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot h_i$ und

$v = (m_1 - \overline{x})^2 \cdot h_1 + \ldots + (m_n - \overline{x})^2 \cdot h_n = \sum_{i=1}^{n} (m_i - \overline{x})^2 \cdot h_i$.

Zufallsgrößen

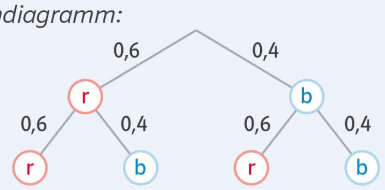
Wenn jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments ein Zahlenwert zugeordnet wird, spricht man von einer **Zufallsgröße**. Ist x_i ein möglicher Wert der Zufallsgröße X, so bezeichnet $P(X = x_i)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X den Wert k annimmt.
Kenngrößen einer Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

Erwartungswert: $\mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$

Varianz: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Zufallsexperiment: Ziehen mit Zurücklegen von zwei Kugeln aus einer Urne mit drei roten und zwei blauen Kugeln.
Ergebnismenge $S = \{rr, rb, br, bb\}$.
Baumdiagramm:

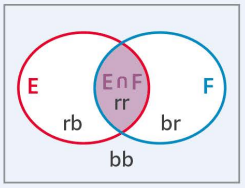


Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Ergebnis	rr	rb	br	bb
Wahrscheinlichkeit	0,36	0,24	0,24	0,16

Das Ergebnis „rr" hat die Wahrscheinlichkeit $0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$. *Das Ereignis A: „Mindestens eine Kugel ist rot." hat das Gegenereignis* $\overline{A}$*: „Keine Kugel ist rot.". Es gilt:*
$P(A) = P(rr) + P(rb) + P(br) = 0{,}84$
$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}84 = 0{,}16$

$E = \{rr, rb\}$, $P(E) = 0{,}6$
$F = \{rr, br\}$, $P(F) = 0{,}6$
$E \cap F = \{rr\}$
$P(E \cap F) = 0{,}36$
$E \setminus F = \{rb\}$,
$P(E \setminus F) = 0{,}24$



$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{0{,}36}{0{,}6} = 0{,}6 = P(F)$
Es gilt $P(E) \cdot P(F) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36 = P(E \cap F)$, *also sind E und F stochastisch unabhängig.*

Die folgende relative Häufigkeitsverteilung ist gegeben:

m_i	1	3	5	8	9
rel. Häufigkeit h_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\overline{x} = 1 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 5 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{2}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = 5$
$v = (1 - 5)^2 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + (9 - 5)^2 \cdot \frac{1}{8} = 7{,}75$
$s = \sqrt{7{,}75} \approx 2{,}78$

Zufallsgröße X: „Anzahl der roten Kugeln"
Zuordnungen: $rr \to 2$, $rb \to 1$, $br \to 1$, $bb \to 0$,
Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,16	0,48	0,36

$\mu = E(X) = 0 \cdot 0{,}16 + 1 \cdot 0{,}48 + 2 \cdot 0{,}36 = 1{,}2$
$V(X) = (0 - 1{,}2)^2 \cdot 0{,}16 + \ldots + (2 - 1{,}2)^2 \cdot 0{,}36 = 0{,}48$
$\sigma = \sqrt{0{,}48} \approx 0{,}69$

D26 Lösungen
Probeklausur
Kapitel VIII

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 1

30 min

1 Berechnen Sie für die Urliste $\{4; 3; 4; 5; 4\}$ den Mittelwert, die empirische Varianz und einen Näherungswert für die empirische Standardabweichung, auf eine Dezimalstelle genau.

2 Nach einer Statistik der Deutschen Bahn verkehren etwa 70 Prozent der Fernzüge „pünktlich" (d.h. mit maximal 5 Minuten Verspätung). Dian fährt 5-mal mit einem Fernzug.

a) Er berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Zug nicht pünktlich ist, mit der Formel $1 - 0{,}7^5$. Erklären Sie die Formel.

b) Nehmen Sie Stellung zur Annahme: „Die Pünktlichkeit der Züge ist voneinander unabhängig.".

3 Aus den Buchstaben A, S und U sollen zufällig Wörter mit drei Buchstaben – auch sinnlose – gebildet werden. Dabei darf jeder Buchstabe nur einmal verwendet werden. Betrachtet werden die Ereignisse E: „U steht hinten." und F: „Ein Vokal steht in der Mitte.".

a) Geben Sie die Ereignisse E und F als Mengen an und bestimmen Sie ihre Wahrscheinlichkeit.

b) Beschreiben Sie die Ereignisse $E \cap F$ und $E \cup F$ und berechnen Sie ihre Wahrscheinlichkeit.

c) Untersuchen Sie, ob E und F stochastisch unabhängig sind.

4 **a)** Berechnen Sie für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X rechts die Kenngrößen Erwartungswert und Varianz.

x_i	-2	0	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

b) Jonathan findet es unnötig, außer der Varianz noch die Standardabweichung als Streumaß zu verwenden. Nehmen Sie dazu Stellung.

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 2

30 min

1 Wenn man Flügelmuttern auf einer Seite schwarz, auf der anderen weiß markiert, gibt es beim „Würfeln" drei mögliche Ergebnisse. Heiko hat 50-mal, Simone 200-mal „gewürfelt":

a) Notieren Sie sinnvolle Wahrscheinlichkeiten. Erläutern Sie Ihre Gedanken.

b) Fassen Sie die Ergebnisse zusammen und notieren Sie eine neue Schätzung.

	schwarz	weiß	Boden
Heiko	20	24	6
Simone	88	95	17

2 Im Einstein-Gymnasium gibt es eine Mensa, in der insgesamt 120 Jugendliche essen. Davon sind 40 % Mädchen. Nach einer Umfrage finden 70 % aller Jugendlichen, aber nur 50 % der Mädchen, das Essen gut.

a) Stellen Sie die Angaben mithilfe einer Vierfeldertafel und eines Mengendiagramms dar.

b) Jemand, der am Essen teilnimmt, wird zufällig befragt: „Ich finde das Essen nicht gut!" Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die befragte Person kein Mädchen ist.

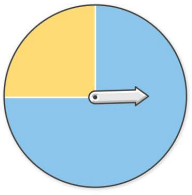
3 Ty wirft zwei Würfel. Prüfen Sie die Ereignisse A und B auf stochastische Unabhängigkeit.

a) A: „Die Augensumme ist 6." und B: „Die Differenz der Augenzahlen ist 0."

b) A: „Der erste Würfel zeigt 3." und B: „Die Augensumme ist größer als 5."

c) A: „Der erste Würfel zeigt eine Augenzahl unter 3." und B: „Der zweite Würfel zeigt eine Augenzahl über 3."

4 Das Glücksrad wird so lange gedreht, bis eine Farbe zum zweiten Mal erscheint. Die Zufallsgröße X zählt die Drehungen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie den Erwartungswert, die Varianz und die näherungsweise Standardabweichung von X.



Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 1

60 min

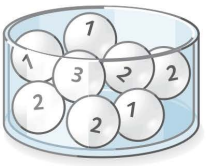
D26 Lösungen
Probeklausur
Kapitel VIII

1 Deutschland hat mit Österreich, Tschechien, den Niederlanden, Frankreich, Polen, der Schweiz, Belgien, Luxemburg und Dänemark Grenzen mit den Längen 817 km, 812 km, 576 km, 455 km, 449 km, 316 km, 157 km, 136 km bzw. 68 km.
Bestimmen Sie die den Mittelwert und die empirische Standardabweichung der Grenzlängen.

2 Ein Laplace-Würfel ist mit den Augenzahlen 1, 1, 1, 1, 6 und 6 bezeichnet. Der Würfel wird 7-mal geworfen. Betrachten Sie die Ereignisse E: „Beim ersten Wurf fällt eine 1.“, F: „Es fällt mindestens eine 6.“, G: „Es fällt keine 1.“.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E, F und G.
b) Untersuchen Sie, ob E und G stochastisch unabhängig sind.
c) Bestimmen Sie $P(E \cap F)$ sowie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass F unter der Bedingung E eintritt.

3 **„Die gute Sieben“**
Aus der Schale zieht Lotti „blind“ drei Kugeln, ohne sie zurückzulegen.



a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ziehungsergebnis (2; 1; 2).
b) Lotti gewinnt, wenn das Ereignis E: „Die Summe der Zahlen auf den Kugeln ist 7.“ eintritt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie gewinnt.
c) Geben Sie ein Ziehungsergebnis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit $\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6}$ berechnet wird.
Geben Sie alle Ziehungsergebnisse mit dieser Wahrscheinlichkeit als Ereignis F in Mengenschreibweise an. Beschreiben Sie F in Worten und bestimmen Sie P(F).
d) E sei das Ereignis von Teilaufgabe b), F das Ereignis von Teilaufgabe c).
Bestimmen Sie $E \cap F$ sowie $E \cup F$ und stellen Sie diese Mengen in einem Mengendiagramm schematisch dar. Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

4 Beim 15 km-Biathlon müssen die Teilnehmerinnen einen Skilanglauf absolvieren und zwischendurch auf fünf Scheiben schießen. Für jeden Fehlschuss wird der Laufzeit eine Minute Strafzeit hinzugerechnet. Janina trifft erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %. Ihr Ergebnis beim Schießen wird in der Form 11011 notiert (1 steht für Treffer, 0 für Fehlschuss).
Es werden die Ereignisse E: „Bei den ersten drei Schüssen gibt es nur Treffer.“ und
F = {11100, 11010, 11001, 10110, 10101, 10011, 01110, 01101, 01011, 00111} betrachtet.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Janina bei den ersten vier Schüssen trifft.
b) Geben Sie das Ereignis E als Menge an. Beschreiben Sie F in Worten.
c) Bestimmen Sie P(E), $P(\overline{E})$, $P(E \cap F)$, und $P(E \setminus F)$.
d) Erläutern Sie, was $P_E(F)$ im Sachzusammenhang bedeutet.
e) Untersuchen Sie E und F auf stochastische Unabhängigkeit.
f) Bei einer anderen Schützin wurde über längere Zeit eine Statistik ihrer Treffer bei fünf Versuchen erfasst.

i	0	1	2	3	4	5
h_i	0	0,05	0,11	0,21	0,39	0,24

Die Tabelle zeigt die relativen Häufigkeiten h_i ihrer Trefferanzahlen i. Bestimmen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung dieser Verteilung.
Pia behauptet: „Etwa 68 % der Treffer liegen im Intervall um den Mittelwert, das doppelt so lang ist wie die empirische Standardabweichung.“ Untersuchen Sie Pias Behauptung und erläutern Sie Ihr Ergebnis.
g) Bestimmen Sie durch eine begründete Rechnung einen Schätzwert für die Trefferwahrscheinlichkeit der Schützin aus Teilaufgabe f).

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 2

60 min

D26 Lösungen
Probeklausur
Kapitel VIII

1 Bei einem Test sind bei acht Fragen jeweils fünf mögliche Antworten angegeben, von denen jeweils nur eine Antwort richtig ist. Ein Kandidat hat alles vergessen und setzt rein zufällig seine Kreuzchen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er

a) bei der fünften Frage das Kreuz richtig setzt,

b) die Antworten bei den ersten drei Fragen richtig ankreuzt,

c) bei höchstens einer Frage das Kreuz richtig setzt.

2 Ein Zollhund bellt, wenn er Rauschgift wittert. 98 % aller Rauschgift-Schmuggelfälle entdeckt er. In 3 % aller Fälle, in denen kein Rauschgift geschmuggelt wurde, bellt er versehentlich trotzdem.
Die Erfahrung zeigt, dass bei 1 % sämtlicher Passagiere Rauschgift geschmuggelt wird.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Hund bellt, wenn er einen Passagier überprüft. Erklären Sie, wieso diese Wahrscheinlichkeit ziemlich klein ist.

b) Der Hund bellt bei einem gerade ankommenden Passagier. Untersuchen Sie, wie sicher der Zollbeamte sein kann, dass der Passagier tatsächlich Rauschgift schmuggelt.

c) Der Hund bellt bei einem ankommenden Passagier nicht. Untersuchen Sie, wie sicher der Zollbeamte sein kann, dass dieser Passagier kein Rauschgift schmuggelt.

3 Bei einem Würfelspiel mit drei Würfeln zählen nur Würfe, bei denen mindestens eine Sechs gewürfelt wird.
Wurfergebnisse werden in der Form $(6, 0, 0)$ notiert (6: Sechs; 0: keine Sechs). Eine Sechs zählt 10 Punkte, zwei Sechsen zählen 100 Punkte und drei Sechsen zählen 1000 Punkte.
Die Zufallsgröße X zählt die Punkte.

a) Bei einer Simulation von 25 Durchgängen, bei der jeweils die Anzahl der Sechsen gezählt wurde, ergab sich die Liste
$L = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0\}$.
Ergänzen Sie die Tabelle und erstellen Sie dazu ein Histogramm.

Anzahl Sechsen	0	1	2	3
relative Häufigkeit				0

b) In der Liste L von Teilaufgabe a) kommt keine 3 vor. Kommentieren Sie, ob Sie das für ungewöhnlich halten.

c) Bestimmen Sie für die Liste L aus Teilaufgabe a) den Mittelwert, die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung der erreichten Punktzahl.

d) E und F sind die Ereignisse E: „Ein Wurf ergibt 100 Punkte." und $F = \{(6, 6, 6), (6, 6, 0), (6,0,0)\}$.
Stellen Sie alle Ergebnisse sowie die Ereignisse $E \cap F$ und $E \cup F$ mithilfe eines Mengendiagramms dar.
Bestimmen Sie $P(E)$, $P(E \cap F)$ und $P(E \setminus F)$.

e) Beschreiben Sie ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit man mit $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$ berechnen kann.

f) Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X. Erläutern Sie den Zusammenhang mit den Ergebnissen aus den Teilaufgaben a) und c).

x_i	0	10	100	1000
$P(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Stochastische Prozesse

Es gibt zufallsabhängige Situationen, bei denen eine unbegrenzte Anzahl von Schritten bis zum Erreichen eines Ziels zu absolvieren sind. Man spricht dann von **stochastischen Prozessen**.

1 **Kein endliches Spiel**

Bei einem Computerspiel gibt es drei Zustände: Level 1, 2 und 3. Jonathan beginnt auf Level 1 und bewältigt die Übergänge von Level 1 nach Level 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 und von Level 2 nach Level 3 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6. Das Spiel endet nach Level 3.

a) Simulieren Sie mithilfe von roten und schwarzen Spielkarten 10 Spieldurchgänge.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jonathan zwei Spielschritte bis zum Level 2 und von dort aus einen Spielschritt bis zum Level 3 benötigt.

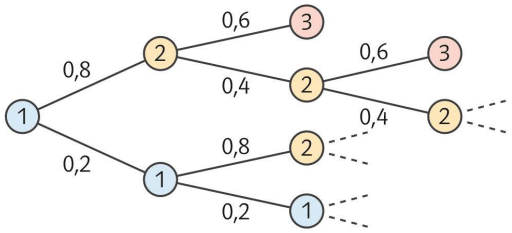
Info

So bekommt man Zustände

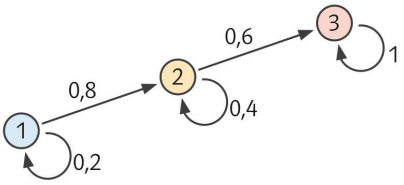
Ein Baumdiagramm zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten dafür, welches Level Jonathan nach 2, 3, 4 … Spielschritten erreicht hat, wäre „unendlich lang".

Stattdessen verwendet man ein **Prozessdiagramm**, um damit Fragen zum Spiel zu beantworten.

Baumdiagramm



Prozessdiagramm



Ein Kreis mit Zahl bedeutet das erreichte Level. Man nennt ihn **Zustand**. Übergänge zwischen den Zuständen sind durch Pfeile gekennzeichnet, an denen die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang zum nächsthöheren Level bzw. für das Verbleiben im erreichten Level stehen. Man nennt sie **Übergangswahrscheinlichkeiten**. Den Zustand „3" nennt man **Endzustand**, denn das Spiel endet dort. Die anderen Zustände nennt man **innere Zustände**.

Im Prozessdiagramm gilt:
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten „abgehender" Pfeile eines Zustands ist gleich 1.
- Einen Endzustand erkennt man an einem Ringpfeil mit der Übergangswahrscheinlichkeit 1.
- Ein Pfad im Baumdiagramm entspricht einer „Kette" von Pfeilen im Prozessdiagramm. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit wird daher nach der Pfadregel bestimmt.

2 Passen Sie das Prozessdiagramm aus der Infobox für den Fall an, dass man bei dem Spiel das Level 3 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,25 erreicht und mit der „restlichen" Wahrscheinlichkeit in Level 1 zurückfällt.

Zustandsverteilungen

Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen Jonathan sich nach k Spielschritten in Zustand 1, 2, 3 befindet, werden mit a_k bzw. b_k bzw. c_k bezeichnet. Man fasst sie in **Zustandsverteilungen** zusammen (graue Spalten). Die Startverteilung ist $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ und $c_0 = 0$.

Die folgende Zustandsverteilung wird mithilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten aus der vorhergehenden Zustandsverteilung berechnet. Dies kann man übersichtlich durch die Berechnungsvorschrift in Fig. 2 beschreiben.

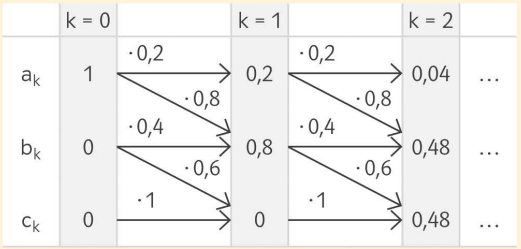


Fig. 1: Zustandsverteilung nach k Schritten

Weil das Spiel in Level 1 beginnt, wird $a_0 = 1$ gesetzt.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 0{,}2 \cdot a_k \\ b_{k+1} &= 0{,}8 \cdot a_k + 0{,}4 \cdot b_k \\ c_{k+1} &= 0{,}6 \cdot b_k + 1 \cdot c_k \end{aligned}$$

Fig. 2

Die Berechnungsvorschrift besteht aus drei linearen Gleichungen

3 Aus der Zustandsverteilung nach zwei Schritten kann man wie hier dargestellt die Verteilung nach drei Schritten berechnen.
Berechnen Sie nach dem diesem Schema die Verteilungen nach vier und fünf Spielschritten.

$$\begin{array}{lllll} a_3 = 0{,}2\cdot a_2 & & = 0{,}2\cdot 0{,}04 & & = 0{,}008 \\ b_3 = 0{,}8\cdot a_2 + 0{,}4\cdot b_2 & & = 0{,}8\cdot 0{,}04 + 0{,}4\cdot 0{,}48 & & = 0{,}224 \\ c_3 = & 0{,}6\cdot b_2 + c_2 & = & 0{,}6\cdot 0{,}48 + 0{,}48 & = 0{,}768 \end{array}$$

Info

MMS verwenden

Um die Berechnungen mit einem MMS durchzuführen, schreibt man zunächst die Koeffizienten aus Fig. 2 in eine Tabelle, die man **Übergangsmatrix** U nennt. Die Zustandsverteilung nach k Schritten wird als Vektor v_k dargestellt. Die Berechnung der Verteilung v_{k+1} besorgt dann das MMS nach dem auf Seite 322 in Fig. 2 beschriebenen Schema. Es wird als **Matrix-Multiplikation** bezeichnet. Damit berechnet das MMS schnell die weiteren Verteilungen. Die angegebene Rechenvorschrift ermöglicht zudem die direkte Berechnung von Verteilungen mithilfe von Potenzen der Matrix U.

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix},\quad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = U\cdot v_0 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = U\cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}48 \\ 0{,}48 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = U^3\cdot v_0 = \begin{pmatrix} 0{,}008 \\ 0{,}224 \\ 0{,}768 \end{pmatrix}$$

Lücken in den Gleichungen werden bei der Matrix durch Nullen aufgefüllt.

Bei den Vektoren werden die Pfeile weggelassen, weil sie keine geometrischen Objekte sind.

Weitere Zustandsverteilungen sind: $v_3 = \begin{pmatrix} 0{,}008 \\ 0{,}224 \\ 0{,}768 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0{,}0016 \\ 0{,}096 \\ 0{,}9024 \end{pmatrix}$ und $v_5 = \begin{pmatrix} 0{,}0032 \\ 0{,}03968 \\ 0{,}96 \end{pmatrix}$

Man erkennt, dass sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jonathan sich in Level 3 befindet, mit der Zeit dem Wert 1 nähert. Die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Level gehen gegen null, erreichen null aber nie: Das Spiel kann beliebig lange dauern.

4 **Ein Prozess ohne Endzustand**

Die Kunden zweier Kinos A und B wechseln wie folgt von Besuch zu Besuch:
70 % der Besucher von A kommen beim nächsten Mal wieder, die übrigen gehen ins Kino B.
60 % der Besucher von B kommen beim nächsten Mal wieder, die übrigen gehen ins Kino A.

a) Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm für diesen stochastischen Prozess.

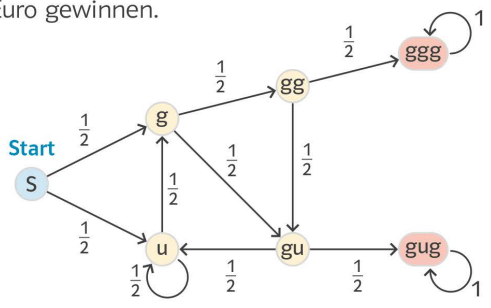
b) In den Kinos A und B sind gerade gleich viele Besucher. Wie verteilen sich diese Besucher beim nächsten Mal bzw. nach fünfmaligem Wechsel auf beide Kinos?

c) Erläutern Sie, welche Aspekte der Modellierung des Verhaltens von Kinokunden durch obigen stochastischen Prozess Ihnen unrealistisch erscheinen.

5 **Prozesse mit zwei Endzuständen**

a) Sie besitzen gerade nur einen Euro, brauchen aber schnell 3 Euro. Ein Freund bietet Ihnen folgendes Spiel an: „Du setzt deinen Euro. Dann werfen wir eine Münze. Fällt „Wappen", verlierst du den Euro. Andernfalls erhältst du von mir einen Euro hinzu und wir spielen weiter wie am Anfang. Das Spiel endet, wenn du pleite bist oder 3 Euro besitzt."
(1) Führen Sie das „Spiel" zehnmal mit einer Partnerin oder einem Partner durch.
(2) Zeichnen Sie ein Prozessdiagramm für diesen stochastischen Prozess.
(3) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie 3 Euro gewinnen.
(4) Bestimmen Sie so viele Zustandsverteilungen, dass Sie eine gute Näherung der Wahr scheinlichkeit angeben können, dass Sie 3 Euro gewinnen.

b) Bei einem Würfelspiel wird so lange gewürfelt, bis drei gerade Zahlen nacheinander fallen, dann gewinnt Spieler 1; oder bis nacheinander „gerade-ungerade-gerade" fällt, dann gewinnt Spieler 2. Die Abbildung zeigt ein Prozessdiagramm dazu.
Untersuchen Sie, ob es sich um ein faires Spiel handelt.



IX Binomialverteilung

Münzen sollen kein Gedächtnis haben. Nun gut, warum auch? Aber wie schaffen sie es dann, dass bei 1000 Münzwürfen rund 500-mal Wappen fällt?

Das können Sie bald

- Bernoulli-Versuche von anderen Zufallsexperimenten abgrenzen
- die Kenngrößen zum Skizzieren von Binomialverteilungen nutzen
- mit der Binomialverteilung Probleme lösen

Check-in

Schätzen Sie sich ein:

	☺	😐	☹
1. Ich kann den Mittelwert, die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung einer Häufigkeitsverteilung berechnen.	☐	☐	☐
2. Ich kann die Pfad- und Summenregel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten nutzen.	☐	☐	☐
3. Ich kann entscheiden, ob zwei Ereignisse stochastisch voneinander unabhängig sind.	☐	☐	☐
4. Ich kann die Kenngrößen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnen.	☐	☐	☐
5. Ich kann Realsituationen durch Zufallsexperimente simulieren bzw. modellieren.	☐	☐	☐

Lerntipps

zu 1. **Beispiele**, Seite 307
zu 2. **Merkkasten**, Seite 289
zu 3. **Beispiel 2**, Seite 298
zu 4. **Merkkasten**, Seite 311
zu 5. **Beispiel 1**, Seite 302

Test

Lösungen, Seite 520

1 **Kenngrößen einer Häufigkeitsverteilung berechnen**

Bei einer Klassenarbeit ergab sich nebenstehende Häufigkeitsverteilung der Noten. Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert, die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung der Verteilung.

Note	Häufigkeit
1	3
2	5
3	11
4	6
5	2
6	0

2 **Pfad- und Summenregel anwenden**

Ein Würfel wird zweimal geworfen und die gefallenen Augenzahlen werden notiert.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_1: „Es wird beides Mal die gleiche Zahl gewürfelt."
E_2: „Die zweite Zahl ist kleiner als die erste Zahl."
E_3: „Die Summe der beiden Zahlen ist 6."
$E_4 = E_2 \cap E_3$
$E_5 = E_1 \cap E_3$
E_6: Gegenereignis von E_2

3 **Unabhängigkeit von Ereignissen bestimmen**

Untersuchen Sie, ob in Aufgabe 2 die Ereignisse E_1 und E_2 jeweils von dem Ereignis F: „Die erste Zahl ist eine 6." stochastisch unabhängig sind.

4 **Kenngrößen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnen**

Bei einer Sicherheitsüberprüfung werden Punktzahlen X von 0 bis 5 mit den rechts tabellierten Wahrscheinlichkeiten erreicht.

i	0	1	2	3	4	5
P(X = i)	5 %	8 %	27 %	20 %	30 %	10 %

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße X.

5 **Realsituationen simulieren und modellieren**

Ede Langfinger besitzt 6 gleich aussehende Schlüssel, von denen genau einer in ein Türschloss passt. Er probiert nacheinander und legt die schon benutzten Schlüssel zur Seite.

a) Anne vergleicht dies mit dem Ziehen von Kugeln aus einem Beutel. Wie muss der Beutel gefüllt werden? Zieht man mit oder ohne Zurücklegen?
b) Franka meint, die Wahrscheinlichkeit, den richtigen Schlüssel beim dritten Versuch zu erwischen, sei am größten. Prüfen Sie rechnerisch und experimentell.

D27 Check-in

Multiple Choice-Tests – Baumdiagramme

Lerneinheit 3
Seite 335

Da sich eine neue Show durch „Bildungsniveau“ auszeichnen soll, müssen sich die Kandidaten vorab über die Beantwortung eines Fragebogens mit Fragen der folgenden Art qualifizieren. Dabei stimmt jeweils genau eine der vier Antwort-Alternativen.

1. Wer legte 1954 den Grundstein für den Restaurant-Konzern McDonalds?

A	Ronald McDonald	B	Rick van Mac
C	Ray Kroc	D	Archie Macmillan

2. Welcher Stoff bringt ein Glühwürmchen zum Leuchten?

A	Methan	B	Luziferin
C	Osmarol	D	Glyzerin

3. In welchem Land erschienen 1840 die ersten Briefmarken der Welt?

A	Deutschland	B	Spanien
C	Frankreich	D	Großbritannien

4. Wer ist die Zwillingsschwester des Apollon?

A	Artemis	B	Aphrodite
C	Alkmene	D	Leto

5. Welcher Philosoph sagte: „Das Schicksal mischt die Karten und wir spielen.“?

A	Platon	B	Descartes
C	Sartre	D	Schopenhauer

1. Spekulieren

Nur Kandidaten, die mindestens vier der fünf Fragen richtig beantworten, kommen in die nähere Auswahl. Schätzen Sie spontan (rein nach Bauchgefühl) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies einem Kandidaten gelingt,

a) der *absolut keine Ahnung* hat, folglich bei jeder der 5 Fragen blind raten muss, also „rein zufällig“ die richtige Antwort mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{4}$ erwischt,

b) der *ein bisschen Ahnung* hat und bei jeder Frage die richtige Antwort mit $p = \frac{1}{3}$ bzw. $p = \frac{1}{2}$ erwischt.

2. Rechnen

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, die Sie in Auftrag 1 geschätzt haben, mit einem geeigneten fünfstufigen Baumdiagramm.

Tipp:
Arbeiten Sie mit einem verkürzten Baumdiagramm.

b) Max hat zur Beantwortung von Auftrag 1 Säulendiagramme mit einem MMS zeichnen lassen. Fassen Sie die Aussagen, die Sie den Diagrammen entnehmen können, in Worte. Vergleichen Sie mit Ihren Rechenergebnissen aus Teilaufgabe a).

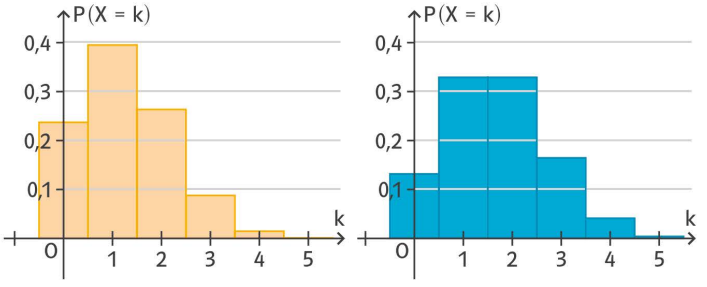


Fig. 1

c) Erstellen Sie selbst solche Diagramme auch für andere Werte von p und auch für Tests mit mehr als $n = 5$ Fragen. Formulieren Sie Vermutungen darüber, an welcher Stelle die höchsten Säulen stehen.

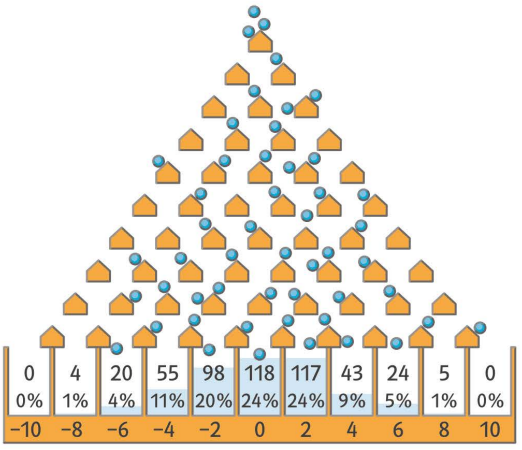
3. Experimentieren

Erstellen Sie Tests mit 5 Fragen (zu einem selbst gewählten Themenbereich), die Sie Ihrem Kurs oder anderen Lerngruppen vorlegen. Vergleichen Sie die erzielten relativen Häufigkeiten richtiger Antworten mit den Wahrscheinlichkeiten aus Fig. 1.

Das Zufallsbrett

Lerneinheit 5
Seite 343

Die Abbildung zeigt ein Zufallsbrett, das Ähnlichkeit mit einem Flipperautomaten hat. Kugeln fallen von der Position 0 ganz oben durch ein Gitter aus 10 Hindernisreihen. Bei jedem Hindernis werden die Kugeln mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ um eine Einheit nach rechts oder nach links abgelenkt. So landet eine Kugel nach dem ersten Hindernis entweder auf der Stelle −1 oder +1, nach dem zweiten Hindernis auf −2, 0 oder +2 und nach 10 Hindernissen auf einer geradzahligen Position zwischen −10 und +10. Sollte sie auf ihrem Weg fünfmal nach rechts und fünfmal nach links gesprungen sein, landet die Kugel bei 0.



Das Zufallsbrett wird häufig auch „Galton-Brett" genannt.
Sir Francis **Galton** (1822 – 1911) war ein britischer Naturforscher.

1. Prüfen Sie mit der Simulation des Zufallsbrettes ob jede Kugel genauso springt wie beschrieben. Lassen Sie mehrmals hintereinander 100 Kugeln durch das Brett fallen und notieren Sie die relativen Häufigkeiten der Endpositionen.

I17 **interaktive Anwendung** Zufallsbrett

2. Max bestimmt die Wahrscheinlichkeiten der Endpositionen $-10, -8, -6, \ldots, +10$ dadurch, dass er in Gedanken $2^{10} = 1024$ Kugeln durch das Brett fallen lässt und in einer Tabelle Zeile für Zeile berechnet, wie viele Kugeln „theoretisch" an den einzelnen Positionen vorbeikommen müssten. Erläutern Sie unter Rückgriff auf die Kalkulationstabelle, was sich Max denkt, und führen Sie die Tabelle (händisch oder digital) bis zur 10. Zeile fort.

−3	−2	−1	0	1	2	3
			1024			
		512	0	512		
	256	0	512	0	256	
128	0	384	0	384	0	128

3. Notieren Sie die Wahrscheinlichkeiten, die sich nach der Idee von Max in der letzten Zeile ergeben und vergleichen Sie mit den relativen Häufigkeiten aus Auftrag 1.

Das Zufallsbrett und Ihre Ohren

Unter den „Medien zum Schulbuch" finden Sie Takte eines Musikstücks in einer hohen „H" (High = 256 $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$) und einer weniger guten „L" (Low = 64 $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$) mp3-Qualität. Im Folgenden untersuchen Sie, wie gut Sie den Unterschied zwischen den Qualitätsstufen heraushören.

A1 **Audio** Musikstück

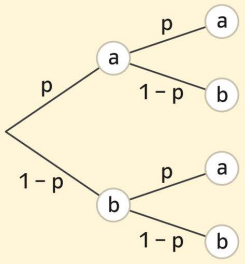
4. Ein Versuchsleiter spielt nacheinander 10 Hörproben vor, deren Qualitätsstufe (H oder L) zufällig durch Münzwurf bestimmt wurde. Jeder notiert seine vermutete Qualitätsstufe. Anschließend werden die vermuteten mit den tatsächlichen Qualitätsstufen verglichen. Für jeden Treffer gibt es einen Pluspunkt (+1), für jeden Fehltreffer einen Minuspunkt (−1). Am Ende zählt die Punktsumme X, die man als Zufallsgröße deuten kann.
Erläutern Sie, was dieser Hörtest mit dem Zufallsbrett zu tun hat und vergleichen Sie die relativen Häufigkeiten der von Ihrer Lerngruppe erreichten Punktzahlen X mit der in Auftrag 3 berechneten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

5. Als Nullhörer bezeichnet man eine Person, die zwischen den Qualitätsstufen nicht unterscheiden kann, also jeweils nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % trifft. Bestimmen Sie für einen Nullhörer den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.

6. Personen mit $X > \mu + 2\sigma$ Punkten gelten als „Experten".
Ermitteln Sie, wie viele „Experten" Sie in Ihrer Lerngruppe erwarten würden, wenn Sie alle Nullhörer wären. Vergleichen Sie mit der Anzahl der „Experten" in Ihrer Lerngruppe.

1 Bernoulli-Experimente, Binomialverteilung

Beschreiben Sie zu jedem der Zufallsgeräte ein Zufallsexperiment, für das man mit dem Baumdiagramm rechts die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse bestimmen kann.



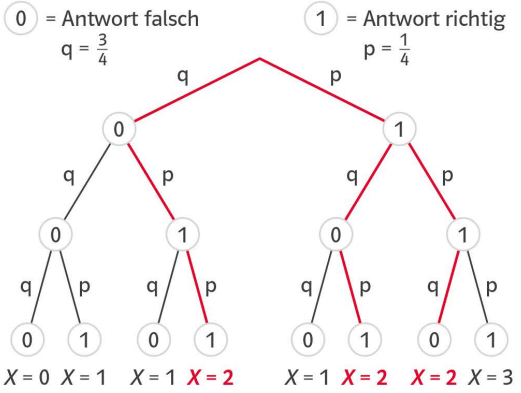
Die Binomialverteilung ist ein Modell, das viele Zufallsvorgänge gut beschreibt. Unter welchen Voraussetzungen man sie verwendet und wie man mit ihr arbeitet, wird im Folgenden erläutert.

Wenn bei einem Zufallsexperiment nur zwei Ergebnisse wie Erfolg bzw. Treffer (kurz 1) oder Misserfolg bzw. Niete (kurz 0) interessieren, spricht man von einem **Bernoulli-Experiment**. Wenn man ein Bernoulli-Experiment n-mal so wiederholt, dass die Durchführungen voneinander unabhängig sind, spricht man von einer **Bernoulli-Kette** der Länge n. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Erfolge. Sie kann die Werte $k = 0, \ldots, n$ annehmen.
Wie man die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten berechnet, wird an einem Beispiel erläutert.

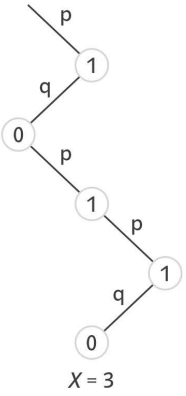
Ein Multiple-Choice-Test enthält drei Fragen mit jeweils vier Antworten, von denen nur eine richtig ist. Wenn ein Kandidat rein zufällig eine Antwort ankreuzt, liegt eine Bernoulli-Kette der Länge 3 vor. Ist die Antwort richtig, gilt das als Erfolg bzw. 1, sonst als Misserfolg bzw. 0. Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg ist konstant, sie beträgt $p = \frac{1}{4}$, für einen Misserfolg $q = 1 - p = \frac{3}{4}$.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man z. B. $k = 2$ Treffer erreicht, berechnet man mit der Pfadregel so:

$$P(X = 2) = 3 \cdot p^2 \cdot q = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64},$$

da zum Ereignis „zwei Treffer“ drei Pfade gehören, deren Wahrscheinlichkeit jeweils $p^2 \cdot q$ beträgt. Die Anzahl der Pfade mit zwei Treffern bei drei Durchführungen bezeichnet man mit $\binom{3}{2}$, lies „3 über 2“. Diese Pfade sind in der Abbildung rot markiert.
Es gilt $\binom{3}{2} = 3$.
Wenn der Test n Fragen enthält, betrachtet man zunächst einen Pfad mit k Treffern.
Jeder Pfad mit k Treffern hat die gleiche Wahrscheinlichkeit $p^k q^{n-k}$. Somit gilt
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Dabei bezeichnet $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Pfade mit k Treffern. $\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient** „n über k“.
Da es zu 0 und zu n Treffern jeweils nur einen Pfad gibt, ist $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.



k	0	1	2	3
Zahl der Pfade	$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$
$P(X = k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$



Die Werte von $\binom{n}{k}$ lassen sich auch ohne das Abzählen von Pfaden in Bäumen durch Formeln berechnen (siehe Seite 329).
Auch für die Berechnung von $B_{n;\,p}(k)$ gibt es elektronische Rechenhilfsmittel.

Die zu einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p gehörende Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnet man als **Binomialverteilung** $B_{n;\,p}$. Man schreibt
$P(X = k) = B_{n;\,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
Der letzten Zeile der Abbildung entnimmt man die Werte der Binomialverteilung $B_{3;\,\frac{1}{4}}$.

Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

Eine **Bernoulli-Kette** der Länge n besteht aus n unabhängigen **Bernoulli-Experimenten** mit den Ergebnissen 1 („Erfolg", „Treffer") und 0 („Misserfolg", „Niete").

Beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer und ist p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, so erhält man die Wahrscheinlichkeit für k Treffer mithilfe der Bernoulli-Formel:

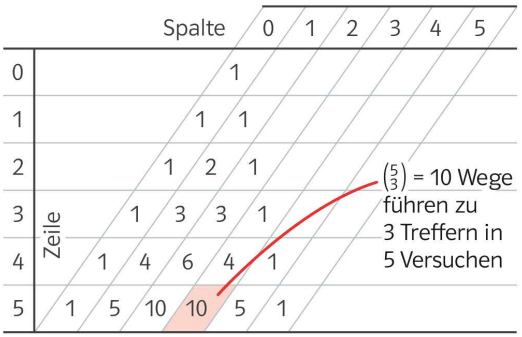
$P(X = k) = B_{n;\,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad 0 \le k \le n$

Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **Binomialverteilung**. Die Zufallsgröße X heißt dann binomialverteilt mit den Parametern n und p oder kurz $B_{n;\,p}$-verteilt.

Man kann Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$, z. B. $\binom{5}{3}$, auf verschiedene Weisen berechnen:

- mit digitalen Rechenhilfsmitteln
- mit dem Pascal-Dreieck
- händisch: $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$

  Man multipliziert dabei im Nenner mit 1 beginnend k Faktoren aufsteigend, im Zähler mit n beginnend gleich viele Faktoren absteigend.



Pascal-Dreieck mit n = 5 Zeilen.

Auf einem Rechner nutzt man den Befehl nCr. Dabei steht nCr für „n Choose r".

D1 **MMS-Anleitung** Bernoulli-Formel und Binomial-Befehl

Beispiel 1 **Anzahl der Pfade mit dem Binomialkoeffizienten bestimmen**

Ein flacher Klemmbaustein wird viermal geworfen. Die Fußlage gilt als Treffer 1. Die Zufallsgröße X zählt die Treffer. Sie nimmt Werte zwischen 0 und 4 an.

a) Geben Sie alle Ergebnisse an, die zum Ergebnis X = 2 gehören.

b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie $\binom{4}{2}$ auf unterschiedlichen Wegen bestimmen.

c) Berechnen Sie $B_{4;\,0{,}4}(2)$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Lösung

a) Es gibt sechs Ergebnisse mit zwei Treffern: (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1)

b) Im Pascal-Dreieck steht in der vierten Zeile und der zweiten Spalte $\binom{4}{2} = 6$.

Das gleiche Ergebnis liefert die Formel $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

c) Wenn man annimmt, dass der Baustein mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 in Fußlage landet, dann gibt $B_{4;\,0{,}4}(2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^{4-2} = 6 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}36 = 0{,}3456$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass er bei vier Würfen genau zweimal in Fußlage (als „Treffer") landet.

Beispiel 2 **Bernoulli-Kette als Modell verwenden**

Murat hat 10 Würfe. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Treffer.

a) Formulieren Sie Annahmen, die man machen muss, wenn man die Situation durch eine Bernoulli-Kette beschreiben möchte.

b) Berechnen Sie unter der Annahme einer Trefferwahrscheinlichkeit von p = 0,9 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Murat höchstens einmal nicht trifft.

Lösung

a) Man muss annehmen: Murat trifft stets mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p und die vorherigen Ergebnisse beeinflussen das kommende nicht.

b) Wenn er höchstens einmal daneben wirft, hat Murat 9 oder 10 Treffer.

Man berechnet $\binom{10}{9} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots 9} = 10$, $\binom{10}{10} = 1$ und erhält

$P(X \ge 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = 10 \cdot 0{,}9^9 \cdot 0{,}1^1 + 1 \cdot 0{,}9^{10} \cdot 0{,}1^0 = 0{,}736.$

Aufgaben

1 Ordnen Sie die Kärtchen geeigneten Zahlen des Pascal-Dreiecks zu. Erklären Sie.

Lerntipp
Seite 329, Beispiel 1

$\binom{5}{2}$

(1,0,1,0,0), (0,1,0,1,0), (1,0,0,1,0), …

$\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{3}{0}$

Alle Pfade mit 3 Treffern wie z. B.
T → N → N → T → T → N

(X - - -)(- X - -)(- - X -)(- - - X)

Zeile \ Spalte	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

2 a) Berechnen Sie händisch und kontrollieren Sie mit einem Rechenhilfsmittel oder dem Pascal-Dreieck.

(1) $\binom{2}{1}$ (2) $\binom{2}{0}$ (3) $\binom{5}{1}$ (4) $\binom{5}{2}$ (5) $\binom{6}{2}$ (6) $\binom{6}{3}$ (7) $\binom{6}{4}$

b) Vergleichen Sie die Ergebnisse von (5), (6) und (7). Formulieren Sie eine „Beobachtung“, die Sie anschließend an einem anderen Beispiel prüfen.

3 a) Zeichnen Sie den vollständigen Baum für eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 3$.

b) Bestimmen Sie daran die Binomialkoeffizienten $\binom{3}{r}$ für $r = 0; 1; 2; 3$.

c) Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse am Pascal-Dreieck.

d) Notieren Sie die Binomialverteilung $B_{3;\frac{1}{3}}$ zu $n = 3$ und $p = \frac{1}{3}$ in Tabellenform.

4 **Wahr oder falsch?**

Beurteilen Sie, ob man folgende Experimente als Bernoulli-Ketten deuten kann. Geben Sie gegebenenfalls die Parameter n und p an.

a) Eine Münze wird zehnmal geworfen und es wird jeweils notiert, ob „Zahl“ erscheint.

b) Einem Beutel mit 10 roten und gelben Kugeln werden nacheinander 5 Kugeln entnommen. Es wird jeweils notiert, ob die Kugel gelb war.

c) Ein Würfel wird siebenmal geworfen und es wird jeweils die Augenzahl notiert.

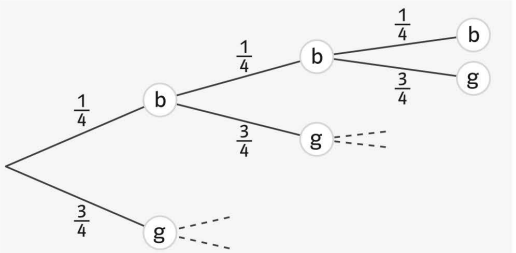
d) Ein Würfel wird siebenmal geworfen und es wird notiert, ob „Drei“ erscheint.

5 Das Glücksrad in Fig. 1 wird dreimal gedreht. „Blau“ gilt als Treffer.

a) Begründen Sie, dass es sich dabei um eine Bernoulli-Kette handelt. Geben Sie ihre Länge sowie die Trefferwahrscheinlichkeit an.

b) Vervollständigen Sie das Baumdiagramm.

c) Geben Sie alle Ergebnisse an, die zu den folgenden Ereignissen gehören, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten.
A: „Dreimal Blau.“
C: „Genau einmal Blau.“



B: „Zuerst nicht Blau, dann zweimal Blau.“
D: „Mindestens einmal Blau.“

Lerntipp
Seite 329, Beispiel 2

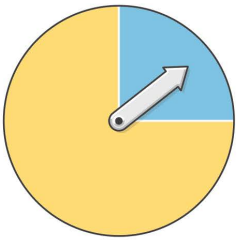


Fig. 1

6 Bei einer verbeulten Münze ist die Wahrscheinlichkeit für „Zahl“ 0,4. Sie wird dreimal geworfen und es wird jedes Mal notiert, ob „Zahl“ erscheint.

a) Begründen Sie, dass es sich dabei um eine Bernoulli-Kette handelt, und geben Sie ihre Länge sowie die Trefferwahrscheinlichkeit an. Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einmal „Zahl“ erscheint.

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 520

○ **7** Aus einer Urne mit sechs roten und vier schwarzen Kugeln wird dreimal mit Zurücklegen gezogen. Es wird jedes Mal notiert, ob eine rote Kugel gezogen wurde.

a) Begründen Sie, dass es sich dabei um eine Bernoulli-Kette handelt, und geben Sie ihre Länge sowie die Trefferwahrscheinlichkeit an. Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse.

E: „Dreimal rot."
F: „Zuerst zweimal schwarz, dann rot."
G: „Mindestens einmal rot."
H: „Genau zweimal rot."

◒ **8** Die Wahrscheinlichkeitsverteilung gehört zu einer binomialverteilten Zufallsgröße X.

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	0,0156	0,0938	0,2344	0,3125	0,2344	0,0938	0,0156

a) Lesen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse (1) $X < 3$, (2) $X = 3$ und (3) $X > 3$ ab.

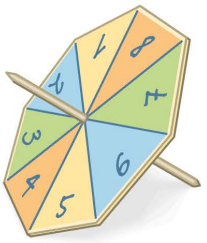
b) Zeigen Sie durch eine Kontrollrechnung, dass $P(X = 2) = B_{6;\frac{1}{2}}(2)$ gilt.

c) Geben Sie zwei Zufallsexperimente an, die sich durch die angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreiben lassen.

◒ **9** Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zweimal „3" fällt, wenn man den Kreisel fünfmal dreht.

a) Begründen Sie, welche Formel die Antwort liefert.

b) Formulieren Sie Fragen, die die anderen Formeln beantworten.



→ **Lerntipp**
Seite 329, Beispiel 2

A $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2$

B $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3$

C $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2$

D $P(X = 2) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3$

◒ **10** In einer Urne befinden sich sechs grüne und zwei blaue Kugeln. Formulieren Sie ein Zufallsexperiment und ein Ereignis, das mit der angegebenen Wahrscheinlichkeit eintritt.

a) $P(A) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$ **b)** $P(B) = \left(\frac{3}{4}\right)^5$ **c)** $P(D) = 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^5$

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 521

◒ **11** Lea und Tim treffen beim Elfmeterschießen zu 85 % bzw. 75 %. Worauf würden Sie eher wetten?

A: „Lea trifft bei zehn Versuchen mindestens neunmal."
B: „Tim trifft bei sieben Versuchen fünf- oder sechsmal."

● **12** **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Ein Binomialkoeffizient wie $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ist als Bruch nicht immer ganzzahlig.

b) In jeder Zeile des Pascal-Dreiecks findet man Gleichheiten der Form $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$.

c) Es gibt keinen Binomialkoeffizienten mit dem Wert 0, aber viele mit dem Wert 1.

Grundwissen Test — Ableiten mit und ohne Produktregel

→ **Grundwissen**, Seite 414
Merkkasten, Seite 147
Lösungen, Seite 521

G **13** Bestimmen Sie die Ableitung einmal mit und einmal ohne Produktregel.

a) $f(x) = x^7 = x^2 x^5$ **b)** $g(x) = x = \sqrt{x}\sqrt{x}$ **c)** $h(x) = 1 = x \cdot \frac{1}{x}$

2 Binomialkoeffizienten

Paco, Benjamin, Devina, Emil, Lina und Alessia spielen Fußball.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei gleich große Mannschaften zu bilden?
Notieren Sie alle Möglichkeiten.

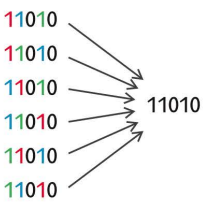
Für die Berechnung von Binomialverteilungen braucht man Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.
Sie geben an, wie viele Pfade in einem Baumdiagramm mit n Stufen zu k Treffern gehören.
Im Folgenden wird eine Formel zu ihrer Berechnung begründet und auch, warum man die Binomialkoeffizienten im Pascal-Dreieck wiederfindet.

Bei langen Bernoulli-Ketten wird das zugehörige Baumdiagramm sehr groß. Bei einer Bernoulli-Kette der Länge 5 gibt es $2^5 = 32$ Pfade. Wenn man systematisch alle Pfade notiert, die zum Ereignis „3 Treffer“ gehören, erhält man (1,1,1,0,0), (1,1,0,1,0), (1,1,0,0,1), (1,0,1,1,0), (1,0,1,0,1), (1,0,0,1,1), (0,1,1,1,0), (0,1,1,0,1), (0,1,0,1,1), (0,0,1,1,1), das sind 10 Pfade. Somit gilt $\binom{5}{3} = 10$.

An diesem Beispiel soll die auf Seite 326 mitgeteilte Formel begründet werden, mit der man diese Anzahl berechnen kann, ohne alle Pfade aufzuschreiben und abzuzählen. Man muss dazu die Möglichkeiten zählen, die es gibt, um drei Einsen („Treffer“) auf die fünf Plätze („Versuche“) zu verteilen.

1. Schritt
Um die Einsen unterscheiden zu können, werden sie (in Gedanken) rot, blau und grün gefärbt. Für die rote 1 hat man 5 mögliche Plätze. Bei jeder dieser Wahlen hat man für die blaue 1 noch 4 mögliche Plätze. Bei jeder dieser Wahlen bleiben für die grüne 1 noch 3 mögliche Plätze. Somit ergeben sich $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ mögliche Verteilungen, wenn man die Farben der Einsen berücksichtigt.

2. Schritt
Für die Anzahl der möglichen Ergebnisse sind die Farben jedoch irrelevant. Zum Beispiel ist (1,1,0,1,0) und (1,1,0,1,0) dasselbe Ergebnis. Da man drei Farben auf drei Einsen auf $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ verschiedene Arten verteilen kann, werden je sechs Ergebnisse nicht unterschieden.



Von den 60 möglichen Ergebnissen mit gefärbten Einsen fallen ohne Färbung also jeweils 6 zusammen. Damit erhält man $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{60}{6} = 10$ verschiedene Ergebnisse mit drei Einsen verteilt auf fünf Plätze.

Wenn k Einsen auf die n Plätze der durchgeführten Versuche verteilt werden, gibt es analog zu oben $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten, falls man die Einsen einfärbt. Davon fallen ohne Färbung jeweils $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1$ zusammen.

Also gibt es $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1}$ verschiedene Möglichkeiten, k Einsen auf n Plätze zu verteilen.

Für das Produkt $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1$ schreibt man auch k! (lies: „**k Fakultät**“).
Damit lässt sich die obige Formel durch Erweitern mit $(n-k)!$ umschreiben:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k-1) \cdot 1 \cdot (n-k) \cdot \ldots \cdot k \cdot (k-1)} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Binomialkoeffizient

Das Baumdiagramm einer Bernoulli-Kette der Länge n enthält $\binom{n}{k}$ Pfade mit k Treffern.

$\binom{n}{k}$ beschreibt auch die Anzahl der Möglichkeiten, wie man k Einsen auf n Plätze verteilen kann.

Es gilt $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

$\binom{n}{k}$ beschreibt auch die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Objekten k auszuwählen.

Beispiel **Binomialkoeffizienten berechnen**

a) Bestimmen Sie $\binom{4}{2}$ durch Notieren aller Möglichkeiten für zwei Treffer in vier Versuchen.

b) Berechnen Sie $\binom{8}{5}$ mithilfe der Formel, kontrollieren Sie mit einem digitalen Hilfsmittel.

Lösung

a) Es gibt folgende Möglichkeiten: (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,0,1) und (0,0,1,1).

Also ist $\binom{4}{2} = 6$.

b) $\binom{8}{5} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{8\cdot7\cdot6}{2\cdot3} = 8\cdot7 = 56$

Mit einem digitalen Hilfsmittel verwendet man den Befehl nCr(8,5).

Aufgaben

○ **1** Bestimmen Sie den Wert des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ durch Angabe aller Möglichkeiten, bei n Versuchen k Treffer zu erhalten.

a) $\binom{3}{1}$ b) $\binom{3}{2}$ c) $\binom{4}{3}$ d) $\binom{2}{2}$ e) $\binom{2}{0}$ f) $\binom{5}{4}$

→ **Lerntipp** Seite 333, Beispiel

○ **2** Berechnen Sie mithilfe einer der Formeln und kontrollieren Sie mit einem digitalen Hilfsmittel.

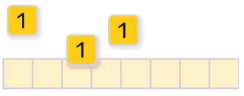
a) $\binom{5}{2}$ b) $\binom{8}{4}$ c) $\binom{12}{1}$ d) $\binom{10}{3}$ e) $\binom{20}{2}$ f) $\binom{15}{14}$

→ **Lerntipp** Seite 333, Beispiel

○ **3** Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, in der Figur rechts

a) drei Einsen, b) fünf Einsen, c) sieben Einsen

auf die Kästchen zu verteilen.



○ **4** Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten,

a) aus den Zahlen 1, 2 und 3 zwei auszuwählen,

b) aus vier Assen (Kreuz, Pik, Herz und Karo) zwei auszuwählen,

c) aus den Getränken Cola, Limonade, Mineralwasser und Orangensaft drei auszuwählen.

○ **5** Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten,

a) aus 28 Schülerinnen und Schülern einer Klasse zwei zum Tafelputzen zu bestimmen,

b) aus 20 Eissorten drei auszuwählen,

c) aus 32 Karten eines Kartenspiels zufällig vier zu ziehen.

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 521

○ **6** Berechnen Sie $\binom{6}{4}$ mit einer der Formeln und $\binom{15}{8}$ mit einem digitalen Hilfsmittel.

○ **7** Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, ohne Beachtung der Reihenfolge, aus 30 Parfüm-Düften

a) genau vier auszuwählen. **b)** genau 26 auszuwählen.

8 **Warum man definiert: 0! = 1**

a) Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$ und $\binom{5}{4}$ erst mit der Formel $(*)\ \binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}$ und dann mit der Formel $(**)\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{n!\cdot(n-k)!}$.

b) Begründen Sie mit einem Baumdiagramm, dass $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$ gelten muss.

c) Erläutern Sie, warum bei der Berechnung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$ die Formel (*) versagt, aber (**) immer noch sinnvoll ist, wenn man $0! = 1$ definiert.

9 **Verallgemeinerung der binomischen Formel**

Moriz hat in seiner Formelsammlung die Formel $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{(n-k)}$ entdeckt.

a) Hannah weiß: „Wenn man das Summenzeichen für $n = 4$ ausschreibt, bedeutet das $(a+b)^4 = 1a^0b^4 + 4a^1b^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b^1 + 1a^4b^0$“. Erläutern Sie, wie Hannah das Summenzeichen liest und was sie für $n = 5$ notieren würde.

b) Hylia behauptet: „Ich glaube, die Formel stimmt: Für $n = 2$ ergibt sich nämlich die erste binomische Formel!“ Prüfen Sie Hylias Aussage.

c) Multiplizieren Sie aus: $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ und prüfen Sie Hannahs Ergebnis aus Teilaufgabe a).

d) Max vermutet: „Wenn ich in Teilaufgabe c) ‚jedes mit jedem‘ multipliziere und dann alle Produkte der Form baaa suche, in denen dreimal der Faktor a und einmal b vorkommt, ist das so, als würde ich drei Einsen auf vier Plätze verteilen und das sind $\binom{4}{3} = 4$ Summanden. Damit habe ich die Formel von Moritz begründet.“ Erläutern Sie Max' Gedanken am Produkt abba.

Test 2

Lösungen, Seite 521

10 a) Mia kann von ihren zehn Freundinnen nur drei zu einer Bootstour mitnehmen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dies ihre Freundinnen Sarah, Chiara und Lucia sind, wenn Mia die Teilnehmerinnen auslost.

b) In einer Urne liegen n Kugeln, von denen $k \le n$ markiert sind. Sie dürfen (ohne Zurücklegen) k Kugeln ziehen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau die markierten erwischen. Kontrollieren Sie Ihre Formel für $k = 1$ und $k = n$.

11 **Warum das Pascal-Dreieck die Binomialkoeffizienten liefert**

a) Kontrollieren Sie die folgende Rechnung

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \frac{4\cdot3}{1\cdot2} + \frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3} = \frac{(4\cdot3)\cdot3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{(4\cdot3)\cdot2}{1\cdot2\cdot3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = \binom{5}{3}.$$

Begründen Sie damit auch

(1) $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$, (2) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$, (3) $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$.

b) Begründen Sie analog mithilfe von Platzhaltern $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

c) Erläutern Sie, warum die Formel in Teilaufgabe b) beweist, dass sich die Binomialkoeffizienten durch zeilenweises Fortführen des Pascal-Dreiecks (vgl. Seite 329) berechnen lassen.

Tipp:
Ersetzen Sie in der Formel $\binom{\upsilon}{\Delta} = \frac{\upsilon\cdot(\upsilon-1)\cdot(\upsilon-2)\cdot\ldots\cdot(\upsilon-\Delta+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot\Delta}$ den Platzhalter υ durch $n+1$ bzw. Δ durch $k-1$.

Grundwissen Test — Ableiten mit und ohne Kettenregel

Grundwissen, Seite 414
Merkkasten, Seite 151
Lösungen, Seite 521

G **12** Bestimmen Sie die Ableitung einmal mit und einmal ohne Kettenregel.

a) $f(x) = x^6 = (x^3)^2 = (x^2)^3$

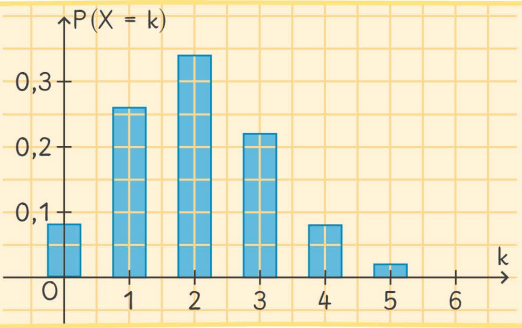
b) $g(x) = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{x}}$

c) $h(x) = x = e^{\ln(x)} = \ln(e^x)$

d) $i(x) = x^{\frac{3}{4}} = (x^3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$

3 Erwartungswert und Histogramme

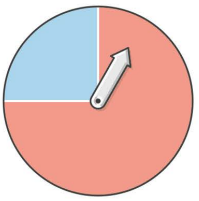
Hannah hat das Säulendiagramm einer Binomialverteilung $B_{n;\,p}$ gezeichnet. Welche Werte könnte sie für n und p verwendet haben? Begründen Sie Ihre Vermutung.
Prüfen Sie mithilfe geeigneter Kontrollrechnungen.



Den Erwartungswert einer Zufallsgröße X mit ganzzahligen Werten im Bereich von 0 bis n berechnet man nach der Formel $\mu = E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k)$. Wenn X binomialverteilt ist, erhält man ein einfaches und intuitiv einleuchtendes Ergebnis. Ein Beispiel soll das erläutern.

Erwartungswert
Das Glücksrad wird viermal gedreht. Die Zufallsgröße X zählt, wie oft dabei das rote Feld erscheint. Sie ist binomialverteilt. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten

$P(X = k) = B_{4;\,0{,}75}(k) = \binom{4}{k} 0{,}75^k \cdot 0{,}25^{4-k}$ für $0 \le k \le 4$ zeigt die Tabelle.



Den Erwartungswert berechnet man wie folgt:

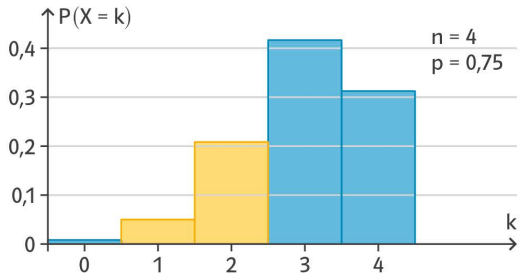
$\mu = E(X) = 0 \cdot p(X = 0) + \ldots + 4 \cdot p(X = 4)$

$= 0 \cdot \frac{1}{256} + 1 \cdot \frac{12}{256} + 2 \cdot \frac{54}{256} + 3 \cdot \frac{108}{256} + 4 \cdot \frac{81}{256} = 3$

Dieses Ergebnis ist auch ohne Rechnung plausibel: Man dreht das Glücksrad viermal. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer beträgt $\frac{3}{4}$. Damit erwartet man $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$ Treffer.

Binomialverteilung $B_{4;\,0{,}75}$ mit Histogramm

k	0	1	2	3	4
$P(X = k) = B_{4;\,0{,}75}(k)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{81}{256}$



Histogramm
Wahrscheinlichkeitsverteilungen veranschaulicht man durch **Säulendiagramme**, wobei die Wahrscheinlichkeiten den **Säulenhöhen** entsprechen. Wählt man die Säulenbreite 1, lassen sich Wahrscheinlichkeiten auch als **Flächen** deuten. Man spricht von einem **Histogramm**. Im abgebildeten Histogramm entspricht die Fläche zwischen 0,5 und 2,5 der Wahrscheinlichkeit $P(0{,}5 \le X \le 2{,}5) = P(1 \le X \le 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$.

Säulendiagramme mit sehr schmalen Säulen bezeichnet man als Stabdiagramme.

Ein MMS verfügt über Befehle zum Erstellen von Histogrammen und Säulendiagrammen.

Falls der Erwartungswert μ ganzzahlig ist, kann er auch als Trefferanzahl vorkommen. μ hat dann von allen möglichen Trefferanzahlen die höchste Wahrscheinlichkeit und die entsprechende Säule ist die höchste.
Falls μ nicht ganzzahlig ist, hat eine der beiden benachbarten Trefferanzahlen die maximale Wahrscheinlichkeit. Ist beispielsweise $\mu = 3{,}5$, so hat die Trefferanzahl 3 oder 4 die maximale Wahrscheinlichkeit (vgl. Seite 335, Beispiel), wobei auch beide gleich wahrscheinlich sein können.

Erwartungswert
Eine $B_{n;\,p}$-verteilte Zufallsgröße X hat den **Erwartungswert** $E(X) = \mu = n \cdot p$.
Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p erwartet man, dass die Trefferanzahl in der Nähe von $n \cdot p$ liegt.

Beweis für den Spezialfall n = 3:
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer $B_{3;\,p}$-verteilten Zufallsgröße X ist in der Tabelle dargestellt, wobei $q = 1 - p$ ist.

k	0	1	2	3
P(X = k)	q^3	$3 \cdot p \cdot q^2$	$3 \cdot p^2 \cdot q$	p^3

Dann ist $\mu = 0 \cdot q^3 + 1 \cdot 3 \cdot p \cdot q^2 + 2 \cdot 3 \cdot p^2 q + 3 \cdot p^3 = 3pq^2 + 6p^2q + 3p^3 = 3p \cdot (q^2 + 2pq + p^2)$.
Mit der ersten binomischen Formel kann man dies umformen zu $3p \cdot (q + p)^2$.
Da $q + p = 1$ ist, folgt $\mu = 3 \cdot p$.

Beispiel **Erwartungswert berechnen und Histogramm zeichnen**
Mira schießt fünfmal. Nehmen Sie an, dass sie – unabhängig vom Ergebnis des vorherigen – bei jedem Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % trifft.

a) Berechnen Sie in diesem Modell den Erwartungswert der Trefferanzahl X für eine 5er-Serie.
b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung an und zeichnen Sie das Histogramm.
c) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben a) und b) im Vergleich.

Lösung
Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Treffer zählt, ist $B_{5;\,0,7}$-verteilt.

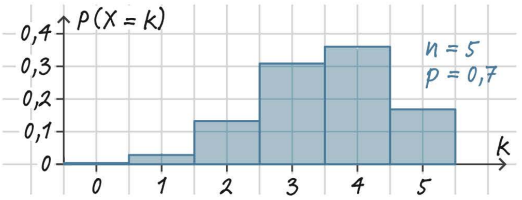
a) Der Erwartungswert beträgt $\mu = 5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$.

b) Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	0	1	2
$B_{5;\,0,7}(k)$	≈ 0,0024	≈ 0,0284	0,1323

k	3	4	5
$B_{5;\,0,7}(k)$	0,3087	≈ 0,3602	≈ 0,1681

Histogramm:



c) Der Erwartungswert 3,5 kommt als Trefferanzahl nicht vor, da er nicht ganzzahlig ist. Man kann in dem Modell pro Serie aber mit durchschnittlich 3,5 Treffern rechnen. Am wahrscheinlichsten sind in diesem Modell 3 oder 4 Treffer, wobei hier 4 Treffer ca. 5 % wahrscheinlicher sind als 3 Treffer.

D1 **MMS-Anleitung** Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße

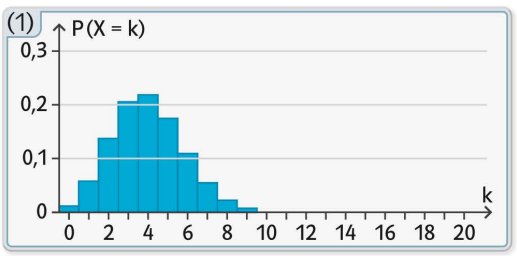
Die Werte können mit der interaktiven Anwendung überprüft werden.

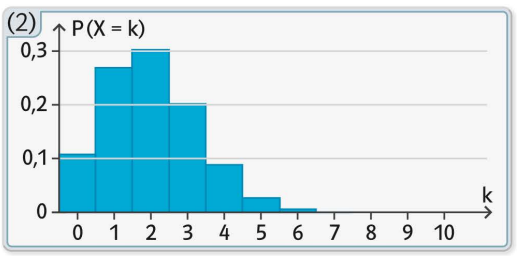
I31 **interaktive Anwendung** Binomialverteilungstool

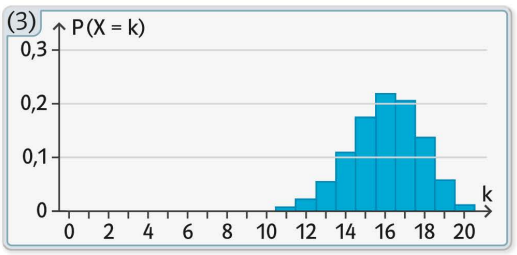
Aufgaben

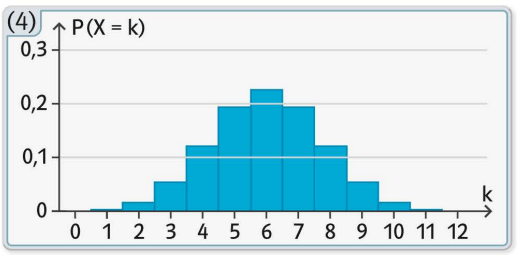
○ **1** Ordnen Sie jedem Histogramm die Parameter der zugehörigen Binomialverteilung zu.

A n = 10, p = 0,2 B n = 12, p = 0,25 C n = 20, p = 0,2
D n = 20, p = 0,8 E n = 10, p = 0,5 F n = 12, p = 0,5









2 a) Berechnen Sie den Erwartungswert μ der binomialverteilten Zufallsgröße X mit
(1) $n = 10,\ p = 0{,}2$ (2) $n = 20,\ p = 0{,}7$ (3) $n = 50,\ p = \frac{2}{5}$ (4) $n = 90,\ p = \frac{1}{6}$.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X genau den Erwartungswert annimmt.
c) Kontrollieren Sie mit einem digitalen Hilfsmittel, dass die Wahrscheinlichkeiten kleiner werden, wenn man von Erwartungswert μ um eins nach links $(\mu - 1)$ oder nach rechts $(\mu + 1)$ geht.

3 a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der binomialverteilten Zufallsgröße mit den Parametern n und p an und zeichnen Sie das Histogramm.
b) Berechnen Sie jeweils den Erwartungswert und geben Sie den Wert mit der größten und der zweitgrößten Wahrscheinlichkeit an.
(1) $n = 3,\ p = 0{,}4$ (2) $n = 3,\ p = 0{,}2$ (3) $n = 4,\ p = 0{,}7$ (4) $n = 4,\ p = \frac{1}{5}$

→ **Lerntipp** Seite 336, Beispiel

Tipp:
Diese Aufgabe kann man schnell mit einem MMS lösen.

4 Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Treffer. Berechnen Sie den Erwartungswert von X und interpretieren Sie das Ergebnis.
a) Eine Münze wird zehnmal geworfen. Treffer ist „Wappen".
b) Ein Würfel wird fünfmal geworfen. Treffer ist eine Sechs.
c) Ein Basketballspieler wirft drei Freiwürfe. Seine Trefferwahrscheinlichkeit beträgt 80 %.
d) Bei der Produktion von Bauteilen sind 4 % defekt. Treffer ist ein nicht defektes Teil. Es werden 100 Bauteile untersucht.

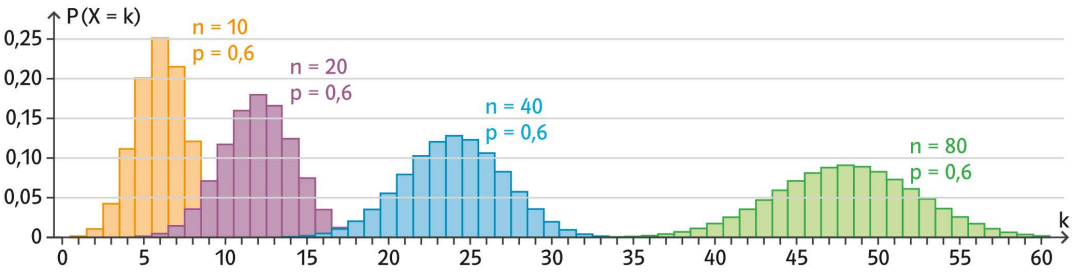
Test 1

→ **Lösungen**, Seite 521

5 Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der binomialverteilten Zufallsgröße mit den Parametern $n = 5$ und $p = \frac{1}{4}$ an und zeichnen Sie das Histogramm.

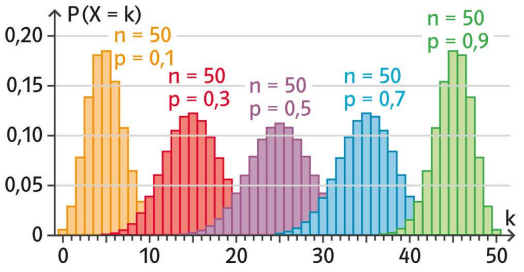
6 Ein Glücksrad hat drei gleich große Felder, die mit den Zahlen 1, 2 und 3 beschriftet sind. Es wird zehnmal gedreht. Die Zufallsgröße X zählt, wie oft die Zahl 3 erscheint.
Bestimmen Sie den Erwartungswert von X und interpretieren Sie das Ergebnis.

7 Die Abbildung zeigt Histogramme von Binomialverteilungen mit $p = 0{,}6$.
a) Beschreiben Sie, wie sich die Histogramme und die Lage der höchsten Säule mit wachsendem n ändern.
b) Erzeugen Sie selbst ein solches Diagramm mit einem MMS.

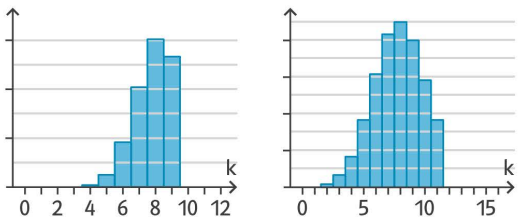


D1 **MMS-Anleitung** Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße

8 Die Abbildung zeigt Histogramme von Binomialverteilungen mit $n = 50$.
a) Beschreiben Sie, wie sich die Histogramme, insbesondere die Lage der höchsten Säule, mit wachsendem p verändert.
b) Erzeugen Sie ein solches Diagramm mit einem MMS.



9 Abgebildet sind unvollständige Histogramme zu Binomialverteilungen mit $n = 10$ bzw. $n = 20$ und ganzzahligem Erwartungswert. Bestimmen Sie den Wert des Parameters p, die Höhe der ersten nicht abgebildeten Säule und vervollständigen Sie die Zeichnungen inklusive Beschriftung der Hochachse.

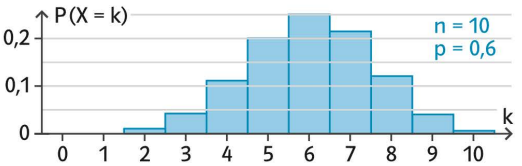


10 SP
a) Nina sagt: „Ich finde die Bezeichnung Erwartungswert bei $B_{n;\,p}$-verteilten Zufallsgrößen X missverständlich, weil $n \cdot p$ meist gar nicht vorkommen kann. Niemand erwartet dann das Auftreten dieses Werts". Erläutern Sie an einem Beispiel, was Nina sagen möchte.
b) Ilkay entgegnet: „Aber auch, wenn $n \cdot p$ als Versuchsergebnis auftreten kann, ist es fast doppelt so wahrscheinlich, dass man um eins danebenliegt, als dass man den Erwartungswert genau trifft." Prüfen Sie die Aussage am Beispiel des zehnfachen Münzwurfs.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 521

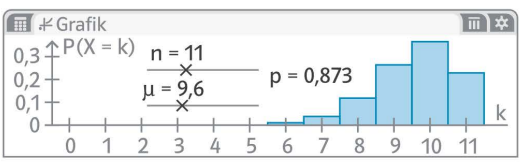
11 Gegeben ist das Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße X. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X
a) den Wert 5, **b)** einen Wert unter 5,
c) einen Wert über 5 annimmt.



12 **Wahr oder falsch?**
Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.
In einem Histogramm zu einer binomialverteilten Zufallsgröße mit dem Parameter n …
a) ist die Summe aller Flächeninhalte 1. **b)** sind alle Säulen unterschiedlich hoch.
c) können alle Säulen gleich hoch sein. **d)** hat keine Säule die Höhe 0.
e) ist die Summe der Flächeninhalte links und rechts von $\frac{n}{2}$ gleich groß.

13 Danil: „Wenn Du einen Würfel einmal wirfst, kann der Erwartungswert $\mu = 3{,}5$ nicht auftreten, wenn Du ihn zehnmal wirfst, aber schon. Nicht als Ergebnis, aber als Mittelwert."
a) Erläutern Sie an einem Zahlenbeispiel, was Danil mit seiner Erklärung meint.
b) Schätzen Sie mit einer Simulation die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die mittlere Punktsumme aus 10 Würfelversuchen dem Erwartungswert 3,5 gleicht.
c) Erläutern Sie, warum man die in Teilaufgabe b) geschätzte Wahrscheinlichkeit nicht mithilfe der Binomialverteilung bestimmen kann.

14 Simone zeichnet mit einem MMS Histogramme von Binomialverteilungen, wobei sie den Erwartungswert μ und die Versuchsanzahl n einstellen kann (die Trefferwahrscheinlichkeit p ergibt sich aus $p = \frac{\mu}{n}$).



Marie sagt: „Wenn n zu groß, also p zu klein wird, dann verlieren die Histogramme ihre Glockenform." Christine entgegnet: „Aber auch, wenn n zu klein und p zu groß wird."
Erstellen Sie eine Datei nach Simones Vorlage und bestätigen Sie die Aussagen.

I18 **interaktive Anwendung** Histogramme und Glockenform

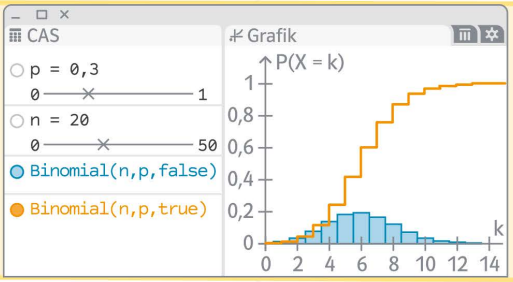
Grundwissen Test — Integralrechnung im Sachzusammenhang

→ **Beispiel 1**, Seite 53
Lösungen, Seite 522

G **15** Ein stehender Zug wird jede Sekunde $1\frac{m}{s}$ schneller. Berechnen Sie, welche Strecke er nach 20 Sekunden zurückgelegt hat – und nach wie vielen Sekunden er 1 km gefahren ist.

4 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten

Ein MMS kann neben Histogrammen von Binomialverteilungen auch Treppengraphen zeichnen.
- Finden Sie im nebenstehenden Bild Zusammenhänge und Fragen, die der Treppengraph beantwortet.
- Erzeugen Sie solche Graphen für verschiedene Werte von n und p.
- Notieren Sie Gemeinsamkeiten aller Treppengraphen. Beschreiben Sie, welchen Einfluss n und p haben.



Wenn man wissen möchte, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei einer Bernoulli-Kette die Trefferanzahl einen bestimmten Wert nicht überschreitet, nutzt man kumulierte Wahrscheinlichkeiten. Welche Fragen diese beantworten, wird im Folgenden erläutert.

D1 **MMS-Anleitung** kumulierte Binomialverteilung

Mit der Formel $B_{n;\,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ berechnet man bei Bernoulli-Ketten die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ für genau k Treffer in n Versuchen. Die Wahrscheinlichkeit für höchstens k Treffer erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten für 0 Treffer, 1 Treffer usw. bis k Treffer addiert: $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B_{n;\,p}(k)$. Für $k = 5$ bedeutet das z. B.:

$P(X \leq 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

Analog zu $P(X = k) = B_{n;\,p}(k)$ schreibt man hierfür $P(X \leq k) = F_{n;\,p}(k)$.

kumulieren: zusammenfassen, aufaddieren

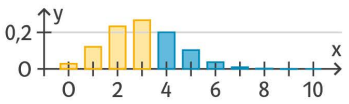
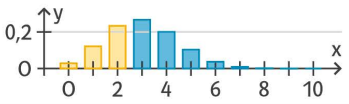
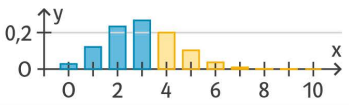
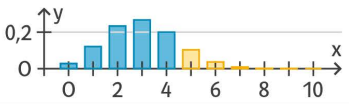
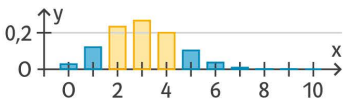
Kumulierte Wahrscheinlichkeiten

Wenn X binomialverteilt ist mit den Parametern n und p, dann bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k) = P(X = 0) + \ldots + P(X = k)$ als kumulierte Wahrscheinlichkeit.

Man schreibt $P(X \leq k) = F_{n;\,p}(k)$.

Mithilfe kumulierter Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq k) = F_{n;\,p}(k)$ lassen sich auch Wahrscheinlichkeiten der Form $P(X \geq r)$ und $P(l \leq X \leq r)$ berechnen.

Folgende Beispiele für $n = 10$ und $p = 0{,}3$ zeigen, wie man vorgeht.

höchstens 3 Treffer Die Anzahl der Treffer liegt im Intervall $[0; 3]$. $P(X \leq 3) = F_{10;\,0{,}3}(3)$	
weniger als 3 Treffer Die Anzahl der Treffer liegt im Intervall $[0; 2]$. $P(X < 3) = P(X \leq 2) = F_{10;\,0{,}3}(2)$	
mindestens 4 Treffer Die Anzahl der Treffer liegt im Intervall $[4; 10]$. $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_{10;\,0{,}3}(3)$	
mehr als 4 Treffer Die Anzahl der Treffer liegt im Intervall $[5; 10]$. $P(X > 4) = P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F_{10;\,0{,}3}(4)$	
mindestens 2 und höchstens 4 Treffer Die Anzahl der Treffer liegt im Intervall $[2; 4]$ $P(2 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 1)$ $= F_{10;\,0{,}3}(4) - F_{10;\,0{,}3}(1)$	

Diese und weitere Fälle können mit der interaktiven Anwendung dargestellt werden.

I31 **interaktive Anwendung** Binomialverteilungstool

Beispiel 1 **Mit kumulierten Wahrscheinlichkeiten arbeiten**

X ist eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0{,}4$.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit.

a) $P(X \leq 8)$ b) $P(X < 6)$ c) $P(X \geq 10)$ d) $P(8 \leq X \leq 12)$

Lösung

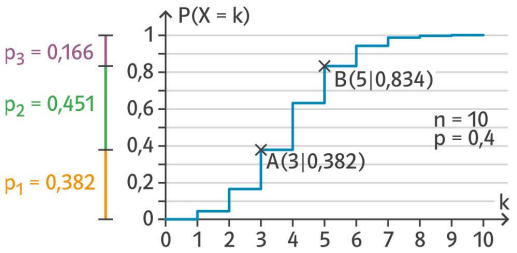
		formale Schreibweise mit $F_{n;\,p}$	mit Hilfsmittel berechneter Wert
a)	$P(X \leq 8)$	$= F_{20;\,0{,}4}(8)$	$\approx 0{,}596$
b)	$P(X < 6)$	$= P(X \leq 5) = F_{20;\,0{,}4}(5)$	$\approx 0{,}126$
c)	$P(X \geq 10)$	$= 1 - P(X \leq 9) = 1 - F_{20;\,0{,}4}(9)$	$\approx 1 - 0{,}755 = 0{,}245$
d)	$P(8 \leq X \leq 12)$	$= P(X \leq 12) - P(X \leq 7) = F_{20;\,0{,}4}(12) - F_{20;\,0{,}4}(7)$	$\approx 0{,}563$

Beispiel 2 **Kumulierte Wahrscheinlichkeiten grafisch darstellen**

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}4$. Der nebenstehende Graph veranschaulicht zu jedem x aus dem Intervall $[0; n]$ die Wahrscheinlichkeit $F_{n;\,p}(x) = P(X \leq x)$.

a) Kontrollieren Sie dies für $x = 3{,}5$.

b) Beschreiben Sie die als Streckenlängen dargestellten Wahrscheinlichkeiten p_2 und p_3 formal.



Lösung

a) Da X nur ganzzahlige Werte annimmt, gilt $P(X \leq 3{,}5) = P(X \leq 3) = P([0; 3])$
$= F_{10;\,0{,}4}(3) \approx 0{,}382$.
Der Graph ist für $3 \leq x < 4$ konstant.

b) Die Länge der grünen Strecke p_2 ist die Differenz der y-Koordinaten von A und B, also $P(X \leq 5) - P(X \leq 3) = P(4 \leq X \leq 5) = P([4; 5]) \approx 0{,}834 - 0{,}382 = 0{,}452$.
Die Länge der lila Strecke p_3 lässt sich deuten als $1 - P(X \leq 5) = P(X > 5) = P(X \geq 6)$.

D1 **MMS-Anleitung** kumulierte Binomialverteilung

Tipp:
Viele MMS können die zu Intervallen gehörenden Wahrscheinlichkeiten auch ohne Rückgriff auf $F_{n;\,p}$ bestimmen. Man gibt dann nur die linke und die rechte Intervallgrenze ein.

Aufgaben

○ **1** Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 10$. Das Ereignis „Mindestens 6 Treffer." kann man wie rechts gezeigt darstellen. Veranschaulichen Sie auf gleiche Weise das Ereignis.

$$P([6; 10]) = P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_{10;\,p}(5)$$

a) „Mindestens vier Treffer."
b) „Höchstens drei Treffer."
c) „Weniger als acht Treffer."
d) „Mehr als null Treffer."
e) „Mindestens drei und höchstens sieben Treffer."
f) „Mehr als fünf und weniger als zehn Treffer."

○ **2** Bestimmen Sie für die binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 25$ und $p = 0{,}2$ die Wahrscheinlichkeit.

a) $P(X \leq 3)$ b) $P(X \leq 6)$ c) $P(X = 7)$ d) $P(X \leq 4)$
e) $P(X = 5)$ f) $P(X \leq 9)$ g) $P(X = 9)$ h) $P(X \leq 1)$

→ **Lerntipp** Seite 340, Beispiel 1

○ **3** Bestimmen Sie für die binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern n und p die angegebene Wahrscheinlichkeit.

a) $n = 30$, $p = 0{,}3$, $P(X < 8)$
b) $n = 50$, $p = 0{,}5$, $P(X \leq 28)$
c) $n = 8$, $p = \frac{1}{5}$, $P(X < 3)$
d) $n = 14$, $p = \frac{5}{6}$, $P(X \leq 10)$
e) $n = 100$, $p = 0{,}9$, $P(X < 95)$
f) $n = 80$, $p = \frac{1}{3}$, $P(X < 30)$

Lösungen zu Aufgabe 3 (gerundet):

0,9424 0,1937 0,7969 0,8389 0,7514 0,2814

○ **4** Welche Kärtchen gehören zusammen?

„Höchstens fünf Treffer." A
$F_{n;\,p}(4)$ N
$P(X \leq 5)$ C
$F_{n;\,p}(6)$ M
$P(X \leq 4)$ B
„Weniger als fünf Treffer." D
„Weniger als sechs Treffer." E
„Nicht mehr als vier Treffer." G
$P(X < 6)$ H
$P(X < 5)$ F
$P(X \leq 6)$ K
„Höchstens sechs Treffer." I
„Nicht mehr als fünf Treffer." J
$P(X < 7)$ L

○ **5** Ordnen Sie die Kärtchen einander zu, die dieselbe Wahrscheinlichkeit beschreiben.

1 $P(X \geq 5)$
2 $P(3 \leq X \leq 8)$
3 $P(X < 4)$
4 $1 - P(X \leq 4)$
5 $P(X \leq 8) - P(X \leq 2)$
6 $P(X \leq 3)$
7 $P(3 \leq X < 9)$
8 $P(2 < X < 9)$
9 $P(0 \leq X < 4)$
10 $P(2 < X \leq 8)$

○ **6** Bestimmen Sie für die binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 15$ und $p = 0{,}3$ die Wahrscheinlichkeit.

a) $P(X \geq 6)$ b) $P(X \leq 3)$ c) $P(3 \leq X \leq 7)$ d) $P(4 < X \leq 10)$
e) $P(X < 6)$ f) $P(X \geq 3)$ g) $P(8 \leq X \leq 15)$ h) $P(5 \leq X < 10)$
i) $P(X < 9)$ j) $P(X > 1)$ k) $P(8 < X \leq 15)$ l) $P(7 < X < 12)$

○ **7** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis. Notieren Sie die zugehörigen Intervalle und wie man die Wahrscheinlichkeiten mit $F_{n;\,p}$ berechnet.
Etwa 20 % der Bevölkerung sind Linkshänder. In einer Schulklasse mit 28 Schülerinnen und Schülern sind …

a) genau sechs Linkshänder. b) höchstens fünf Linkshänder.
c) mindestens neun Linkshänder. d) mindestens zwölf Linkshänder.
e) mindestens fünf und höchstens zwölf Linkshänder.

→ **Lerntipp** Seite 340, Beispiel 1

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 522

○ **8** X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 12$ und $p = 0{,}6$. Notieren Sie die Ereignisse als Intervall und wie man die zugehörige Wahrscheinlichkeit mit $F_{n;\,p}$ berechnet.

a) höchstens 5 **b)** mindestens 8 **c)** unter 10 **d)** mindestens 4 und weniger als 8 Treffer

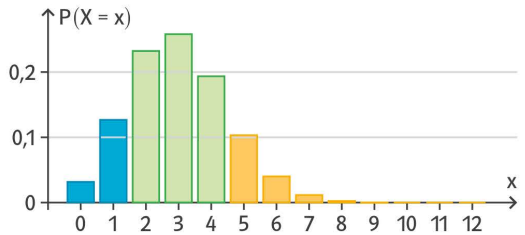
○ **9** Eine Münze wird 50-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass …

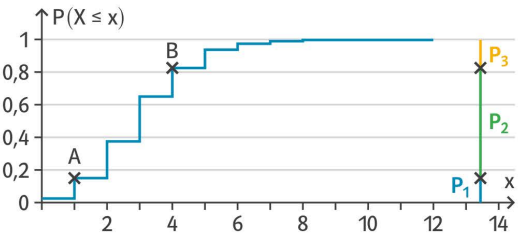
a) höchstens 20-mal „Zahl" fällt. **b)** mindestens 20-mal „Zahl" fällt.
c) weniger als 25-mal „Zahl" fällt. **d)** mehr als 30-mal „Zahl" fällt.

◒ **10** Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 12$ und $p = 0{,}25$.

a) Beschreiben Sie Zusammenhänge zwischen den beiden Graphen.
b) Notieren Sie mithilfe von $F_{12;\,0{,}25}$, wie Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse berechnen, die zu den unterschiedlichen Färbungen gehören.
Geben Sie die Ergebnisse näherungsweise mithilfe der Abbildungen an.

→ **Lerntipp** Seite 340, Beispiel 2





11 Die Ausschusswahrscheinlichkeit einer Schraubensorte beträgt 3 %. Berechnen Sie, welches der folgenden Ereignisse am wahrscheinlichsten ist.
A: „Es sind keine unbrauchbaren Schrauben in einer Dutzendpackung."
B: „Es ist wenigstens eine unbrauchbare Schraube in einer Zwanzigerpackung."
C: „Es ist mehr als eine unbrauchbare Schraube in einer Fünfzigerpackung."

12 Das Glücksrad wird achtmal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass …

a) mindestens dreimal „Gelb" erscheint. **b)** weniger als dreimal „Rot" erscheint. **c)** genau zweimal in Folge „Blau" erscheint.

13 Ein Knopf wird zehnmal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Vorderseite oben liegt, beträgt 0,4. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis.
a) höchstens dreimal „Vorderseite"
b) in den ersten drei Würfen „Vorderseite" und sonst „Rückseite"
c) nur im zweiten, im vierten und im achten Wurf „Vorderseite"
d) höchstens zweimal oder mindestens siebenmal „Vorderseite"
e) in den ersten drei Würfen jedes Mal „Vorderseite", insgesamt aber viermal „Rückseite"
f) genau dreimal in Folge „Vorderseite"

14 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**
Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.
a) $F_{n;\,p}(k+1) = F_{n;\,p}(k) + B_{n;\,p}(k+1)$ **b)** $F_{n;\,p}(n) = 1$
c) $F_{n;\,p}(0) = 0$ **d)** $F_{n;\,p}\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}$
e) Die höchste Treppenstufe des Graphen zu $F_{n;\,p}$ liegt an der Stelle $n \cdot p$.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 522

15 Ein Fußballspieler hat beim Elfmeterschießen eine Trefferquote von 75 %. Er schießt fünf Elfmeter. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Verwandeln von …
a) mindestens vier Elfmetern. **b)** genau zwei Elfmetern in Folge.
c) den ersten beiden Elfmetern und von den restlichen Elfmetern höchstens einen.

16 Ein Bauteil wird von zwei Maschinen produziert. Bei Maschine A sind erfahrungsgemäß 5 % der Teile defekt, bei Maschine B sind es 8 %. Eine Lieferung enthält 20 dieser Bauteile, davon stammen 15 von Maschine A und fünf von Maschine B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass …
a) unter den Bauteilen, die von Maschine B produziert wurden, höchstens eines defekt ist.
b) in der Lieferung insgesamt höchstens ein Bauteil defekt ist.

17 **Finden Sie den Fehler!**
Erklären Sie, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie die richtige Lösung.

> Wenn ich bei 10 Bernoulli-Versuchen 7 Treffer habe, dann habe ich 3 Nieten.
> Wenn ich höchstens 7 Treffer habe, dann habe ich mindestens 3 Nieten.
> Also gilt mit $0 \leq k \leq n$ und $q = 1 - p$: $B_{n;p}(k) = B_{n;q}(n-k)$ und $F_{n;p}(k) = F_{n;q}(n-k)$.

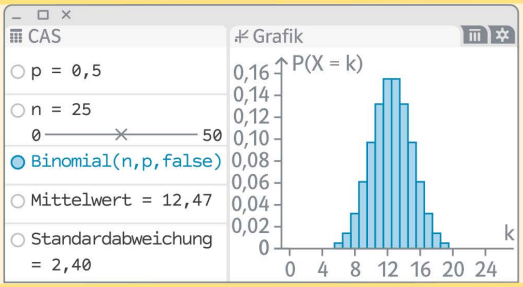
Grundwissen Test — Exponentialfunktion untersuchen

→ **Beispiel 1**, Seite 148
Lösungen, Seite 522

G **18** **a)** Skizzieren Sie den Graphen zu $f(x) = x \cdot e^{2x-1}$.
b) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion rechnerisch auf Extrem- und Wendepunkte.

5 Standardabweichung

Ole vermutet: „Wenn ich 25 Münzen werfe und „Wappen“ als Treffer gilt, streut die Trefferanzahl um 12,5. Werfe ich 100-mal, streut sie um 50. Die Streuungen sind viermal so groß, weil $12{,}5 \cdot 4 = 50$“.
Prüfen Sie Oles Vermutung mithilfe einer Simulation. Simulieren Sie auch 400 Würfe. Nutzen Sie die empirische Standardabweichung, um die Streuung zu messen.



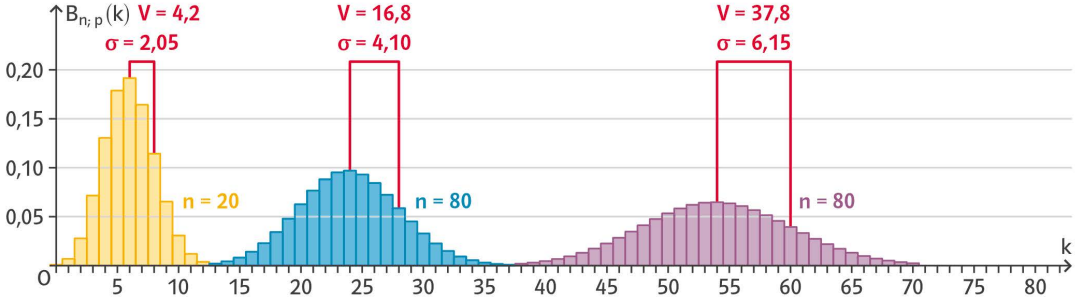
Varianz $V(X)$ und Standardabweichung $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ sind umso größer, je stärker eine Zufallsgröße X um den Erwartungswert μ streut. Für binomialverteilte Zufallsgrößen werden ihre Formeln im Folgenden erläutert.

D1 **MMS-Anleitung** Simulation und Auswertung von Zufallsexperimenten

Die Varianz einer beliebigen Zufallsgröße X mit ganzzahligen Werten von 0 bis n ist
(*) $V(X) = (0 - \mu)^2 \cdot P(X = 0) + (1 - \mu)^2 \cdot P(X = 1) + \ldots + (n - \mu)^2 \cdot P(X = n)$.
Wenn X binomialverteilt mit den Parametern n und p ist, ergibt sich
$V(X) = (0 - n \cdot p)^2 \cdot B_{n;\,p}(0) + (1 - n \cdot p)^2 \cdot B_{n;\,p}(1) + \ldots + (n - n \cdot p)^2 \cdot B_{n;\,p}(n) = n \cdot p \cdot (1 - p)$.
Die Standardabweichung erhält man hieraus als Wurzel: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Begründung für n = 1
Man setzt den Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 1 \cdot p = p$ in die Formel (*) ein und erhält für die Varianz
$V = (0 - \mu)^2 \cdot (1 - p) + (1 - \mu)^2 \cdot p = p^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p = (1 - p) \cdot p \cdot (p + 1 - p) = p \cdot (1 - p)$.

Eine allgemeine Begründung der Formel für n = 3 und die numerische Kontrolle für höhere Werte von n erfolgen auf Seite 345 in Aufgabe 11.



Da die Varianz proportional zum Versuchsumfang n steigt, wächst die Standardabweichung proportional zu $\sqrt{n}$. Die Abbildung veranschaulicht: Sie verdoppelt sich, wenn man den Versuchsumfang vervierfacht, sie verdreifacht sich, wenn man ihn verneunfacht.
Die **zentrale Bedeutung** der Standardabweichung σ erschließt sich daraus, dass für Binomialverteilungen $B_{n;\,p}$ mit hinreichend großem n gilt:
- Die Trefferzahl X liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68,3 % im **σ-Intervall** $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$.
- Sie liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95,4 % im **2σ-Intervall** $[\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]$.
- Die „Wendestellen der Histogramm-Kontur“ liegen bei $\mu \pm \sigma$.

Genau genommen handelt es sich bei $\mu - \sigma$ bzw. $\mu + \sigma$ um die Wendestellen der Gauß'schen Glockenfunktion, die die Kontur näherungsweise beschreibt, vgl. Seite 380.

Standardabweichung, Sigmaregeln
Eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern n und p besitzt die Varianz $V = n \cdot p \cdot (1 - p)$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68,3 % liegt X im σ-Intervall $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95,4 % liegt X im 2σ-Intervall $[\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]$.

Wenn ein beobachteter Wert um mehr als ca. 2σ vom Erwartungswert abweicht, nennt man die Abweichung statistisch signifikant, bei einer Abweichung um mehr als 3σ hoch signifikant.

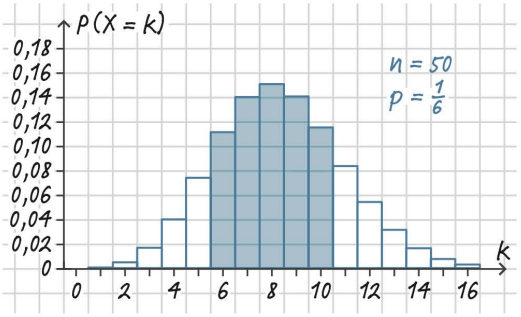
„signifikant“ und „hoch signifikant“ verstehen sich qualitativ. Statistiker verwenden oft die Grenzen $1{,}96\sigma$ bzw. $2{,}58\sigma$, die zu den Wahrscheinlichkeiten 95 % und 99 % gehören.

Beispiel **Standardabweichung untersuchen**

Ein Würfel wird 50-mal gerollt.
Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Sechsen.

a) Zeigen Sie: Die Werte k der markierten Histogrammsäulen befinden sich alle im σ-Intervall $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Anzahl der Sechsen um höchstens 1σ bzw. 2σ vom Erwartungswert abweicht. Vergleichen Sie mit den Werten 68,3 % bzw. 95,4 %.



Lösung

a) X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 50$ und $p = \frac{1}{6}$.

Es sind $\mu = 50 \cdot \frac{1}{6} \approx 8{,}333$, $\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 2{,}635$ und $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma] \approx [5{,}698;\ 10{,}968]$.

Da X ganzzahlig ist, liegen nur die natürlichen Zahlen 6, …, 10 im σ-Intervall (man rundet „nach innen“).

b) $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P(6 \le X \le 10) = F_{50;\frac{1}{6}}(10) - F_{50;\frac{1}{6}}(5) \approx 0{,}659$

$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = P(3{,}063 \le X \le 13{,}604) = P(4 \le X \le 13) = F_{50;\frac{1}{6}}(13) - F_{50;\frac{1}{6}}(3) \approx 0{,}945$

Die Anzahl der Sechsen liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 65,9 % im 1σ- und mit ca. 94,5 % im 2σ-Intervall um μ.

Die Angaben 68,3 % und 95,4 % sind gute „Richtwerte“.

Aufgaben

○ **1** Überschlagen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung der binomialverteilten Zufallsgröße mit den Parametern n und p.

a) $n = 20,\ p = 0{,}3$ b) $n = 20,\ p = 0{,}5$ c) $n = 50,\ p = 0{,}7$ d) $n = 80,\ p = \frac{2}{3}$

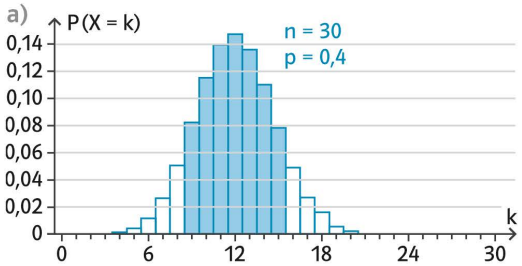
○ **2** Eine Münze wird wiederholt geworfen. Die Zufallsgröße X gibt an, wie oft „Zahl“ erscheint. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X wenn, …

a) die Münze 5-mal geworfen wird.
b) die Münze 10-mal geworfen wird.
c) die Münze 15-mal geworfen wird.
d) die Münze 20-mal geworfen wird.

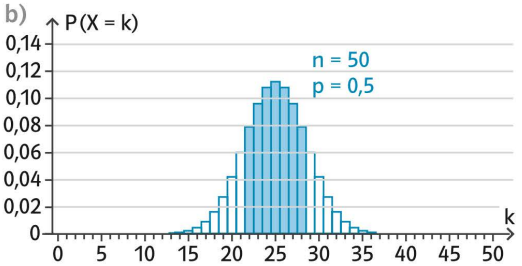
○ **3** Das Histogramm gehört zu einer binomialverteilten Zufallsgröße mit den Parametern n und p. Überprüfen Sie, ob der Bereich markiert ist, in dem die Werte von X liegen, die von μ höchstens um σ abweichen, und berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Lerntipp
Seite 344, Beispiel

a)



b)



○ **4** a) Gegeben ist die binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p. Bestimmen Sie den Erwartungswert μ sowie die Standardabweichung σ und geben Sie die Trefferanzahlen an, die höchstens um σ von μ abweichen.

(1) $n = 15,\ p = 0{,}5$ (2) $n = 25,\ p = 0{,}2$ (3) $n = 80,\ p = 0{,}6$ (4) $n = 80,\ p = 0{,}8$

b) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X im 1σ-Intervall liegt.

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 523

○ **5** Max trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %. Er wirft fünfmal. X zählt die Treffer.
a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
b) Bestimmen Sie die Trefferanzahlen, die um höchstens σ vom Erwartungswert abweichen.
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der X um höchstens σ von μ abweicht.

◒ **6** Bei einer Kontrolle stimmen die Beurteilungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %.
X ist die Anzahl der falschen Beurteilungen bei 100 Kontrollen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der falschen Beurteilungen im Intervall $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$ liegt. Interpretieren Sie den Erwartungswert.

◒ **7** Aus einer Urne mit zehn weißen und 40 roten Kugeln wird 50-mal mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln um mindestens 2 σ, aber um weniger als 3 σ vom Erwartungswert abweicht, dass also die Abweichung statistisch signifikant, aber noch nicht hoch signifikant ist.

◒ **8** **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**
Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.
a) Das 2 σ-Intervall ist doppelt so breit wie das 1 σ-Intervall.
b) Das 2 σ-Intervall enthält doppelt so viele Trefferanzahlen wie das 1 σ-Intervall.
c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Trefferanzahl außerhalb des 2 σ-Intervalls liegt, ist kleiner als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie außerhalb des 1 σ-Intervalls liegt.
d) Die Trefferanzahl liegt doppelt so wahrscheinlich im 2 σ-Intervall wie im 1 σ-Intervall.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 523

◒ **9** Von den Einwohnern einer Stadt befürworten 60 % den Bau einer neuen Konzerthalle. Es werden zufällig 100 Einwohner ausgewählt und befragt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Stichprobe die Anzahl der Befürworter um höchstens 2 σ vom Erwartungswert abweicht.

● **10** Murat: „Wenn man Streuung nicht durch die Standardabweichung σ misst, sondern durch $\sigma = \sum_{i=0}^{n} |x_i - \mu|$, spart man sich zwar das Quadrieren und das Wurzelziehen. σ verdoppelt sich aber nicht mehr, wenn man bei der Binomialverteilung die Versuchszahl n vervierfacht. Man muss σ für jedes n neu berechnen."
Erläutern Sie anhand einer eigenen Rechnung, was Murat entdeckt hat.

● **11** Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit $n = 3$, Trefferwahrscheinlichkeit p und $q = 1 - p$.

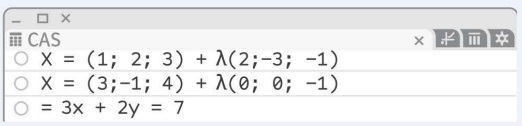
r	0	1	2	3
P(X = r)	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

a) Zeigen Sie mithilfe einer Termumformung, dass $\mu = 3 \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{3 \cdot p \cdot (1 - p)}$ gelten.
b) Führen Sie eine entsprechende Kontrolle für $n = 2$ durch.

Grundwissen Test — Lagebeziehungen untersuchen

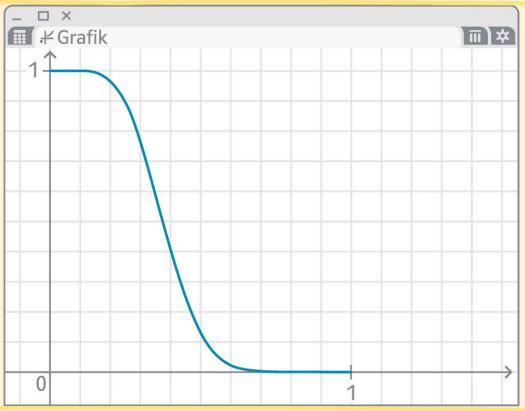
→ **Grundwissen**, Seite 421
Lösungen, Seite 523

G **12** Leilas Geometrieprogramm hat aus den ersten beiden Zeilen die dritte berechnet. Erläutern und kontrollieren Sie!



6 Probleme lösen mit der Binomialverteilung

Nicola ist verwundert: „Ich habe bei der kumulierten Binomialverteilung $F_{n;\,p}(k)$ $n = 20$ und $k = 7$ gesetzt und dann p von 0 auf 1 anwachsen lassen. Mein MMS zeichnet dann einen Graphen, der von 1 auf 0 fällt, statt von 0 auf 1 zu steigen."
Helfen Sie Nicola, den Graphen zu verstehen. Formulieren Sie eine Frage, die der Graph beantwortet.



Mitunter muss man nach Parametern suchen, die garantieren, dass Wahrscheinlichkeiten, die die Binomialverteilung liefert, gewisse Grenzwerte nicht über- oder unterschreiten.
Anhand einfacher Kontexte werden die Zusammenhänge erläutert.

Bei binomialverteilten Zufallsgrößen X treten vier Größen auf: Die Versuchsanzahl **n**, die Trefferwahrscheinlichkeit **p**, die Trefferanzahl **k** und die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ (bzw. $P(X \leq k)$) für (höchstens) k Treffer. Wenn drei der vier Werte gegeben sind, kann man den vierten direkt berechnen oder durch Probieren bestimmen. Die Tabelle zeigt eine Übersicht.

Die Binomialverteilung in Anwendungskontexten: eine Übersicht

Realsituation und Fragestellung	Binomialmodell	Lösungsansatz
12 Tickets wurden verkauft. Wie wahrscheinlich ist es, dass 10 Plätze ausreichen, wenn jeder Ticketkäufer nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 erscheint?	**gegeben:** $n = 12,\ p = 0{,}8,\ k = 10$ **gesucht:** $P(X \leq 10)$	$F_{12;\,0{,}8}(10)$ berechnen.
Jeder Ticketkäufer erscheint mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7. Wie viele Tickets darf man höchstens verkaufen, damit 10 Plätze mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit ausreichen?	**gegeben:** $p = 0{,}7,\ k = 10,$ $P(X \leq 10) \geq 0{,}9$ **gesucht:** n	Durch Probieren oder Ablesen in einer Tabelle das größtmögliche n so bestimmen, dass $F_{n;\,0{,}7}(10) \geq 0{,}9$ gilt.
Für 100 Plätze werden 115 Tickets verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit dürfen die Ticketkäufer höchstens erscheinen, damit die verfügbaren Plätze mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % ausreichen?	**gegeben:** $n = 115,\ k = 100,$ $P(X \leq 100) \geq 0{,}9$ **gesucht:** p	Durch Probieren oder Ablesen in einer Tabelle das kleinste mögliche p so bestimmen, dass $F_{115;\,p}(100) \geq 0{,}9$ gilt.
Es werden 80 Tickets verkauft. Jeder Ticketbesitzer erscheint mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 %. Wie viele Plätze müssen mindestens bereitgestellt werden, damit zu mindestens 95 % sichergestellt ist, dass alle erscheinenden Ticketbesitzer einen Platz bekommen?	**gegeben:** $n = 80,\ p = 0{,}85$ $P(X \leq k) \geq 0{,}95$ **gesucht:** k	Durch Probieren oder Ablesen in einer Tabelle das kleinste mögliche k so bestimmen, dass $F_{80;\,0{,}85}(k) \geq 0{,}95$ gilt.

Wenn man Probleme lösen und dazu Realsituationen durch ein Binomialmodell beschreiben möchte, muss man (z.T. nicht ganz realistische) Modellannahmen machen. Hier wird unterstellt, dass alle Ticketkäufer – unabhängig voneinander – mit der gleichen Wahrscheinlichkeit erscheinen. Bei Glücksspielen (vgl. Seite 347, Beispiele 1 und 2) sind solche Annahmen realistisch.

Beispiel 1 **Versuchsanzahl n bestimmen**

Berechnen Sie, wie oft man einen Tetraeder mindestens werfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % …

a) mindestens dreimal eine Vier zu erhalten.
b) mindestens eine Vier zu erhalten.

Lösung

Die Zufallsgröße X zählt, wie oft eine Vier fällt.
X ist binomialverteilt mit dem Parameter $p = \frac{1}{4}$.

a) Gesucht ist n, sodass $P(X \geq 3) \geq 0{,}95$.
Es ist $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$, also muss $P(X \leq 2) \leq 0{,}05$ sein.
Man berechnet $P(X \leq 2)$ für verschiedene n.

n	$P(X \leq 2)$
21	0,075
22	0,061
23	0,049
24	0,040

Für $n = 22$ erhält man den Wert $P(X \leq 2) \approx 0{,}061$ und für $n = 23$ den Wert $P(X \leq 2) \approx 0{,}049$ (vgl. Tabelle).
Man muss mit dem Tetraeder mindestens 23-mal würfeln, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens dreimal eine Vier fällt.

b) Gesucht ist n, sodass $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$. Es ist $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}75^n$.
Also muss $0{,}75^n \leq 0{,}05$ sein. Die Gleichung $0{,}75^n = 0{,}05$ lässt sich durch Logarithmieren lösen:
$n \cdot \log(0{,}75) = \log(0{,}05)$. Somit ist $n = \frac{\log(0{,}05)}{\log(0{,}75)} \approx 10{,}41$.
Man muss mit dem Tetraeder mindestens elfmal würfeln, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens einmal eine Vier fällt.

D1 **MMS-Anleitung** Parameter einer Binomialverteilung bestimmen

Beispiel 2 **Trefferwahrscheinlichkeit p bestimmen**

Es soll ein Glücksrad mit einem roten und einem blauen Feld gebaut werden. Die Größe der Felder soll so gewählt werden, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % bei 20 Drehungen höchstens achtmal das rote Feld erscheint. Bestimmen Sie, wie groß die Trefferwahrscheinlichkeit für „rot" sein muss. Geben Sie den Wert auf ganze Prozent gerundet an.

Lösung

Die Zufallsgröße X zählt, wie oft das rote Feld erscheint.
X ist binomialverteilt mit $n = 20$, p ist gesucht. Es muss $P(X \leq 8) = 0{,}95$ gelten.
Man berechnet $P(X \leq 8)$ für verschiedene p. Für $p = 0{,}26$ erhält man den Wert $P(X \leq 8) \approx 0{,}949$ und für $p = 0{,}25$ den Wert $P(X \leq 8) \approx 0{,}959$.
Um zu entscheiden, ob 0,25 oder 0,26 die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist, testet man den Wert in der Mitte $p = 0{,}255$. Dafür gilt $P(X \leq 8) \approx 0{,}954$. Deshalb liegt das gesuchte p zwischen 0,255 und 0,26. Auf zwei Nachkommastellen gerundet ergibt sich $p \approx 0{,}26$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass das rote Feld erscheint, muss ca. 26 % betragen.

Aufgaben

○ **1** a) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}4$. Bestimmen Sie jeweils, wie groß die Anzahl n der Versuche mindestens sein muss, damit gilt …
(1) $P(X = 0) \leq 0{,}1$, (2) $P(X \geq 1) \geq 0{,}85$, (3) $P(X \leq 3) \leq 0{,}5$, (4) $P(X > 4) > 0{,}7$.
b) Formulieren Sie jeweils eine Frage, die durch die Rechnung beantwortet wird.

○ **2** Bestimmen Sie, wie oft man mindestens würfeln muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % das angegebene Ergebnis zu erhalten.
a) mindestens eine Sechs
b) mindestens drei Sechsen
c) mindestens fünf Sechsen
d) mindestens eine gerade Zahl

○ **3** Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit dem Parameter $n = 25$. Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeit p für die angegebene Wahrscheinlichkeit auf eine Nachkommastelle gerundet.
a) $P(X \leq 10) = 0{,}5$ b) $P(X \geq 5) = 0{,}6$ c) $P(X \leq 20) = 0{,}9$ d) $P(X > 8) = 0{,}2$

○ **4** Ein Glücksrad soll gebaut werden. Berechnen Sie auf ganze Prozent gerundet, wie groß die Trefferwahrscheinlichkeit für „Gelb" sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit …

a) von 2 % bei zehnmaligem Drehen nie das gelbe Feld erscheint.

b) von 90 % bei fünfmaligem Drehen höchstens zweimal das gelbe Feld erscheint.

→ **Lerntipp** Seite 347, Beispiel 2

○ **5** Bei der Produktion sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % von 50 Bauteilen mindestens 40 fehlerfrei sein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit auf zehntel Prozent genau, mit der ein Bauteil fehlerfrei sein muss.

Test 1

→ **Lösungen**, Seite 523

○ **6** In allen 11. Klassen einer Schule lernen 40 % der Jugendlichen Spanisch. Es wird zufällig eine Gruppe Jugendlicher ausgewählt. Bestimmen Sie, wie groß die Gruppe sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens fünf darunter Spanisch lernen.

○ **7** Bei einer Bernoulli-Kette der Länge $n = 20$ sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % mindestens 14 Treffer auftreten. Bestimmen Sie auf ganze Prozent genau, wie groß die Trefferwahrscheinlichkeit p sein muss.

◒ **8** Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person linkshändig ist, beträgt in Deutschland 12 %. Berechnen Sie hiermit, …

a) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Gruppe aus 26 Personen mehr als sechs linkshändige Personen sind.

b) wie groß eine Gruppe sein muss, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine linkshändige Person enthält.

c) wie groß eine Gruppe sein muss, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens fünf linkshändige Personen darin befinden.

→ **Lerntipp** Seite 347, Beispiel 1

◒ **9** Ein Flugzeug hat 150 Plätze für Passagiere. Die Fluggesellschaft verkauft für einen bestimmten Flug jedoch 160 Tickets, da nach ihrer Statistik auf dieser Strecke nur 92 % der Fluggäste, die gebucht haben, erscheinen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht alle Fluggäste, die erscheinen, mitfliegen können.

b) Da die Fluggesellschaft Fluggäste, die trotz Buchung nicht mitfliegen können, entschädigen muss, möchte Sie die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall unter 2 % halten. Bestimmen Sie, wie viele Tickets sie dann höchstens für diesen Flug verkaufen darf.

◒ **10** Beim Lotto 6 aus 49 beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einem Tipp drei Richtige hat, etwa 0,0186.

a) Frau Mayer gibt einen Spielzettel mit sechs Tipps ab. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie mindestens einmal drei Richtige hat.

b) Bestimmen Sie die Anzahl an Tipps, die Frau Mayer abgeben muss, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens einmal drei Richtige hat.

c) Bestimmen Sie die Anzahl an Tipps, die Frau Mayer abgeben muss, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens dreimal drei Richtige hat.

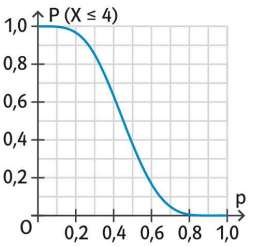
11 Eine Maschine produziert Bauteile. Diese werden in Packungen zu 100 Stück verpackt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Packung mehr als fünf defekte Bauteile enthält, beträgt 10 %. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein von der Maschine produziertes Bauteil defekt ist, auf Zehntelprozent gerundet.

12 Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 15 Fragen mit jeweils fünf Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist.

a) Ein Kandidat kreuzt zufällig bei jeder Frage eine Antwort an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mindestens zwei (drei) Antworten richtig hat.

b) Bestimmen Sie, wie viele richtige Antworten für das Bestehen des Tests verlangt werden müssen, wenn die Wahrscheinlichkeit kleiner als 10 % sein soll, dass man durch zufälliges Raten besteht.

13 Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$. Rechts ist der Graph der Funktion abgebildet, die jeder Zahl p (mit $0 \le p \le 1$) die Wahrscheinlichkeit $P(X \le 4)$ zuordnet.



a) Bestimmen Sie mithilfe des Graphen p näherungsweise, sodass gilt:
(1) $P(X \le 4) = 0{,}2$ (2) $P(X \le 4) = 0{,}4$
(3) $P(X \le 4) = 0{,}5$ (4) $P(X \le 4) = 0{,}9$

b) Kontrollieren Sie die abgelesenen Werte mit einem digitalen Hilfsmittel.

Test 2

Lösungen, Seite 523

14 Für einen bestimmten Flug wird ein Flugzeug mit 180 Plätzen eingesetzt. Auf dieser Strecke erscheinen nach der Erfahrung der Fluggesellschaft nur 88 % der Personen, die gebucht haben. Es werden deshalb mehr Tickets verkauft, als Plätze vorhanden sind.

a) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Personen, die gebucht haben, nicht mitfliegen können, soll höchstens 7 % betragen. Bestimmen Sie, wie viele Tickets für diesen Flug höchstens verkauft werden dürfen.

b) Die Fluggesellschaft verkauft 190 Tickets. Sie hat berechnet, dass in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Personen, die gebucht haben, nicht mitfliegen können, höchstens 5 % beträgt. Bestimmen Sie die von der Fluggesellschaft unterstellte Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, die gebucht hat, auch erscheint, auf ganze Prozent gerundet.

15 **Wahr oder falsch?**
Nico braucht in einem Bernoulli-Versuch mit Trefferwahrscheinlichkeit p mindestens $k = 4$ Treffer. Die Frustwahrscheinlichkeit F, dass dies in n Versuchen nicht gelingt, soll höchstens 10 % betragen. Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Wenn man n verdoppelt, halbiert sich die Frustwahrscheinlichkeit.

b) Wenn man p verdoppelt, halbiert sich die Frustwahrscheinlichkeit.

c) Wenn man k halbiert, halbiert sich die Frustwahrscheinlichkeit.

d) Wenn man k halbiert, halbiert sich die benötigte Versuchsanzahl n.

Grundwissen Test — Lagebeziehungen von Ebenen untersuchen

Beispiel 2, Seite 252
Lösungen, Seite 524

G **16** Die Ebene E wird durch die Punkte $P(2|-2|4)$, $Q(3|-2|6)$ und $R(4|0|-1)$ festgelegt.
Die Ebene F ist durch die Koordinatengleichung $-x + y - z = 2$ gegeben.

a) Geben Sie zur Ebene E eine Ebenengleichung in Parameterform und eine parameterfreie Form an.

b) Bestimmen Sie zu E und F je einen Normalenvektor.

c) Bestimmen Sie einen Vektor, der auf beiden Normalenvektoren senkrecht steht.

d) Begründen Sie, dass sich die Ebenen E und F schneiden müssen.

Bernoulli-Experimente – Binomialverteilung

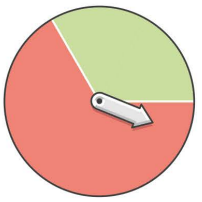
Lösungen, Seite 524

1 **a)** Berechnen Sie $B_{4;\,\frac{1}{4}}(2)$. Geben Sie das Ergebnis als Bruch an.
b) Notieren Sie eine Frage, die das Ergebnis aus Teilaufgabe a) beantwortet.

2 **a)** Zeichnen Sie den vollständigen Baum für eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 3$.
b) Bestimmen Sie damit die Binomialkoeffizienten $\binom{3}{k}$ für $k = 0; 1; 2; 3$.
c) Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse am Pascal-Dreieck und mit einem digitalen Hilfsmittel.
d) Notieren Sie die Binomialverteilung $B_{n;\,p}$ zu $n = 3$ und $p = \frac{1}{3}$ in Tabellenform.
e) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung nach der Definition durch Berechnen einer Summe von Produkten. (vgl. Seite 311)

3 **a)** Bestimmen Sie den Binomialkoefizienten $\binom{6}{2}$ durch Anwenden einer Formel mithilfe des Pascal-Dreiecks und durch systematisches Notieren von Ergebnissen wie $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$
b) Notieren Sie eine Frage, die durch den Wert von $\binom{6}{2}$ beantwortet wird.

4 **a)** Das Glücksrad auf dem Rand wird viermal gedreht. Begründen Sie, welcher Term die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass genau einmal „rot“ erscheint.



1 $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$

2 $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}$

3 $\left(\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^4$

4 $4\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$

b) Notieren Sie Fragen, die durch die anderen Terme beantwortet werden.

5 Beurteilen Sie, ob sich die folgenden Situationen im Zusammenhang mit Münzwürfen als Bernoulli-Ketten deuten lassen.
a) Man zählt die Anzahl der auftretenden „Wappen“, wobei man
(1) 10 gleichaussehende (voneinander nicht unterscheidbare) Münzen gleichzeitig wirft,
(2) 10 Münzen, die man durch ihre Werte voneinander unterscheiden kann, gleichzeitig wirft,
(3) die gleiche Münze zehnmal hintereinander wirft.
b) Eine Anglerin wirft zehnmal ihre Angel aus. Es wird notiert, ob ein Fisch am Haken hängt.
c) Ein Würfel wird zehnmal geworfen und es wird stets die Augenzahl notiert.
d) Es wird zehnmal gewürfelt und es wird stets notiert, ob eine Drei erscheint.

6 Notieren Sie einen Kontext, in dem „Treffer“ und „Niete“ vorkommen, der sich aber nicht oder nur schlecht als Bernoulli-Experiment beschreiben lässt, …
a) weil trotz gleichbleibender Trefferwahrscheinlichkeit Ergebnisse nicht unabhängig sind.
b) weil sich trotz Unabhängigkeit die Trefferwahrscheinlichkeit ändert.

Binomialkoeffizienten

7 Ein Würfel wird dreimal geworfen.
a) Geben Sie alle Ergebnisse an, die zu den folgenden Ereignissen gehören.
A: „Nur im zweiten Wurf eine Sechs.“ B: „Erst im zweiten Wurf eine Sechs.“
C: „Im zweiten Wurf eine Sechs.“ D: „Im zweiten Wurf keine Sechs.“
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse aus Teilaufgabe a).

8 **a)** Begründen Sie unter Rückgriff auf die Definiton von $\binom{n}{k}$ die Gleichung $\binom{6}{4} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$.
b) Begründen Sie durch eine Termumformung $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = \frac{6!}{4!\cdot(6-4)!}$.
c) Begründen Sie anschaulich ohne Rechnung $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$.

D28 Check-out

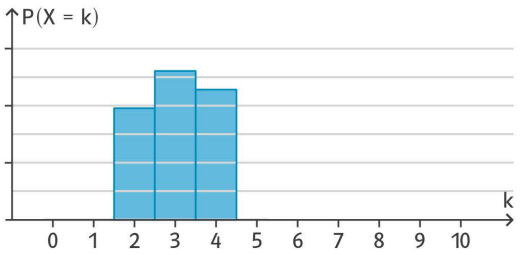
9 Notieren Sie zu Kims Aussage eine Gleichung mit Binomialkoeffizienten.
Kim: „Wenn Toni jetzt 7 Treffer hat, dann hatte er entweder vorher schon 7 Treffer und eine Niete kam dazu, oder er hatte vorher 6 Treffer und der siebte Treffer kam hinzu."

→ **Lösungen**, Seite 526

Erwartungswert

10 Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Treffer. Berechnen Sie den Erwartungswert von X und interpretieren Sie das Ergebnis.
a) Ein Würfel wird fünfmal geworfen. Treffer ist eine Sechs.
b) Ein Basketballspieler wirft drei Freiwürfe. Seine Trefferwahrscheinlichkeit beträgt 80 %.
c) Bei der Produktion von Bauteilen sind 4 % defekt. Treffer ist ein nicht defektes Teil. Es werden 100 Bauteile untersucht.

11 Bei einem Glücksrad mit 6 gleich großen Feldern wurden einige Felder als Treffer markiert. Dreht man es zehnmal, wird die Verteilung der Treffer durch eine Binomialverteilung beschrieben, von der nebenstehend ein Ausschnitt zu sehen ist. Bestimmen Sie die Anzahl der als Treffer markierten Felder und vervollständigen Sie das Histogramm.



Kumulierte Wahrscheinlichkeiten

12 Ein Medikament, das mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % wirkt, wird 20 Patienten verabreicht.
a) Schätzen Sie nach Bauchgefühl die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es
(1) genau bei 16, (2) bei weniger als 16, (3) bei mehr als 16 Patienten wirkt.
b) Bestimmen Sie die in Teilaufgabe a) geschätzten Wahrscheinlichkeiten exakt.

13 Mia kauft 12 Blumenzwiebeln, die je mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % keimen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass …
a) genau zehn Blumenzwiebeln keimen.
b) alle zwölf Blumenzwiebeln keimen.
c) mindestens zehn Blumenzwiebeln keimen.
d) höchstens neun Blumenzwiebeln keimen.

14 Eine Fluggesellschaft entscheidet sich, 100 Tickets zu verkaufen, obwohl nur 94 Plätze verfügbar sind, weil durchschnittlich nur 90 % aller Gäste, die gebucht haben, zum Flug erscheinen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass …
a) alle erscheinenden Fluggäste einen Platz finden.
b) mehr als ein Fluggast entschädigt werden muss.

Standardabweichung

15 80 % der Erwachsenen in Deutschland besitzen einen Führerschein. Es werden 30 Personen zufällig ausgewählt. X beschreibt die Anzahl der Personen mit Führerschein.
a) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 25 Personen einen Führerschein haben.
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
c) Bestimmen Sie das 1σ-Intervall und die zugehörige Wahrscheinlichkeit. Interpretieren Sie beides im Sachzusammenhang.

16 Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p.
Berechnen Sie den Erwartungswert μ. Runden Sie das Intervall $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$ ganzzahlig nach innen und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X in diesem Intervall liegt – und um wie viel Prozent das Ergebnis vom „Sollwert" 0,683 abweicht.
a) n = 20, p = 0,5 **b)** n = 100, p = 0,5 **c)** n = 20, p = 0,2 **d)** n = 200, p = 0,2

17 X ist eine binomialverteilte Zufallsgröße mit dem Parameter $n = 40$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{9{,}6}$. Geben Sie mögliche Werte für den Parameter p an.

→ **Lösungen**, Seite 527

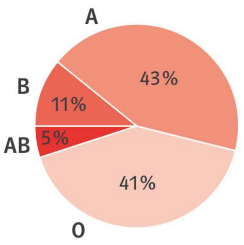
Probleme lösen mit der Binomialverteilung

18 Merva behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu besitzen. Um dies zu überprüfen, wird sie zehnmal einem Test unterzogen, bei dem sie unter vier möglichen Farben die zufällig ausgewählte Farbe vorhersagen soll.
Bearbeiten Sie die Teilaufgaben unter der Annahme, dass Merva nur rät.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie mindestens drei Treffer erzielt.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens k Treffer erzielt, soll höchstens 5 % betragen. Bestimmen Sie die kleinste Trefferanzahl k, für die das erfüllt ist.

19 Das Kreisdiagramm zeigt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen Blutgruppen in Deutschland auftreten. Es werden zufällig 30 Personen ausgewählt.



a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
(1) mehr als 15 Personen Blutgruppe A haben,
(2) höchstens fünf Personen Blutgruppe B oder AB haben,
(3) die Anzahl der Personen mit Blutgruppe 0 um höchstens σ vom Erwartungswert abweicht.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Personen, die man auswählen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens drei Personen mit der Blutgruppe AB zu erhalten.

Weiterführende Aufgaben

20 Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit dem Parameter $n = 20$. Der Erwartungswert ist ganzzahlig. Einen Teil der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zeigt die folgende Tabelle.

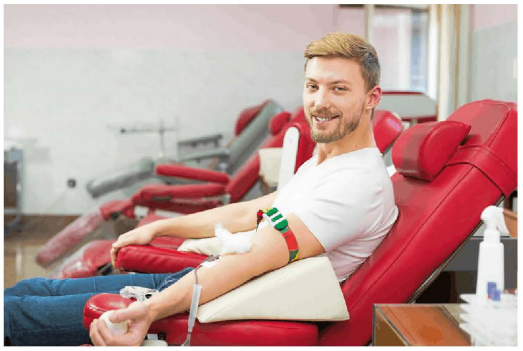
k	0	1	2	3	4	5	6
$B_{60;\,p}(k)$	0,0388	0,1368	0,2293	0,2428	0,1821	0,1028	0,0454

a) Geben Sie den Parameter p an.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(2 \leq X \leq 4)$.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$.

21 Nach einer Blutspende-Aktion müssen die Blutkonserven auf Viren untersucht werden. Um den finanziellen Aufwand klein zu halten, werden daher zunächst Proben von je $k = 5$ Personen gemischt. Anschließend wird das Gemisch untersucht. Nur bei den Gemischen, bei denen Erreger gefunden wurden, wird anschließend jede Einzelprobe geprüft. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Untersuchungen, die für eine Gruppe aus $k = 5$ Personen erforderlich sind. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass $p = 0{,}07\,\%$ der Blutspender mit Viren infiziert sind.



a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. Berechnen Sie den Erwartungswert.

b) Bestimmen Sie die (prozentuale) Ersparnis, wenn man Gruppen der Größe $k = 5$ bildet, im Vergleich zur kompletten Untersuchung aller Blutkonserven.

c) Bestimmen Sie die (prozentuale) Ersparnis, wenn man $k = 50$ Personen zu Gruppen zusammenfasst.

→ **Lösungen**, Seite 527

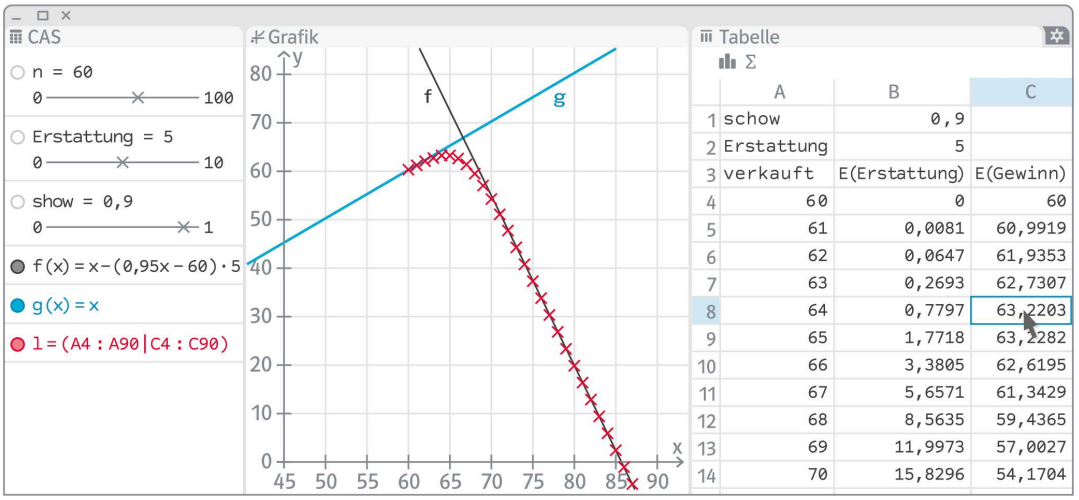
22 **a)** Berechnen Sie $B_{7;\,0,3}(5)$, $B_{7;\,0,3}(6)$ und $B_{8;\,0,3}(6)$.
b) Bestätigen Sie zur Kontrolle, dass $B_{8;\,0,3}(6) = 0{,}3 \cdot B_{7;\,0,3}(5) + 0{,}7 \cdot B_{7;\,0,3}(6)$ gilt.
c) Verallgemeinern Sie die Gleichung aus Teilaufgabe b) und begründen Sie die Verallgemeinerung mithilfe der Pfad- und Summenregel.

23 **Schließen von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit, Entscheiden unter Unsicherheit**
Ein Händler erhält häufig Lieferungen, bei denen ein Ausschussanteil von höchstens 5% zugelassen ist. Zur Überprüfung der Lieferungen werden zwei Prüfpläne vorgeschlagen.
Prüfplan I: Die Lieferung wird abgelehnt, wenn in einer Stichprobe von zehn Stück mindestens ein Stück Ausschuss ist.
Prüfplan II: Die Lieferung wird abgelehnt, wenn in einer Stichprobe von 20 Stück mindestens zwei Stück Ausschuss sind.
Welchen Prüfplan würden Sie als Händler wählen, wenn Sie möglichst tadellose Ware anbieten wollen? Welchen Plan würden Sie als Lieferant bevorzugen, der möglichst viel liefern möchte? Begründen Sie.

24 **Überbuchungsstrategien optimieren**
Ein Ticketshop bietet für 60 freie Plätze $x = 64$ Tickets zum Preis von einem Taler an, weil selten alle Ticketkäufer tatsächlich zur Veranstaltung erscheinen. Sollte ein Kunde mit Ticket keinen Platz mehr bekommen, weil schon alle besetzt sind, erhält der Kunde den Ticketpreis zurück und zusätzlich 4 Taler, es werden also 5 Taler erstattet. Damit man diese Situation durch eine Binomialverteilung beschreiben kann, macht man zwei Modellannahmen:
- Jeder Ticketkäufer erscheint mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}9$ (Showquote).
- Stets werden alle angebotenen Tickets auch verkauft.

Da der Shop 64 Tickets verkauft, nimmt er zunächst 64 Taler ein, muss aber, wenn höchstens 60 Personen kommen, 0 Taler zurückzahlen, bzw., wenn genau 61, 62, 63 oder 64 Personen kommen, 5, 10, 15 oder 20 Taler zurückzahlen.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dieser fünf möglichen Ergebnisse.
b) Kontrollieren Sie: Der Erwartungswert der Erstattung beträgt 0,7797 Taler, der Erwartungswert des Gewinns 63,2203 Taler (vgl. Zeile 8 der Tabelle).
c) Zeigen Sie: Wenn man 65 Tickets anbietet, steigt die Gewinnerwartung auf 63,2282, wenn man 66 Tickets anbietet, fällt sie zurück auf 63,228 Taler.
d) Begründen Sie anschaulich: Wenn man sehr viel mehr als $x = 60$ Tickets anbietet, dann lässt sich die Gewinnerwartung durch $f(x) = x - 5(0{,}9x - 60)$ annähern. Wenn man nur wenig mehr als 60 Tickets anbietet, ist $g(x) = x$ eine Näherung für die Gewinnerwartung.
e) Formulieren Sie zwei Aussagen der Form „Wenn die Erstattung steigt (sinkt), dann …", die Sie durch Grafiken belegen. Nutzen Sie dazu die interaktive Anwendung.

I19 **interaktive Anwendung** Überbuchung mit Asymptoten



	A	B	C
1	schow	0,9	
2	Erstattung	5	
3	verkauft	E(Erstattung)	E(Gewinn)
4	60	0	60
5	61	0,0081	60,9919
6	62	0,0647	61,9353
7	63	0,2693	62,7307
8	64	0,7797	63,2203
9	65	1,7718	63,2282
10	66	3,3805	62,6195
11	67	5,6571	61,3429
12	68	8,5635	59,4365
13	69	11,9973	57,0027
14	70	15,8296	54,1704

Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

Eine **Bernoulli-Kette** der Länge n besteht aus n unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit den Ergebnissen 1 („Erfolg", „Treffer") und 0 („Misserfolg", „Niete").
Beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer und ist p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, so erhält man die Wahrscheinlichkeit für k Treffer in n Versuchen mithilfe der Formel

$$P(X = k) = B_{n;\,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung $B_{n;\,p}$ heißt **Binomialverteilung**. Die Zufallsgröße X heißt dann binomialverteilt mit den Parametern n und p oder kurz $B_{n;\,p}$-verteilt.

$P(X \leq k) = F_{n;\,p}(k) = \sum_{i=0}^{k} B_{n;\,p}(i)$ nennt man **kumulierte Binomialverteilung**.

Bernoulli-Experiment:
Drehen eines Glücksrads. Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{4}$.

Bernoulli-Kette: Fünfmaliges Drehen des Glücksrads: $n = 5$.
X beschreibt die Anzahl der Treffer.

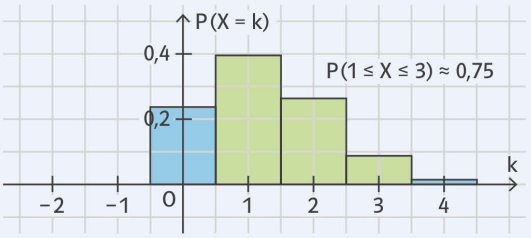
$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{512} \approx 0{,}0879$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0{,}8965$$

X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ *und* $p = \frac{1}{4}$. $B_{5;\,0{,}25}(k)$.

$$\mu = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4};\quad \sigma = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{15} \approx 0{,}968$$

Im Säulendiagramm der Binomialverteilung hat die Säule an der Stelle k die Höhe $P(X = k)$. Wenn man als Säulenbreite 1 wählt, dann lassen sich die Wahrscheinlichkeiten auch als Flächen deuten und man spricht von einem **Histogramm**.



Binomialkoeffizienten

Das Baumdiagramm einer Bernoulli-Kette der Länge n enthält $\binom{n}{k}$ Pfade mit k Treffern. $\binom{n}{k}$ beschreibt auch die Anzahl der Möglichkeiten, wie man k Einsen auf n Plätze verteilen kann.

Es gilt $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Es gibt 10 Möglichkeiten, 3 Autos auf 5 Parkplätze zu verteilen, denn

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

Erwartungswert und Standardabweichung

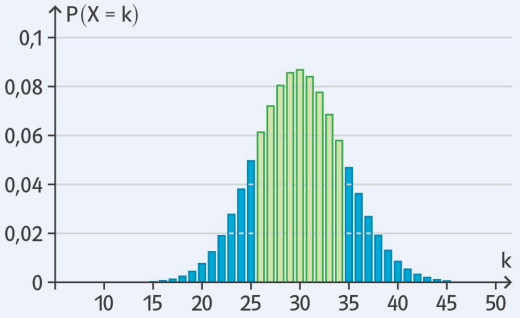
Der **Erwartungswert** $\mu = E(X)$, die **Varianz** $V(X)$ und die **Standardabweichung** $\sigma(X)$ einer binomialverteilten Zufallsgröße X lassen sich aus den Parametern n und p berechnen.
Es gilt $\mu = E(X) = n \cdot p$, $V(X) = np(1-p)$ und $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$.

Gegeben ist eine binomialverteilte Zufallsgröße mit $n = 100$ *und* $p = 0{,}3$.
$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}3 = 30$
$\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} \approx 4{,}58258$
1σ*-Intervall:* $[25{,}41742;\ 34{,}58258]$
Man rundet ganzzahlig „nach innen".
$P(26 \leq X \leq 34) \approx 0{,}67401$
Im 1σ*-Intervall um den Erwartungswert liegen ca. 67 % aller Treffer.*

Bedeutung der Kenngrößen

Wenn der Erwartungswert μ ganzzahlig ist, tritt er bei binomialverteilten Zufallsgrößen am wahrscheinlichsten auf. Ansonsten liegen die wahrscheinlichsten Werte in der (ganzzahligen) Nähe von μ.
Die Bedeutung der Standardabweichung σ ergibt sich aus der Faustregel, dass für binomialverteilte Zufallsgrößen X die Werte mit einer Wahrscheinlichkeit

- von ca. 68,3 % im **1σ-Intervall** $[\mu - 1\sigma;\ \mu + 1\sigma]$ und
- von ca. 95,4 % im **2σ-Intervall** $[\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]$ liegen.



D29 Lösungen
Probeklausur
Kapitel IX

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 1

30 min

1 Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt: $P(A) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4$

2 Tim nutzt täglich die S-Bahn. Sie ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % pünktlich. Er wird in der kommenden Woche fünfmal mit der S-Bahn fahren.

a) Er berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Zug nicht pünktlich ist, mit der Formel $1 - 0{,}95^5$. Erklären Sie, wie er zu dieser Formel kommt.

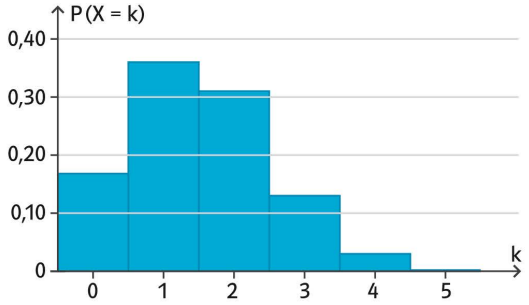
b) X sei die Zufallsgröße, die angibt, wie viele der fünf Züge pünktlich sind. Notieren Sie Formeln zur Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Erwartungswert und Standardabweichung.

c) Formulieren Sie Annahmen, unter denen die in Teilaufgabe a) und b) berechneten Wahrscheinlichkeiten die Realität angemessen beschreiben könnten.

3 X_1 und X_2 sind binomialverteilte Zufallsgrößen mit den Trefferwahrscheinlichkeiten $p_1 = 0{,}3$ und $p_2 = 0{,}7$. Durch sie werden die Treffer bei jeweils fünf Versuchen gezählt.

a) Geben Sie einen Term an, mit dem $P(X_1 = 2)$ berechnet werden kann.

b) Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_2 dar.



Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 2

35 min

1 Bei einem Glücksrad hat die Wahrscheinlichkeit für „rot" den Wert $\frac{1}{4}$.

a) Formulieren Sie ein Ereignis A, für das $P(A) = 7 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$ gilt.

b) Das Glücksrad wird dreimal gedreht. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit es genau zweimal rot zeigt. Notieren Sie das Ergebnis als gekürzten Bruch, dessen Wert Sie überschlagen.

2 Folgende Ereignisse für Bernoulli-Ketten der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p sind gleich wahrscheinlich.

A: „30 Treffer bei $n = 50$ und $p = 0{,}7$." B: „20 Treffer bei $n = 50$ und $p = 0{,}3$."

a) Geben Sie analoge Beispiele an und formulieren Sie dann eine allgemeine Regel.

b) Begründen Sie diese Regel.

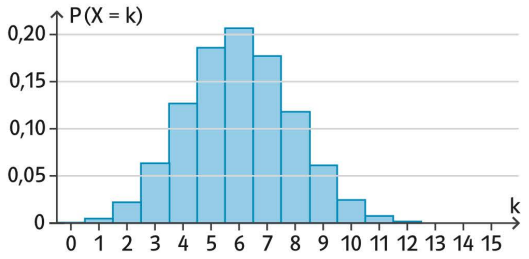
3 Das Histogramm gehört zu einer Binomialverteilung.

a) Begründen Sie, auf welchem Kärtchen die richtigen Parameter stehen.

$n = 15,\ p = 0{,}4$

$n = 20,\ p = 0{,}25$

$n = 10,\ p = 0{,}6$



b) Kontrollieren Sie durch einen Überschlag, dass das 1σ-Intervall um den Erwartungswert genau die Zahlen 5, 6 und 7 enthält. Lesen Sie aus dem Diagramm die zugehörige Wahrscheinlichkeit ab und kommentieren Sie.

4 **a)** Drei Einsen sollen auf 7 Fächer (□|□|□|□|□|□|□) verteilt werden. Erläutern Sie, wie Sie vorgehen würden, wenn Sie diese systematisch aufschreiben sollen.

b) Begründen Sie, dass man die Anzahl mit dem Term $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ berechnen kann.

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 1

100 min

D29 Lösungen
Probeklausur
Kapitel IX

1 Bei einer Reißzwecke ist die Wahrscheinlichkeit 60 %, dass sie auf dem Kopf landet.
Henry wirft 100 Stück. Die Zufallsgröße X zählt die Reißzwecken, die auf dem Kopf landen.

a) Nennen Sie Argumente dafür, dass die Binomialverteilung ein gutes Modell sein könnte.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.

c) Berechnen Sie $P(X \leq 60)$, $P(X > 50)$, $P(50 \leq X \leq 60)$ sowie $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$.

d) Bestimmen Sie die kleinste Zahl a, sodass $P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) \geq 80\,\%$.

2 Ein Reiseunternehmer nimmt 50 Buchungen für eine Wohnanlage mit 45 Betten an, da erfahrungsgemäß 10 % der Buchungen wieder rückgängig gemacht werden.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er zu viele Buchungen angenommen hat.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er sogar noch mehr als einen Platz übrig hat.

c) Erläutern Sie, warum das Berechnen obiger Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Binomialverteilung zu nicht ganz realistischen Ergebnissen führt.

3 Beim Verpacken von Eiern werden erfahrungsgemäß 2 % beschädigt. Die Eier werden in Schachteln zu zehn Stück verpackt.

a) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Schachtel nur ganze Eier enthält.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zehn Schachteln genau acht nur ganze Eier enthalten.

4 Beim Sammeln von Bildern stellt sich die Frage, ob zwei Motive die in einer Stichprobe verschieden oft, z. B. 31-mal und 41-mal beobachtet wurden, in der Grundgesamtheit gleich häufig vorkommen, d. h. mit gleicher Auflage gedruckt wurden. Sie müssten dann in der Stichprobe die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Statistiker vergleichen diese Situation mit dem 72-fachen Wurf einer Münze, bei dem Wappen 31-mal erschien. Eigentlich hätte man bei 72 Würfen 36-mal Wappen erwartet. Wenn die beobachtete Zahl außerhalb des 2σ-Intervalls um den Erwartungswert, also außerhalb von

$\left[36 - 2\sqrt{72 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}};\ 36 + 2\sqrt{72 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}\right] = [36 - \sqrt{72};\ 36 + \sqrt{72}] \approx [27{,}5;\ 44{,}5]$ liegt, bezweifeln sie die Annahme gleicher Wahrscheinlichkeit wegen einer „statistisch signifikanten Abweichung". Das ist hier aber noch nicht der Fall.

a) Bei der Fußball-Weltmeisterschaft der Herren 2014 wurde der Aufkleber von Lahm 20 000-mal, derjenige seines Teamkollegen Götze bei einer Tauschbörse nur 15 500-mal registriert. Prüfen Sie, ob man die Annahme, dass die beiden Sticker gleich oft gedruckt wurden, bezweifeln muss.

b) Untersuchen Sie, zu welchem Ergebnis man kommen würde, wenn Götze in einer kleineren Stichprobe 155-mal und Lahm 200-mal beobachtet worden wäre.

5 Um die Wahrscheinlichkeit für vier Richtige beim Lotto 6 aus 49 zu bestimmen, kann man während der Ziehung r für eine richtig getippte und f für eine falsch getippte Zahl notieren.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine Ziehung, bei der man rrrrff notiert.

b) Schreiben Sie alle Möglichkeiten mit vier Richtigen auf, also rrrrff, rrrfrf, rrfrrf usw.

Begründen Sie, dass es $\binom{6}{4} = 15$ Kombinationen gibt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für jede der Kombinationen in Teilaufgabe b) sowie die Wahrscheinlichkeit für vier Richtige.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für zwei Richtige beim Lotto.

e) Beim Lotto erzielt man bei einem Spieltipp einen Gewinn, wenn man mindestens drei Richtige hat. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn pro Spiel nur etwa 1,86 % beträgt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei 50 (100, 1000) Spielen mindestens einen Gewinn erzielt.

D29 Lösungen
Probeklausur
Kapitel IX

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 2

120 min

1 Eine Werbeagentur verspricht, durch eine Werbekampagne den Bekanntheitsgrad eines Produktes von derzeit 30 % auf mindestens 36 % zu steigern. Nur dann, wenn bei einer Stichprobe von 200 Personen 72 oder mehr das Produkt kennen, verlangt die Agentur ein Honorar.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass …

a) das Honorar ausgezahlt wird, obwohl die Bekanntheit sich nicht geändert hat.

b) das Honorar nicht ausgezahlt wird, obwohl die Kampagne erfolgreich war.

2 Klinische Tests für ein Medikament haben gezeigt, dass es den Anteil p der behandelten Patienten heilt. Die Zufallsgröße X zählt die geheilten Patienten, wenn n Patienten mit dem Medikament behandelt werden.

a) Es sei $p = 0{,}9$ und $n = 60$. Berechnen Sie $P(X \geq 50)$.

b) Es sei $n = 60$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche p (gerundet auf ganze Prozent), sodass $P(X \geq 50) \geq 0{,}5$ ist.

c) Es sei $p = 0{,}9$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche n, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens 50 Patienten geheilt werden.

3 Die Wahrscheinlichkeit eines Pixelfehlers bei Bildschirmen wird mit p bezeichnet. In einer Stichprobe vom Umfang $n = 20$ soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % kein Pixelfehler vorkommen. Bestimmen Sie den Wert, den p höchstens annehmen darf.

4 In einer Urne befinden sich sechs Kugeln. Davon sind vier Kugeln schwarz und zwei Kugeln weiß. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: „Es werden nur schwarze Kugeln gezogen."
B: „Es wird genau eine weiße Kugel gezogen."
C: „Die erste Kugel ist weiß."

5 **Überbuchung**
Ein Ticketshop bietet für 32 freie Plätze 40 Tickets an, weil Ticketkäufer nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 80\,\%$ (Show-Quote) erscheinen.

a) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Überlegung des Ticketshops und dem Begriff Erwartungswert.

b) Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit dafür, dass …
(1) genau 32 Besucher kommen.
(2) weniger als 32 Besucher kommen.
(3) mehr als 32 Besucher kommen.
(4) eine im σ-Intervall um den Erwartungswert liegende Besucherzahl auftritt.

c) Ermitteln Sie welchen Wert die Wahrscheinlichkeit p höchstens annehmen darf, damit höchstens 5 % der erscheinenden Gäste keinen Platz mehr finden und damit zu entschädigen sind.

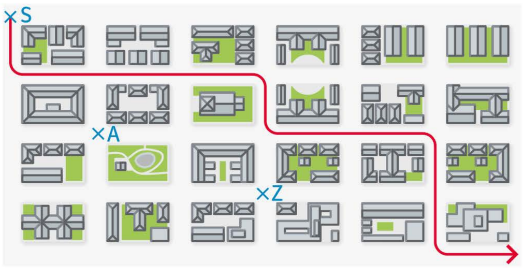
6 Man startet im Punkt S und bewegt sich an jeder Kreuzung mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach rechts oder unten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass …

a) man den eingezeichneten Weg geht.

b) man durch den Punkt A kommt.

c) man durch den Punkt Z kommt.

d) man durch die Punkte A und Z kommt.



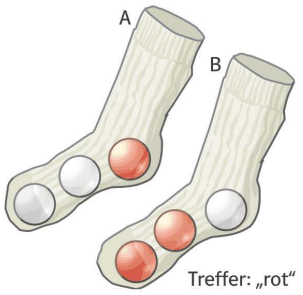
Optimal entscheiden

Im Alltag muss man sich unter Bewertung der Konsequenzen von Fehlentscheidungen häufig für eine von zwei Alternativen entscheiden. So gibt es Sportler, die sich bei unsicherer Wetterlage entscheiden, Regenausrüstung mitzunehmen, weil sie keinesfalls nass werden wollen (Pessimisten).
Andere, die darauf verzichten, weil sie der „Ballast" behindert und sie insgeheim davon ausgehen, dass es kein Unwetter geben wird, gehen ohne Regenausrüstung (Optimisten).

Unter Unsicherheit wählen wir im Alltag die Entscheidungsstrategie, die *maximalen Nutzen* erwarten lässt. Welche Strategie das ist, hängt von der individuellen Bewertung von Fehlentscheidungen ab. Kurz gesagt: Sie hängt davon ab, ob man Optimist oder Pessimist ist. Die Lernumgebung „Sockenraten" macht die Zusammenhänge transparent und berechenbar. Die dahintersteckende Idee ist Grundlage statistischer Entscheidungsverfahren.

1 Wer richtig tippt, gewinnt

Vor Leyla liegen zwei äußerlich gleich aussehende Socken A und B. Sie wählt zufällig (je mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 %) eine der beiden Socken. Dann zieht sie aus der gewählten Socke 12-mal mit Zurücklegen und nennt die Ergebnisse z. B. T N N T N N T N T T N N, d. h. 5 Treffer und 7 Nieten.
Florian muss nun tippen, ob Leyla Socke A oder Socke B erwischt hat.
Er muss sich also bzgl. der Trefferwahrscheinlichkeit zwischen den Hypothesen „A wurde gewählt" mit $p = \frac{1}{3}$ und „B wurde gewählt" mit $p = \frac{2}{3}$ entscheiden.



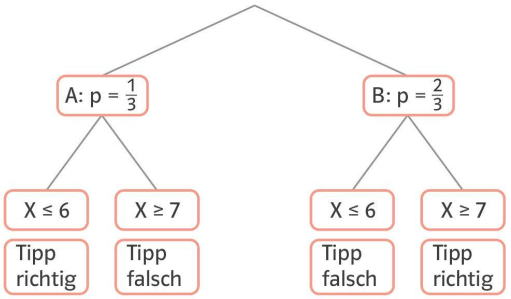
Spielen und protokollieren Sie dieses Spiel zu zweit einige Male, wobei eine Person die Rolle von Leyla, die andere die Rolle von Florian übernimmt. Entwickeln Sie eine sinnvolle Tipp-Strategie. Statt aus Socken zu ziehen, können Sie auch einen Zufallsgenerator nutzen, bei dem Sie die Trefferwahrscheinlichkeit auf $p = \frac{1}{3}$ bzw. $p = \frac{2}{3}$ einstellen.

2 Entscheidungsregeln erforschen

1. Nina tippt	bei $X \leq 6$ Treffern auf A: $p = \frac{1}{3}$,	bei $X \geq 7$ Treffern auf B: $p = \frac{2}{3}$
2. Dennis tippt	bei $X \leq 5$ Treffern auf A: $p = \frac{1}{3}$,	bei $X \geq 6$ Treffern auf B: $p = \frac{2}{3}$

a) Begründen Sie mit „gesundem Menschenverstand" ohne Rechnung, dass beide Entscheidungsregeln sinnvoll sind und mit gleicher Wahrscheinlichkeit P zu richtigen Tipps führen.

b) Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit P(Tipp ist richtig).
Nutzen Sie den nebenstehenden Baum.



c) Übertragen Sie die Entscheidungsregel auf ein Spiel, bei dem Leyla statt 12-mal 24-mal aus der Socke zieht, und untersuchen Sie, wie sich durch Verdoppelung der Versuchsanzahl die Wahrscheinlichkeit P(Tipp ist richtig) verändert.

d) Formulieren Sie mehrere plausible Entscheidungsregeln für den Fall, dass man statt 12-mal 13-mal bzw. 14-mal aus der Socke zieht, und bestimmen Sie für diese Entscheidungsregeln arbeitsteilig die Wahrscheinlichkeit P(Tipp ist richtig).

3 **Gewinnspiel: Wenn man Fehler bestraft, werden die Hypothesen unsymmetrisch**

Aus dem Entscheidungsspiel wird ein Gewinnspiel, wenn man bei jedem richtigen Tipp einen Punkt gewinnt. Wenn man A fälschlich verwirft, also fälschlich auf B tippt, werden 2 Punkte abgezogen ($a = -2$). Wenn man B fälschlich verwirft, also fälschlich auf A tippt, werden 20 Punkte abgezogen ($b = -20$).

a) Spielen Sie dieses Gewinnspiel (mit $n = 12$) so lange, bis Sie abschätzen können, ob man mit Ninas und Dennis' Strategie langfristig Gewinn macht – oder „in die Miesen" abrutscht.

b) Suchen Sie nach einer möglicherweise besseren Strategie und überprüfen Sie diese experimentell.

Gut zu wissen:

In der Statistik bezeichnet man die Hypothese, deren fälschliches Verwerfen man tunlichst vermeiden (an der man „konservativ" so lange wie möglich festhalten) sollte, als „Nullhypothese" H_0, die Alternative mit H_1. Da man beim fälschlichen Verwerfen von B viel mehr verliert, als beim fälschlichen Verwerfen von A, gilt hier also $H_0 = B$ und $H_1 = A$.

Für den eingangs erwähnten Pessimisten wäre die Annahme Regenwahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{3}$ die Nullhypothese, er wird nur bei sehr guter Wetterlage auf die Regenausrüstung verzichten.

Für den Optimisten wäre $p = \frac{1}{3}$ die Nullhypothese, von der er sich nur bei einem sehr schlechten Wetterbericht abbringen lässt.

Wenn man fälschlich auf H_0 tippt, nennt man das Fehler erster Art, wenn man fälschlich auf H_1 tippt, Fehler zweiter Art.

4 **Das Gewinnspiel analysieren**

Nico tippt auf die Hypothese A: $p = \frac{1}{3}$ (Fig. 1, Zelle B3), wenn die von Leyla genannte Trefferzahl X höchstens den Wert $x = 4$ (E6) annimmt, sonst auf B: $p = \frac{2}{3}$ (B4). Diese Spielstrategie wird durch die Zellen im Bereich F6:J6 beschrieben.

a) Bestätigen Sie:
- Falls A stimmt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass Nico 1 Punkt gewinnt 0,632, dass er 2 Punkte verliert, 0,368.
- Falls B stimmt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass Nico 1 Punkt gewinnt 0,981, dass er 20 Punkte verliert, 0,019.
- Der erwartete Gewinn beträgt 0,25 Punkte (J6).

b) Kontrollieren Sie die Angaben in Spalte J arbeitsteilig und formulieren Sie Aussagen, die Sie der Grafik aus Fig. 2 entnehmen können.

G27

	A	B	E	F	G	H	I	J
1	n	12	x	AOK	BOK	Afehl	Bfehl	E(Gewinn)
2			0	0,008	1,000	0,992	0,000	−0,488
3	A	0,33	1	0,054	1,000	0,946	0,000	−0,420
4	B	0,67	2	0,181	0,999	0,819	0,001	−0,234
5	a	−2	3	0,393	0,996	0,607	0,004	0,049
6	b	−20	4	0,632	0,981	0,368	0,019	0,250
7			5	0,822	0,934	0,178	0,066	0,036
8			6	0,934	0,822	0,066	0,178	−0,966
9			7	0,981	0,632	0,019	0,368	−2,897
10			8	0,996	0,393	0,004	0,607	−5,378
11			9	0.999	0,181	0,001	0,819	−7,599
12			10	1,000	0,054	0,000	0,946	−8,934
13			11	1,000	0,008	0,000	0,992	−9,419
14			12	1,000	0,000	0,000	1,000	−9,500

Fig. 1: Analyse verschiedener Spielstrategien

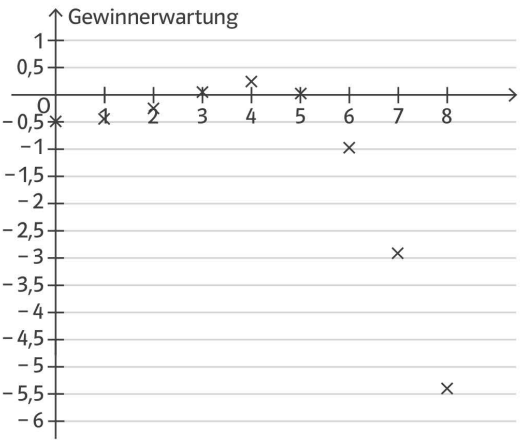


Fig. 2: Gewinnerwartung in Abhängigkeit von der Strategie

5 **Parameter variieren**

Variieren Sie die Parameter a, b und n und fassen Sie Ihre Erkenntnisse in Form von „Je-desto"-Aufgaben zusammen.

I20 **interaktive Anwendung** Gewinnspiel

X Prognose- und Konfidenzintervalle

Das können Sie bald

- mit Prognoseintervallen von einer Wahrscheinlichkeit (Modell) auf relative Häufigkeiten (Realität) schließen
- mit Konfidenzintervallen von der relativen Häufigkeit (Realität) auf das Modell (die Wahrscheinlichkeit) schließen
- den Stichprobenumfang zu einer gewünschten Genauigkeit berechnen
- Normalverteilungen zur Beschreibung von stetigen Zufallsgrößen nutzen
- Binomialverteilungen durch Normalverteilungen approximieren

Check-in

Schätzen Sie sich ein:

1. Ich kann Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten schätzen.
2. Ich kann Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Binomialverteilungen berechnen.
3. Ich kann die Formeln für Erwartungswert und Standardabweichung bei binomialverteilten Zufallsgrößen nachweisen.
4. Ich kann Bernoulli-Experimente simulieren

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen,** Seite 422
zu 2. **Beispiel 1,** Seite 340
zu 3. **Merkkasten,** Seite 335
Merkkasten, Seite 343
zu 4. **Beispiel 2,** Seite 302

Test

Lösungen, Seite 528

1 Wahrscheinlichkeiten schätzen

Helena, Susanne und Jan experimentieren mit Reißnägeln einer bestimmten Sorte. Helena erhält bei 250 Würfen 177-mal „Kopf", Susanne in 500 Würfen 342-mal „Kopf" und Pascal in 750 Würfen 466-mal „Kopf". Sie schätzen die Wahrscheinlichkeiten unterschiedlich zu 70,8 % bzw. 68,4 % bzw. 62,1 %.

a) Erläutern Sie, wie die Drei vorgegangen sind.
b) Erläutern Sie, welchen Schätzwert Sie selbst abgeben würden.

2 Binomialverteilungen berechnen

Berechnen Sie $P(X = 4)$; $P(X \leq 4)$; $P(X \geq 3)$; $P(1 \leq X \leq 5)$ und $P(X \leq 1 \text{ oder } X \geq 5)$ für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern

a) $n = 50$ und $p = 0{,}05$,
b) $n = 100$ und $p = 0{,}03$.

3 Erwartungswert und Standardabweichung

Ein Bernoulli-Experiment mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0{,}8$ wird $n = 100$-mal durchgeführt.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ dafür, dass X einen Wert annimmt, der im σ-Intervall liegt.

4 Bernoulli-Experimente simulieren

Simulieren Sie 100 Durchführungen eines Zufallsexperiments mit einer binomialverteilten Zufallsgröße X ($n = 50$; $p = 0{,}3$). Stellen Sie Ihre Ergebnisse als Histogramm dar.
Berechnen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung Ihrer Ergebnisse und vergleichen Sie mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung von X.

Faustregel zur Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten

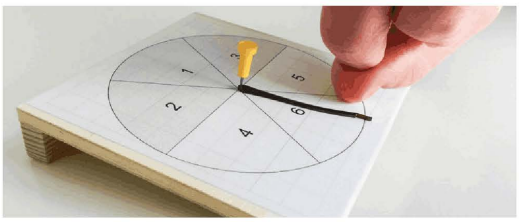
Lerneinheit 3 und 4
Seite 372 und 377

In der beurteilenden Statistik schließt man von relativen Häufigkeiten h (von der Realität) auf die Wahrscheinlichkeiten p (das mathematische Modell). Man sagt auch, dass man von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit schließt.
Eine **Faustregel** lautet: „Bezweifle, dass die Wahrscheinlichkeit p ein gutes Modell ist, wenn bei einer Stichprobe vom Umfang n die relative Häufigkeit h um mehr als $\frac{1}{\sqrt{n}}$ von p abweicht."
Man spricht dann von einer statistisch **signifikanten Abweichung** und wird p eher nicht als Modell verwenden.

Die Faustregel in Aktion: Konfidenzintervalle

1. Experimentieren

Wenn man den Zeiger des Glücksrads mit den Feldern 1 bis 6 auf einer horizontalen Unterlage vom Feld 6 aus im Uhrzeigersinn schnippt, landet er mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % in der oberen Hälfte bei {1; 2; 3} und mit einer Wahrscheinlichkeit von 33,3 % im linken Drittel bei {2; 4}.



a) Prüfen Sie in einem Experiment mithilfe der Faustregel, ob dies auch der Fall ist, wenn man das Glücksrad auf einer schiefen Ebene mit einer Steigung von 10 % betreibt. Lassen Sie eine Haar- oder Büroklammer 100-mal um einen Pin rotieren. Führen Sie eine Strichliste.
b) Fassen Sie die Ergebnisse Ihrer Lerngruppe zusammen und prüfen Sie sie erneut.

D34 **Dokument** Glücksrad-vorlage

2. Simulieren

Wie sicher erkennt man mithilfe der Faustregel, ob Münzen gezinkt sind?

a) Simulieren Sie den n = 25-fachen Wurf einer gezinkten Münze mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0,7 für „Wappen". Bestimmen Sie die relative Häufigkeit h („Wappen").
b) Prüfen Sie, ob man bei Ihrer Simulation nach dem Anwenden der obigen Faustregel die „Fairness" der Münze mit p („Wappen") = 0,5 schon nach 25 Münzwürfen bezweifeln kann.
c) Wiederholen Sie die Simulation mehrfach und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Faustregel bei einer mit p = 0,7 gezinkten Münze nach 25 Würfen signalisiert, dass man p = 0,5 bezweifeln sollte.
d) Führen Sie die Untersuchung aus Teilaufgabe c) arbeitsteilig mit n = 100, n = 400 und n = 1600 durch.
e) Fassen Sie Ihre Erkenntnisse aus den Teilaufgaben c) und d) in Worten zusammen.

D1 **MMS-Anleitung** Simulation und Auswertung von Zufalls-experimenten

3. Reflektieren – den Sinn der Faustregel begründen

Überprüfen Sie an selbst gewählten Beispielen mithilfe der Binomialverteilung für verschiedene n und p, dass es selten (in höchstens 5 % aller Fälle) vorkommt, dass die relative Häufigkeit h mehr als $\frac{1}{\sqrt{n}}$ von der Wahrscheinlichkeit p abweicht.
Erläutern Sie damit den Sinn der Faustregel.

4. Vertrauen (Konfidenzintervalle)

Eine Münze mit unbekannter Trefferwahrscheinlichkeit p („Wappen") lieferte bei n = 100 Würfen die relative Häufigkeit h („Wappen") = 0,38.

a) Untersuchen Sie, welche der 17 Trefferwahrscheinlichkeiten p = 0,1; 0,15; 0,2; … 0,85; 0,9 man auf Grundlage der Faustregel nicht zu bezweifeln bräuchte.
Man sagt: Diese Wahrscheinlichkeiten sind vertrauenswürdige Modelle und sammelt sie im Konfidenzintervall, das zur relativen Trefferhäufigkeit h = 0,38 passt.
b) Bestimmen Sie entsprechend diejenigen der obigen 17 Wahrscheinlichkeiten, die zu den vertrauenswürdigen Modellen gehören, wenn man 608-mal „Wappen" in 1600 Versuchen (h = 0,38) erhielte, und kommentieren Sie die Unterschiede zu Teilaufgabe a).

confidere
(lat.) vertrauen:
Man vertraut darauf, dass die unbekannte Wahrscheinlichkeit im Konfidenzintervall liegt.

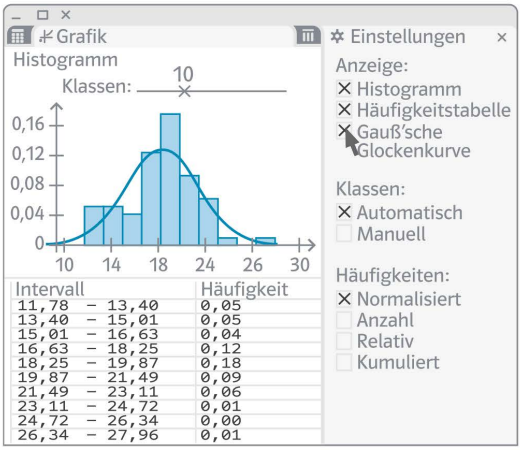
Die Gauß'sche Glockenfunktion

Lerneinheit 5
Seite 380

1. Ob in Verpackungen so viel drin ist wie draufsteht?

a) Bilden Sie Gruppen und entscheiden Sie sich in Ihrer Gruppe für ein Produkt, wie z. B. Schokolinsen, Pralinen oder Kartoffeln, mit aufgedruckten Sollgewichten. Wiegen Sie viele Verpackungen möglichst genau aus. Notieren Sie die Gewichte in der Tabellenkalkulation Ihres MMS und berechnen Sie den Mittelwert $\bar{x}$ und die empirische Standardabweichung s der Gewichte.

b) Stellen Sie die Verteilung der Gewichte als Histogramm dar wie in der Abbildung. Beschreiben Sie
- die Bedeutung des Schiebereglers *Klassen*,
- die Bedeutung der Knöpfe *Kumuliert*, *Anzahl* und *Relativ*.



Intervall	Häufigkeit
11,78 – 13,40	0,05
13,40 – 15,01	0,05
15,01 – 16,63	0,04
16,63 – 18,25	0,12
18,25 – 19,87	0,18
19,87 – 21,49	0,09
21,49 – 23,11	0,06
23,11 – 24,72	0,01
24,72 – 26,34	0,00
26,34 – 27,96	0,01

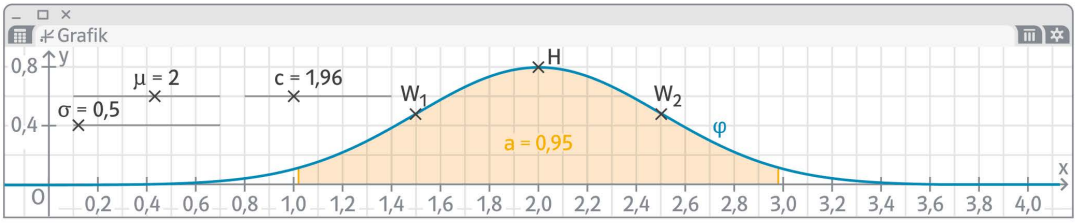
c) Wenn man *Normalisiert* wählt, lässt sich eine zugehörige „Gauß'sche Glockenkurve" einblenden. Erforschen Sie, wie sich die Skalierung der Hochachse bei *Normalisiert* ändert, und zeigen Sie, dass die gezeichnete Glocke ihr Maximum beim Mittelwert $\bar{x}$ hat und die Wendestellen der Glocke bei $\bar{x} - s$ und $\bar{x} + s$ liegen.

d) Variieren Sie bei eingeblendeter Glocke die Klassenzahl und beurteilen Sie, wie gut die Gauß-Glocke das Histogramm ihrer Gewichtsverteilung beschreibt, und ob die Gewichtsangaben eingehalten werden.

Wenn Sie auf das Erforschen der Möglichkeiten Ihres MMS verzichten wollen, können Sie in dieser Erkundung auch die interaktive Anwendung nutzen.

I21 **interaktive Anwendung** Histogramm und Klassen

2. Ein Blick auf die Gauß-Glocke durch die Brille der Analysis



Der Graph der Gauß'schen Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\,\sigma}$ ist – wie ihr Name vermuten lässt – glockenförmig. Ihr MMS kann Sie bei der Suche nach dem Funktionsterm der Glockenfunktion und nach Antworten auf folgende Fragen unterstützen.

a) Finden Sie heraus, wie (mit welchen Befehlen) Ihr MMS die Graphen der Gauß'schen Glockenfunktionen zeichnet.

b) Erläutern Sie, welchen Einfluss die Parameter μ und σ auf den Graphen der Glockenfunktion haben, und wie sie mit Extrem- und Wendepunkten zusammenhängen.

c) Notieren Sie den Term der Glockenfunktion und begründen Sie mithilfe des Terms die in Teilaufgabe b) gemachten Entdeckungen.

d) Bestimmen Sie die Integrale $\int_{\mu - c\cdot\sigma}^{\mu + c\cdot\sigma} \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx$ für $c = 1, 2, 3$. Halten Sie die Ergebnisse in einer Tabelle fest und stellen Sie Beziehungen zur Binomialverteilung her.

e) Suchen Sie nach Werten für c, für die $\int_{\mu - c\cdot\sigma}^{\mu + c\cdot\sigma} \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx$ die Werte 0,95 und 0,99 annimmt, und ergänzen Sie damit die Tabelle aus Teilaufgabe d).

f) Zeigen Sie, dass $\int_{\mu - c\cdot\sigma}^{\mu + c\cdot\sigma} \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx \approx 1$ gilt, wenn man c sehr groß wählt.

I22 **interaktive Anwendung** Die Gauß'sche Glockenkurve durch die Brille der Analysis

1 Prognoseintervalle für absolute Häufigkeiten

Reimund macht seinem Kurs folgendes Angebot: „Ihr seid 30 Jugendliche. Ich verwette mein Fahrrad. Ihr bekommt es, wenn eine oder einer von euch bei 100 Münzwürfen weniger als 30-mal oder mehr als 70-mal „Wappen" erhält. Wenn das keiner von euch schafft, dann ladet ihr mich zu einem Kaffee ein. Die Wette gilt!" Wer wird gewinnen? Diskutieren Sie.

Mit Prognoseintervallen schließt man von gegebenen Wahrscheinlichkeiten auf zu erwartende Häufigkeiten. Umgekehrt sucht man später mit ihrer Hilfe vertrauenswürdige – d.h. zu einer beobachteten relativen Häufigkeit passende – Wahrscheinlichkeiten.

Die Bedeutung der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ einer binomialverteilten Zufallsgröße X ergibt sich daraus, dass im **1σ-Intervall** $[\mu - 1\sigma;\ \mu + 1\sigma]$ um den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ näherungsweise $P = 68{,}3\%$ aller Treffer liegen. Wenn man p kennt, kann man hiermit prognostizieren, wo deutlich mehr als die Hälfte (ca. 68,3%) aller Treffer liegen werden. Deswegen spricht man vom 1σ (oder 68,3%) – **Prognoseintervall**. Tatsächlich ergibt sich z.B. für $n = 800$ und $p = 0{,}1$ mit $\mu = 80$ und $\sigma \approx 8{,}49$ $P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) = P(71{,}51 \le X \le 88{,}49)$ $= P(72 \le X \le 88) \approx 0{,}6837$. Dabei berücksichtigt man nur ganzzahlige Ergebnisse im Intervall (man rundet ganzzahlig nach innen). Die folgenden Tabellen vermitteln einen Eindruck von der Güte der Näherung auch für andere Werte von p und n:

p = 0,5

n	400	800	1200	1600	2000
P	0,6821	0,6945	0,6877	0,6825	0,6857

p = 0,1

n	400	800	1200	1600	2000
P	0,6796	0,6837	0,6878	0,6819	0,6858

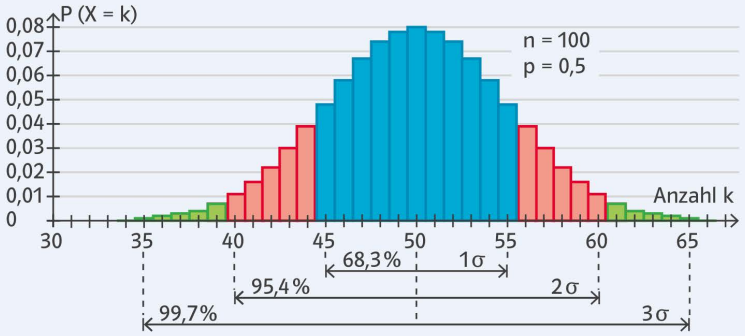
Entsprechend erhält man für das Doppelte bzw. das Dreifache von σ die Näherungen $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$ und $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$.
Die Tabelle auf dem Rand zeigt, welche Vielfache c von σ man wählen muss, um Prognoseintervalle zu erhalten, deren Wahrscheinlichkeiten die Werte 90%, 95% oder 99% annehmen.

c	P
1	68,3%
1,64	90%
1,96	95%
2	95,4%
2,58	99%
3	99,7%

Wahrscheinlichkeiten der Prognoseintervalle – die Sigma-Regeln
Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern n und p, dem Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ erhält man folgende Näherungen für die Wahrscheinlichkeit P der $c \cdot \sigma$-Prognoseintervalle:

$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \approx 68{,}3\%$
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\%$
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\%$

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\%$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\%$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99\%$



Man kann sich für praktische Zwecke auf die angegebenen Wahrscheinlichkeiten P verlassen, wenn die **Laplace-Bedingung** $\sigma > 3$ erfüllt ist.

Die zum jeweiligen $c \cdot \sigma$-Prognoseintervall gehörende Wahrscheinlichkeit P (wie z. B. 95,4 %) nennt man auch **Sicherheitswahrscheinlichkeit**. Damit drückt man aus, wie sicher man sich **vor** Durchführung einer Bernoulli-Kette ist, dass die Trefferzahl im jeweiligen Prognoseintervall liegen wird. Sollte man eine Häufigkeit außerhalb des 2σ- oder $1{,}96\sigma$-Prognoseintervalls beobachten, spricht man von einer **statistisch signifikanten** Abweichung. Man hat Grund, die angenommene Wahrscheinlichkeit (als nicht vertrauenswürdig) zu bezweifeln.

Mitunter sagt man auch: Eine angenommene Wahrscheinlichkeit p ist mit einer beobachteten Häufigkeit X verträglich, wenn X im 2σ-Prognoseintervall von p liegt.

Beispiel **1,96 σ-Prognoseintervall und seine Sicherheitswahrscheinlichkeit bestimmen**

Ein Würfel wird 120-mal geworfen. X zählt die Anzahl der Sechser („Treffer").

a) Prüfen Sie, ob die Laplace-Bedingung erfüllt ist.

b) Bestimmen Sie das $1{,}96\sigma$-Prognoseintervall für die Trefferanzahl.

c) Prüfen Sie mithilfe der Binomialverteilung, wie sehr die exakte Wahrscheinlichkeit des $1{,}96\sigma$-Intervalls vom Tabellenwert $P = 95\,\%$ abweicht.

d) Formulieren Sie Aussagen zur inhaltlichen Bedeutung des Prognoseintervalls.

Lösung

a) Wegen $\sigma = \sqrt{120 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 4{,}0825 > 3$ ist die Laplace-Bedingung erfüllt.

b) Man berechnet $[\mu - 1{,}96\sigma;\ \mu + 1{,}96\sigma] = [11{,}998;\ 28{,}002]$.

c) Mithilfe der Binomialverteilung $B_{120;\,\frac{1}{6}}$ berechnet man den exakten Wert der Wahrscheinlichkeit dafür, dass X im $1{,}96\sigma$-Prognoseintervall liegt mit $P(11{,}998 \leq X \leq 28{,}002) = P(12 \leq X \leq 28) = 0{,}9637$. Dieser Wert weicht um 0,0137 vom Tabellenwert 0,95 ab. Die prozentuale Abweichung $\frac{0{,}0137}{0{,}96} \approx 0{,}014$ entspricht ca. 1,4 %.

Eine Abweichung in dieser Größenordnung ist in der Praxis unbedeutend.

d) Vor Versuchsdurchführung erwartet man bei 120-maligem Würfeln mit ca. 95 %iger Sicherheit (der genaue Wert ist hier $P = 96{,}4\,\%$) eine Trefferanzahl im Intervall $[12;\ 28]$.
Das 2σ-Prognoseintervall $[11{,}84;\ 28{,}17]$ enthält keine zusätzlichen Trefferanzahlen.
Bei weniger als 12 oder mehr als 28 Treffern würde man von einer statistisch signifikanten Abweichung sprechen. Man hätte dann Anlass, an der Annahme zu zweifeln, dass „6" mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ erscheint.

Aufgaben

Zur Kontrolle der Aufgaben kann die interaktive Anwendung genutzt werden.

I23 **interaktive Anwendung** Sigmaregeln und Prognoseintervalle

→ **Lerntipp** Seite 365, Beispiel

○ **1** a) Bestimmen Sie für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern n und p jeweils den Erwartungswert, die Standardabweichung und das 2σ-Prognoseintervall.

b) Berechnen Sie den genauen Wert des 2σ-Prognoseintervalls mit der Binomialverteilung und vergleichen Sie mit dem Tabellenwert 95,4 %.
(1) $p = 0{,}5$ und $n = 10;\ 25;\ 50;\ 100$ (2) $n = 50$ und $p = \frac{1}{6};\ 0{,}25;\ 0{,}4;\ 0{,}8$

○ **2** Maike würfelt 100-mal. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Sechser.

a) Geben Sie an, in welchem Intervall die Werte von X mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegen sollten.

b) Maike hat 25 Sechser gewürfelt. Prüfen Sie, ob eine signifikante Abweichung von $p = \frac{1}{6}$ vorliegt, sodass ihre Freundin Anna bezweifeln darf, dass Maikes Würfel fair ist.

○ **3** Ein Glücksrad mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0{,}4$ wird $n = 200$-mal gedreht. Berechnen Sie das um den Erwartungswert symmetrische Prognoseintervall, in dem man die Trefferanzahl mit der Wahrscheinlichkeit P erwarten kann.

a) $P \approx 68{,}3\,\%$ b) $P \approx 95\,\%$ c) $P \approx 95{,}4\,\%$ d) $P \approx 99\,\%$ e) $P \approx 99{,}7\,\%$ f) $P = 100\,\%$

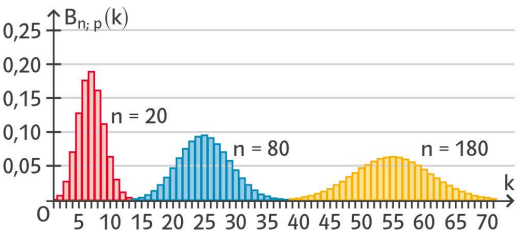
○ **4** Bestimmen Sie, wie lang eine Bernoulli-Kette mit der Trefferwahrscheinlichkeit p sein muss, damit die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist.

a) $p = 0{,}5$ **b)** $p = 0{,}25$ **c)** $p = 0{,}75$ **d)** $p = 0{,}1$

○ **5** Die Abbildung zeigt die Histogramme zu $B_{n;\,p}$ für $n = 20$, $n = 80$, $n = 180$ und $p = 0{,}3$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, die zu den Säulen über den Stellen $\mu \pm \sigma$ gehören.

b) Überprüfen Sie an diesem Beispiel die Aussage, dass die Wahrscheinlichkeit P des $1{,}96\,\sigma$-Prognoseintervalls umso näher bei 0,95 liegt, je größer σ wird.



Test 1

Lösungen, Seite 529

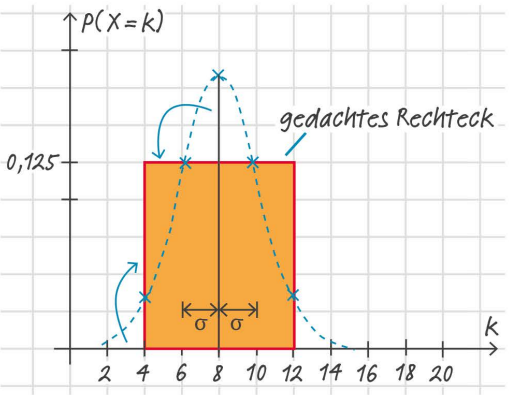
○ **6** Ein Würfel wird 100-mal geworfen. X zählt die Anzahl der Sechsen.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

b) Bestimmen Sie das $2\,\sigma$-Prognoseintervall. Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeit des $2\,\sigma$-Prognoseintervalls mit dem Näherungswert, den die Sigmaregel liefert.

◒ **7** Jim: „Wenn ich das Histogramm einer Binomialverteilung skizzieren soll, gehe ich so vor:

- Ich überschlage die Kennwerte μ und σ.
- Ich skizziere über dem $3\,\sigma$-Intervall eine Glocke mit Maximalstelle bei μ und Wendestellen bei $\mu \pm \sigma$.
- Ich beschrifte die Hochachse so, dass die Fläche unter der Glocke 1 wird. Dabei hilft über dem $2\,\sigma$-Intervall ein gedachtes Rechteck, das von der Glocke gleich viel abschneidet wie hinzufügt. Da auch das Rechteck dann die Fläche 1 hat, ergibt sich seine Höhe zu $\frac{1}{4\sigma}$."



a) Zeigen Sie, dass Jim hier das Histogramm zu $B_{20;\,0{,}4}$ skizziert hat.

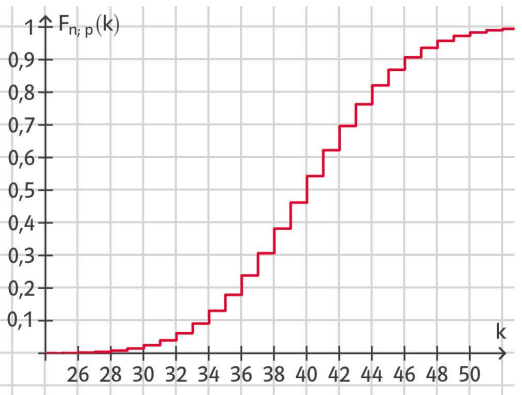
b) Skizzieren Sie nach Jims Idee das Histogramm zu $B_{200;\,0{,}6}$.

◒ **8** Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}5$. Es wird 20-mal zufällig ein Wert von X bestimmt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer dieser Werte außerhalb des $2\,\sigma$-Prognoseintervalls liegt.
Diskutieren Sie, wie sich das Ergebnis ändert, wenn man n vergrößert.

◒ **9** Der Wochenspiegel ist eine Werbezeitung mit einer Auflage von 5000 Exemplaren, die von 80 % der Haushalte ungelesen entsorgt wird. Erläutern Sie, welche Aussage ein Prognoseintervall über die Anzahl X der ungelesen entsorgten Zeitungen gestattet.

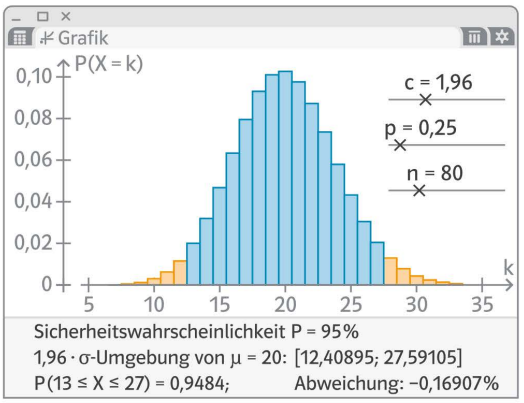
◒ **10** **a)** Die Grafik veranschaulicht $F_{100;\,p}(k)$. Schätzen Sie μ und σ.

b) Kontrollieren Sie durch Ablesen die Aussage der Sigmaregel.



11 **Die Prognoseintervalle und die Laplace-Bedingung systematisch prüfen**

SP In der Abbildung wurde eine $c \cdot \sigma$-Regel an einem Beispiel überprüft.



a) Erläutern Sie, um welche Regel es sich handelt und kontrollieren Sie die angegebenen Zahlen mit Ihrem MMS. Kommentieren Sie den Verlauf der Prüfung und fassen Sie das Prüfergebnis in eigenen Worten zusammen. Die Wortliste auf dem Rand kann helfen.

b) Suchen Sie (arbeitsteilig für einen der c-Werte 1; 1,64; 1,96; 2; 2,58; 3) nach Parametern n und p, bei denen die prozentualen Abweichungen der Wahrscheinlichkeiten der $c \cdot \sigma$-Intervalle von den tabellierten Werten (68,3 %; 90 %, 95 %, 95,4 %, 99 % und 99,7 %) besonders groß sind, obwohl die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist. Nutzen Sie bei der Suche Ihr MMS oder die interaktive Anwendung.

c) Mia ist der Meinung, dass die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ zu einschränkend ist und dass die Sigmaregeln schon bei $\sigma > 1{,}5$ sehr gute Ergebnisse liefern.
Suchen Sie im Bereich $1{,}5 < \sigma < 3$ nach Parametern n und p, bei denen die prozentualen Abweichungen von den tabellierten Wahrscheinlichkeiten besonders groß werden, und nehmen Sie Stellung zu Mias Aussage.

Wortliste
- Tabellenwert P = 95 %
- runden nach innen
- prozentuale Abweichung vom Tabellenwert
- Laplace-Bedingung

I23 **interaktive Anwendung** Sigmaregeln und Prognoseintervalle

Test 2

Lösungen, Seite 529

12 Ein Kurs hat 28, eine Schule 700 Schülerinnen und Schüler. Nehmen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man dieses Jahr an einem Sonntag Geburtstag feiern kann, $p = \frac{1}{7}$ beträgt. Berechnen Sie für den Kurs und die Schule jeweils das $1{,}96\,\sigma$- und das $3\,\sigma$-Prognoseintervalle zu $p = \frac{1}{7}$ und formulieren Sie Aussagen, die deutlich machen, wofür Prognoseintervalle nützlich sind.

13 Eine Zufallsgröße X, die die Werte 1, 2, …, n je mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ annimmt, hat den Erwartungswert $\mu = \frac{n+1}{2}$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$.

a) Begründen Sie: Für $n = 2$ ergibt sich die Standardabweichung eines Bernoulli-Experiments.

b) Kontrollieren Sie die Formeln für $n = 6$ (Würfel) durch Nachrechnen.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der $1\,\sigma$-, $2\,\sigma$-, $3\,\sigma$-Prognoseintervalle um den Erwartungswert μ für $n = 10, 100, 1000$ und vergleichen Sie mit den zugehörigen Tabellenwerten.

d) Begründen Sie die Unterschiede anschaulich.

14 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Das $2\,\sigma$-Prognoseintervall ist größer als das $1{,}96\,\sigma$-Prognoseintervall.

b) Das $2\,\sigma$-Prognoseintervall ist wahrscheinlicher als das $1{,}96\,\sigma$-Prognoseintervall.

c) Je größer σ ist, desto näher liegt die Wahrscheinlichkeit des $2\,\sigma$-Prognoseintervalls bei 0,954.

Grundwissen Test — Biquadratische Gleichungen lösen

Merkkasten, Seite 14
Lösungen, Seite 529

G **15**

a) $(x^2 - 14)^2 = 5(6x^2 - 49)$

b) $(x^2 + 25)^2 = 111x^2 - 275$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

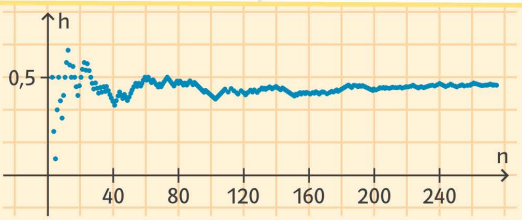
d) $(6x^2 - 11)(6x^2 + 11) = 5(101x^2 - 181)$

e) $(2x^2 - 11)^2 - 6 = 29(x^2 - 1)$

f) $(x^2 + 4)^2 - 25(x^2 + 4) + 100 = 0$

2 Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten

Nina: „Die relative Häufigkeit h ist ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit p. Er ist umso genauer, je länger die Versuchsserie ist."
Lina: „So kann man das nicht sagen, die relative Häufigkeit h driftet bei langen Versuchsserien doch oft auch von der Wahrscheinlichkeit p weg."
Erläutern Sie, was Lina meint und untersuchen Sie mit einer Simulation, wie oft h (Wappen) z. B. nach 400 Münzwürfen weiter von 0,5 entfernt ist als nach 100 Würfen.



Verlauf der relativen Häufigkeit h (Wappen) beim 400-maligen Werfen einer Münze.

Beim Messen von Größen sind Messfehler unvermeidlich. Die Messwerte streuen um die „wahren" Größen. Auch relative Häufigkeiten streuen zufällig um die Wahrscheinlichkeit. Im Folgenden wird begründet, dass sich deren Streuungen halbieren, wenn man den Versuchsumfang vervierfacht. Dazu betrachtet man Prognoseintervalle auch für relative Häufigkeiten.

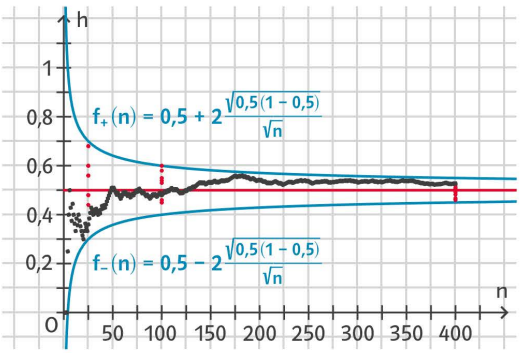
Bei einem n-stufigen Bernoulli-Experiment mit Trefferwahrscheinlichkeit p und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ gilt nach der Sigmaregel für die absolute Trefferhäufigkeit X mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von ca. 95,4 % (kurz mit ca. 95,4 % Sicherheit)
$np - 2\sqrt{np(1-p)} \le X \le np + 2\sqrt{np(1-p)}$.
Für die relative Trefferhäufigkeit $h = \frac{X}{n}$ erhält man hieraus nach Division durch n
$\frac{np}{n} - 2\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} \le \frac{X}{n} \le \frac{np}{n} + 2\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n}$, also $p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le h \le p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.
Die relative Häufigkeit h liegt also mit einer Sicherheit von ca. 95,4 % im Intervall $\left[p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$. Dieses Intervall bezeichnet man als das 2σ-**Prognoseintervall der relativen Häufigkeit** zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,4 %.
Allgemein bezeichnet man $\left[p - c\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + c\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ als Prognoseintervall zur entsprechenden Sicherheitswahrscheinlichkeit P gemäß der Tabelle auf dem Rand.

$\sqrt{p(1-p)}$ kann nicht größer als $\frac{1}{2}$ werden. Deswegen lässt sich das Prognoseintervall der relativen Häufigkeiten durch $\left[p - \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ abschätzen.
Für die Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,4 % mit $c = 2$ vereinfacht sich die Abschätzung zu $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Deswegen spricht man vom $\frac{1}{\sqrt{n}}$-**Gesetz** für relative Häufigkeiten.

c	P
1	68,3 %
1,64	90 %
1,96	95,0 %
2	95,4 %
2,58	99,0 %
3	99,7 %

Dass $\sqrt{p(1-p)} < \frac{1}{2}$ gilt, wird auf Seite 371 in Aufgabe 12 gezeigt.

Veranschaulichung
Die Grafik zeigt die relativen Trefferhäufigkeiten bei einem Bernoulli-Experiment mit $p = 0{,}5$ und $n = 400$. Die roten Punkte markieren relative Häufigkeiten an den Stellen $n = 25$, 100 und 400 bei 9 anderen Versuchsserien. Man erkennt: Je höher n ist, desto weniger schwanken die relativen Häufigkeiten h um die Trefferwahrscheinlichkeit p. An jeder festen Stelle n liegen sie „fast immer" im Wurzeltrichter, der durch $f_{\pm}(n) = p \pm 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ begrenzt wird.



$\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz: Das Prognoseintervall für relative Häufigkeiten

Bei einem n-stufigen Bernoulli-Experiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit p liegt die relative Trefferhäufigkeit h mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit P im Prognoseintervall $\left[p - c\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + c\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$, wobei c und P wie in der Tabelle zusammhängen.

Man kann das Intervall duch $\left[p - \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ abschätzen. Für die Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,4 % vereinfacht sich die Abschätzung zu $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

c	P
1	68,3 %
1,64	90 %
1,96	95,0 %
2	95,4 %
2,58	99,0 %
3	99,7 %

Signifikante Abweichungen – Wahrscheinlichkeitsangaben bezweifeln

Mit dem $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz schließt man von einer bekannten Wahrscheinlichkeit p über das Prognoseintervall auf die relative Häufigkeit h. Man kann die Sichtweise auch herumdrehen: Wenn man sich bei einer Wahrscheinlichkeitsangabe p unsicher ist und eine relative Häufigkeit h außerhalb des 2σ- oder 1,96σ-Prognoseintervalls beobachtet, sagt man: „Die Abweichung zwischen der angenommenen Wahrscheinlichkeit p und der beobachteten relativen Häufigkeit h ist statistisch signifikant. Es besteht Anlass, die Wahrscheinlichkeitsangabe p zu bezweifeln."

Beispiel 1 **Prognoseintervalle bestimmen**

Ein Laplace-Würfel wird 100-mal gewürfelt.

a) Schätzen Sie das 2σ-Prognoseintervall für die relative Häufigkeit der Sechser ab.

b) Berechnen Sie das 2σ-Prognoseintervall exakt.

c) Beschreiben Sie in Worten die Bedeutung Ihrer Rechenergebnisse.

Lösung

a) Man nutzt $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ und erhält mit $n = 100$, $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}1$ und $p = \frac{1}{6}$ die Abschätzung $\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] \approx [0{,}17 - 0{,}1; 0{,}17 + 0{,}1] = [0{,}07; 0{,}27]$.

b) Die exakte Rechnung liefert das etwas kleinere Intervall $\left[\frac{1}{6} - 2\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}{\sqrt{100}}; \frac{1}{6} + 2\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0{,}092; 0{,}241]$.

c) Wenn man 100-mal würfelt, erwartet man, dass die relative Häufigkeit der Sechser mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von ca. 95,4 % in $[0{,}092; 0{,}241]$ liegen wird. Da die Abschätzung ein größeres Intervall liefert, wird die relative Häufigkeit noch sicherer im Intervall $[0{,}07; 0{,}27]$ liegen.

Beispiel 2 **Abweichungen auf statistische Signifikanz prüfen**

Nehmen Sie an, bei einem handgesägten Würfel gilt $p(3) = \frac{1}{6}$.

a) Bestimmen Sie für $n = 100$ und $n = 1000$ das 1,96σ-Prognoseintervall für die relative Häufigkeit der Augenzahl „3".

b) Untersuchen Sie jeweils, ob die relative Häufigkeit $h = 0{,}21$ eine signifikante Abweichung von der Modellannahme $p(3) = \frac{1}{6}$ darstellt.

c) Kommentieren Sie das Ergebnis.

Lösung

a) Die 1,96σ-Prognoseintervalle sind $\left[\frac{1}{6} - 1{,}96\frac{\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}{\sqrt{100}}; \frac{1}{6} + 1{,}96\frac{\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0{,}094; 0{,}24]$.

Für $n = 1000$ ergibt sich entsprechend $[0{,}144; 0{,}19]$.

b) Da die relative Häufigkeit $h = 0{,}21$ bei $n = 100$ im 1,96σ-Prognoseintervall zu $p = \frac{1}{6}$ liegt, liegt sie erst recht im 2σ-Prognoseintervall, also liegt noch keine statistisch signifikante Abweichung vor. Für $n = 1000$ weicht die gleiche relative Häufigkeit aber statistisch signifikant von der angenommenen Wahrscheinlichkeit ab, weil sie außerhalb des 2σ-Prognoseintervalls $[0{,}143; 0{,}19]$ liegt.

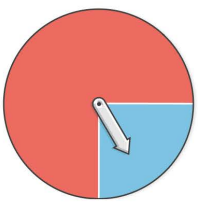
c) Je größer der Versuchsumfang wird, desto eher werden die von einer angenommenen Wahrscheinlichkeit p beobachteten Abweichungen statistisch signifikant.

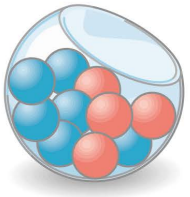
Aufgaben

1 a) Bestimmen Sie zur Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ für den Stichprobenumfang $n = 25$, $n = 100$, $n = 400$ jeweils das 1σ-, 2σ-, und das 3σ-Prognoseintervall der relativen Häufigkeit.
b) Erläutern Sie für $n = 400$ die Bedeutung des 3σ-Prognoseintervalls.
c) Lars wundert sich, dass in Teilaufgabe a) das Intervall $[0{,}4; 0{,}6]$ mehrfach vorkommt. Kommentieren Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe a).

Lerntipp
Seite 369, Beispiel 1

2 a) Das Glücksrad soll 400-mal gedreht werden. „Blau" gilt als Treffer. Bestimmen Sie das $1{,}96\sigma$- und das $2{,}58\sigma$-Prognoseintervall für die relative Trefferhäufigkeit.
b) Berechnen Sie analog die Intervalle für das Ziehen mit Zurücklegen aus dem Gefäß.



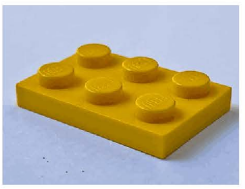


3 Ein Würfel wird 400-mal gewürfelt.
Bestimmen Sie das 2σ-Prognoseintervall für die relative Häufigkeit der „6"
a) mithilfe einer groben Abschätzung. b) mit einer genauen Rechnung.

4 Ein Eichzeichen auf Verpackungen garantiert, dass die Gewichtsangabe im Mittel eingehalten wird. Weil Produzenten nichts verschenken, liegt die Annahme nahe, dass die Packungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % über- und mit 50 % untergewichtig sind.
a) Bestimmen Sie mit dieser Annahme für den Stichprobenumfang $n = 144$ das 2σ-Prognoseintervall für die relative Häufigkeit h (+) übergewichtiger Packungen.
b) Niko: „Ich hatte 56 % übergewichtige Packungen. Das ist eine signifikante Abweichung nach oben und ich darf bezweifeln, dass die Packungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % übergewichtig sind." Überprüfen und kommentieren Sie Nikos Aussage.

Lerntipp
Seite 369, Beispiel 2

5 Linus nimmt an, dass ein flacher Klemmbaustein mit Wahrscheinlichkeit 50 % auf „Fuß" landet.
a) Bestimmen Sie aufgrund dieser Annahme für 80 Würfe das 2σ-Prognoseintervall der relativen Häufigkeit für „Fußlage".
b) Im Experiment trat die Fußlage nur in 35 % aller Würfe auf. Untersuchen Sie, ob die Abweichung statistisch signifikant ist, und beurteilen Sie, ob Anlass besteht, an der Wahrscheinlichkeitsangabe 50 % zu zweifeln.

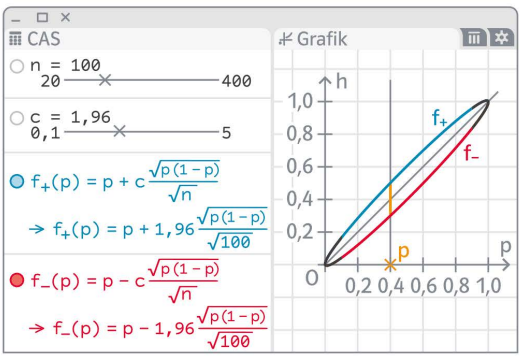


Test 1

Lösungen, Seite 529

6 a) Ein Glücksrad soll Treffer mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{4}$ liefern. Berechnen Sie das 2σ-Prognoseintervall für die relative Trefferhäufigkeit bei 200 Versuchen.
b) Die relative Häufigkeit in 800 Versuchen war $h = 0{,}35$. Prüfen Sie, ob Anlass besteht, $p = 0{,}25$ zu bezweifeln.

7 Aelia hat über dem Intervall $[0; 1]$ die Graphen zweier Funktionen gezeichnet. Sie behauptet: „An der vertikalen Strecke kann man Prognoseintervalle ablesen."
a) Erläutern Sie, was Aelia meint und kontrollieren Sie die Aussage durch eine eigene Rechnung.
b) Erläutern Sie, wie sich die Grafik ändert, wenn man (1) n vergrößert bzw. (2) c verkleinert. Prüfen Sie Ihre Antworten mithilfe der interaktiven Anwendung.



I24 **interaktive Anwendung**
Prognoseellipse

◒ **8** Beim Ziehen (mit Zurücklegen) aus dem Gefäß gilt „a“ als Treffer und „h“ als Niete.
Begründen Sie: Die Prognoseintervalle der relativen Häufigkeit für Niete und Treffer haben die gleiche Länge, egal wie groß der Stichprobenumfang n ist.
Verallgemeinern Sie die Aussage.

◒ **9** **Wahr oder falsch?**
Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Wenn man die Länge des Prognoseintervalls verdoppelt, dann verdoppelt sich auch die Sicherheitswahrscheinlichkeit, mit der die relative Trefferhäufigkeit in dem Prognoseintervall liegt.

b) Wenn man den Versuchsumfang verdoppelt, dann halbiert sich die Länge des Prognoseintervalls der relativen Trefferhäufigkeiten bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit.

c) Je größer die Sicherheitswahrscheinlichkeit ist, desto größer ist auch das Prognoseintervall.

d) Das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz liefert Näherungen für Prognoseintervalle, die man mit der Binomialverteilung kontrollieren kann.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 529

◒ **10** **a)** Eine Partei kam auf 27,8 % aller Stimmen. Bestimmen Sie das Intervall, in dem bei einer repräsentativen Kontroll-Umfrage der Stimmenanteil mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,4 % liegen müsste, wenn man 500 Personen befragen würde.

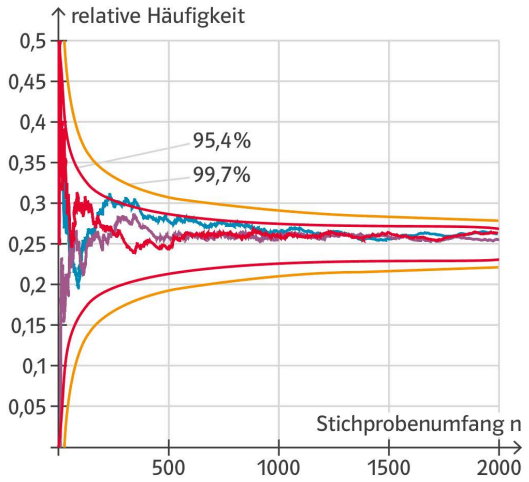
b) Prüfen Sie, ob es reicht, 2000 Personen zu befragen, wenn gefordert wird, dass das Prognoseintervall für den Stimmenanteil nur noch die Länge 0,02 haben soll.

● **11** Lina hat drei Bernoulli-Ketten mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}25$ und der Länge $n = 2000$ simuliert.

a) Erläutern Sie, durch welche Funktionsterme die roten Funktionsgraphen beschrieben werden. Führen Sie eine Kontrollrechnung durch.

b) Erläutern Sie, welche Prognoseintervalle man der Abbildung entnehmen kann. Führen Sie eine Kontrollrechnung durch.

c) Lina: „Das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz besagt: Die zackigen Graphen, die den Verlauf der relativen Trefferhäufigkeiten veranschaulichen, verlassen mit 95,4 %iger Wahrscheinlichkeit den roten Trichter nicht.“
Erläutern Sie, warum diese Deutung nicht richtig ist, und korrigieren Sie die Aussage.



d) Nutzen Sie die interaktive Anwendung, um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, mit der die relativen Häufigkeiten den 95,4 % Trichter in 2000 Versuchen nie verlassen.

I25 **interaktive Anwendung** Wurzeltrichter

● **12** Beweisen Sie, dass $\sqrt{p(1-p)} \leq 0{,}5$ gilt, indem Sie die Funktion f mit $f(p) = p(1-p)$ untersuchen. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Ungleichung für statistische Abschätzungen.

Grundwissen Test — Funktionsscharen untersuchen

→ **Beispiel 1**, Seite 25
Lösungen, Seite 529

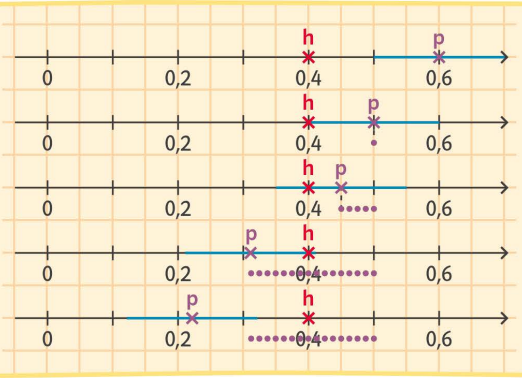
G **13** Der Term $f_k(x) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(kx)^2}$ beschreibt eine Funktionsschar.

a) Zeichnen Sie die Graphen von f_1, f_2 und f_3.

b) Erläutern und begründen Sie, wie die Graphen von f_2 und f_3 aus f_1 hervorgehen.

3 Konfidenzintervalle

Wenn in der nebenstehenden Abbildung die lila markierte Wahrscheinlichkeit p zusammen mit ihrem blauen Prognoseintervall an einer rot markierten relativen Häufigkeit h vorbeiwandert, „rubbelt“ sie unterhalb der Achse Punkt für Punkt ein lila Intervall frei.
Hannah: „Ich kann erklären, welche Bedeutung das „freigerubbelte“ Intervall hat.“ Schlüpfen Sie in Hannahs Rolle.

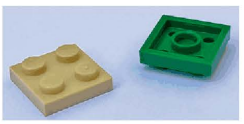


I26 **interaktive Anwendung** Konfidenzintervall freirubbeln

Prognoseintervalle enthalten relative Häufigkeiten. Statistiker konstruieren mit ihrer Hilfe Konfidenzintervalle, die vertrauenswürdige Wahrscheinlichkeiten enthalten.

Das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz macht bei einer gegebenen Wahrscheinlichkeit p eine Aussage darüber, welche relativen Häufigkeiten h man erwartet. In der Praxis nutzt man es auch umgekehrt, um von einer beobachteten relativen Häufigkeit h auf eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p zu schließen. „Den genauen“ Wert von p wird man wegen der Zufallsschwankungen aus den relativen Häufigkeiten nicht ermitteln können. Deswegen sammelt man alle diejenigen Wahrscheinlichkeiten, die man nicht anzuzweifeln braucht, die also vertrauenswürdig sind, im **Konfidenzintervall**. Ein Beispiel möge das erläutern.

confidere (lat.) vertrauen
Konfidenzintervalle bezeichnet man auch als **Vertrauensintervalle**.



Wenn Antonias flacher Baustein in 100 Würfen 36-mal Fußlage zeigt ($h = 0{,}36$), werden sowohl $p = 0{,}3$ als auch $p = 0{,}4$ in ihr Konfidenzintervall aufgenommen. Denn mit $p = 0{,}3$ erhält man das Prognoseintervall $\left[0{,}3 - 2\frac{\sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7}}{\sqrt{100}};\ 0{,}3 + 2\frac{\sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0{,}208;\ 0{,}392]$ und mit $p = 0{,}4$ erhält man $\left[0{,}4 - 2\frac{\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6}}{\sqrt{100}};\ 0{,}4 + 2\frac{\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0{,}302;\ 0{,}498]$. Beide enthalten die beobachtete relative Häufigkeit $h = 0{,}36$, beide sind also für Antonia vertrauenswürdig. In $p = 0{,}2$ und $p = 0{,}5$ hat Antonia dagegen kein Vertrauen, da die zugehörigen Prognoseintervalle $[0{,}120;\ 0{,}280]$ und $[0{,}400;\ 0{,}600]$ die beobachtete relative Häufigkeit $h = 0{,}36$ nicht mehr enthalten. Damit liegt die linke Grenze des Konfidenzintervalls irgendwo zwischen 0,2 und 0,3, die rechte zwischen 0,4 und 0,5.

In Fig. 1 werden die Prognoseintervalle von Wahrscheinlichkeiten $0 \le p \le 1$ durch senkrechte Strecken (orange) veranschaulicht. Dadurch entsteht eine Ellipse, die durch die Graphen der Funktionen $f_{\pm}(p) = p \pm 2\frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$ berandet wird.
Die Grenzen des Konfidenzintervalls sind genau die Stellen, an denen die Gerade zu $h = 0{,}36$ die Graphen der Funktionen $f_{\pm}$ schneidet. Damit ergibt sich für Antonia als Intervallschätzung der Wahrscheinlichkeit das Konfidenzintervall $[0{,}27;\ 0{,}46]$.

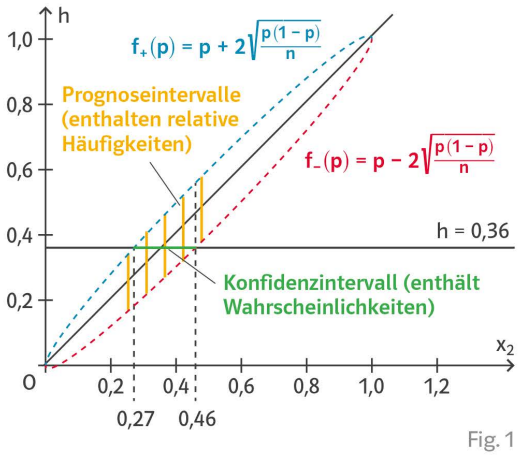


Fig. 1

Mirjam, bei der Fußlage mit $h = \frac{47}{100}$ auftrat, erhält das Konfidenzintervall $[0{,}37;\ 0{,}59]$.
Konfidenzintervalle sind also zufallsabhängig. Verschiedene Erfahrungen (relative Häufigkeiten) führen zu unterschiedlichen Erwartungen, also auch zu unterschiedlichen Konfidenzintervallen.

Man erhält die Grenzen des Konfidenzintervalls zu einer relativen Häufigkeit h, indem man die Gleichungen $p \pm 2\frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}} = h$ nach p auflöst. Wenn ein MMS verfügbar ist, nutzt man einen Lösungsbefehl oder man schneidet die Graphen von $f_{\pm}(x) = x \pm 2\frac{\sqrt{x \cdot (1-x)}}{\sqrt{n}}$ und $g(x) = h$.

Steht nur ein Taschenrechner zur Verfügung, begnügt man sich meist mit der Näherungslösung $\left[h - 2\frac{\sqrt{h(1-h)}}{\sqrt{n}}; h + 2\frac{\sqrt{h(1-h)}}{\sqrt{n}}\right]$, weil man davon ausgeht, dass $h \approx p$ ist (vgl. Seite 376, Aufgabe 12).

Im Gegensatz zur exakten Lösung, liefert die Näherung ein zu h symmetrisches Intervall.

Da man oben 2σ-Prognoseintervalle zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $P = 95{,}4\,\%$ genutzt hat, ordnet man dem Konfidenzintervall das Konfidenzniveau $\beta = 95{,}4\,\%$ zu.

Man spricht kurz vom 95,4 %-Konfidenzintervall. Wenn man mit $c \cdot \sigma$-Prognoseintervallen arbeitet, erhält man Konfidenzintervalle mit den in der Tabelle gelisteten Konfidenzniveaus β.

D1 **MMS-Anleitung** Lösen von Gleichungen

I27 **interaktive Anwendung** Prognose-Konfidenz-intervall-Tool

Konfidenzintervalle

Wenn man bei einem n-stufigen Bernoulli-Experiment die relative Trefferhäufigkeit h beobachtet, besteht das Konfidenzintervall $[p_1; p_2]$ zum Konfidenzniveau β aus den Wahrscheinlichkeiten p, in deren Prognoseintervall h liegt. Man erhält die Grenzen des Konfidenzintervalls, indem man die Gleichungen $p \pm c\frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}} = h$ nach p auflöst.

Näherungsweise ergibt sich $\left[h - c\frac{\sqrt{h(1-h)}}{\sqrt{n}}; h + c\frac{\sqrt{h(1-h)}}{\sqrt{n}}\right]$.

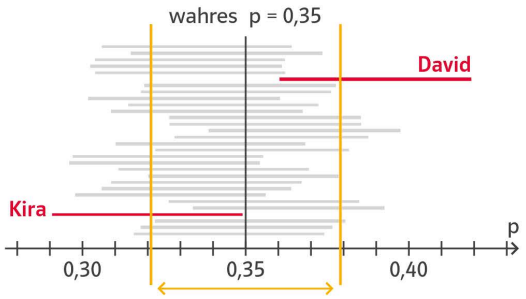
Den Zusammenhang zwischen c und β entnimmt man der Tabelle auf dem Rand.

c	β
1	0,683
1,64	0,90
1,96	0,950
2	0,954
2,58	0,990
3	0,997

Wenn eine angenommene Wahrscheinlichkeit p nicht im Konfidenzintervall einer beobachteten relativen Häufigkeit h liegt, ist das nach Definition des Konfidenzintervalls gleichbedeutend damit, dass die relative Häufigkeit nicht im Prognoseintervall der angenommenen Wahrscheinlichkeit p liegt. Dann ist der angenommene Wert von p nicht mehr vertrauenswürdig, man hat Grund, den Wert von p **zu bezweifeln**.

Zur Bedeutung des Konfidenzintervalls

Wenn man ein n-stufiges Bernoulli-Experiment mit einer festen unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit p mehrfach durchführt, dann liegen nach Definition des 2σ-Prognoseintervalls 95,4 % der relativen Häufigkeiten h im Prognoseintervall zu p. Nach Definition des Konfidenzintervalls liegt in genau diesen Fällen p im Konfidenzintervall zu h. Das zufällige Konfidenzintervall enthält somit in 95,4 % aller Fälle das unbekannte p.



In dieser Simulation (mit $c = 2$ und $\beta = 0{,}954$) liegt Davids Konfidenzintervall komplett über, Kiras komplett unter $p = 0{,}35$.

I28 **interaktive Anwendung** Konfidenzintervalle simulieren

Die folgende Übersicht grenzt Prognose- und Konfidenzintervalle voneinander ab.

Prognoseintervall	Konfidenzintervall
p gegeben – h gesucht	h gegeben – p gesucht
Sicherheitswahrscheinlichkeit P	Konfidenzniveau β
enthält relative Häufigkeiten	enthält Wahrscheinlichkeiten
ist symmetrisch zu p	ist annähernd symmetrisch zu h
liegt in der Ellipse vertikal	liegt in der Ellipse horizontal
ist fest	ist zufallsabhängig
p ist vertrauenswürdig, wenn h im 2σ-Prognose-intervall zu p liegt	p ist vertrauenswürdig, wenn es im Konfidenz-intervall (mit $\beta = 0{,}954$) zu h liegt

Beispiel 1 **Konfidenzintervall exakt und näherungsweise berechnen**

In einer Umfrage gaben 117 von 600 Befragten an, die Partei ABC wählen zu wollen.

a) Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil p der ABC-Wähler zum Konfidenzniveau $\beta = 0{,}95$ (1) durch Lösen einer Gleichung, (2) mithilfe der Näherungsformel.

b) Vergleichen Sie die Lösungen hinsichtlich der Symmetrie zur relativen Häufigkeit h.

Lösung

a) (1) Man löst die Gleichung $p \pm 1{,}96\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{600}} = \frac{117}{600}$ nach p auf und erhält $\approx [0{,}165;\ 0{,}229]$.

(2) Man setzt $h = \frac{117}{600} = 0{,}195$ in $\left[h - 1{,}96\frac{\sqrt{h(1-h)}}{\sqrt{n}};\ h + 1{,}96\frac{\sqrt{h(1-h)}}{\sqrt{n}}\right]$ ein und erhält $\approx [0{,}163;\ 0{,}227]$.

b) Die Ergebnisse unterscheiden sich zahlenmäßig wenig voneinander. *Daher ist die Verwendung der Näherungsformel vertretbar, wenn kein MMS verfügbar ist.*

Der Mittelpunkt $\frac{0{,}165 + 0{,}229}{2} = 0{,}197$ des in Teilaufgabe a) berechneten Konfidenzintervalls liegt rechts der relativen Häufigkeit $h = 0{,}195$. Das mit der Näherungsformel berechnete Konfidenzintervall ist dagegen symmetrisch zu h: es gilt $\frac{0{,}163 + 0{,}227}{2} = 0{,}195 = h$.

Beispiel 2 **Wahrscheinlichkeiten mit Prognose- oder Konfidenzintervallen prüfen**

Ein Medikament soll mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ heilen. In einer Studie an 400 Patienten wurden 300 Personen geheilt.

a) Prüfen Sie, ob dieses Ergebnis Anlass gibt, an der Angabe $p = 0{,}8$ zu zweifeln. Lösen Sie die Aufgabe (1) mithilfe eines Konfidenzintervalls, (2) mithilfe eines Prognoseintervalls.

b) Vergleichen Sie den Rechenaufwand der beiden Lösungswege in Teilaufgabe a).

Lösung

a) Man legt zunächst ein Konfidenzniveau fest, auf dem die Frage beantwortet werden soll. Wenn nichts anderes angegeben ist, wählt man $\beta = 0{,}954$ bzw. $c = 2$.

(1) Das Medikament heilt mit der relativen Häufigkeit $h = \frac{300}{400} = 0{,}75$.

mit MMS
Man löst $p \pm 2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{600}} = 0{,}75$ und erhält $[0{,}704;\ 0{,}791]$.

ohne MMS
Mit einem Taschenrechner verwendet man die Näherungsformel, die $[0{,}707;\ 0{,}793]$ liefert.

Da $p = 0{,}8$ außerhalb des Konfidenzintervalls liegt, sind Zweifel an $p = 0{,}8$ gerechtfertigt.

(2) Man berechnet das Prognoseintervall $\left[0{,}8 - 2\frac{\sqrt{0{,}8\cdot 0{,}2}}{\sqrt{400}};\ 0{,}8 + 2\frac{\sqrt{0{,}8\cdot 0{,}2}}{\sqrt{400}}\right] = [0{,}76;\ 0{,}84]$.

Es enthält $h = 0{,}75$ nicht. Daher sind Zweifel an $p = 0{,}8$ gerechtfertigt.

b) Wenn man eine konkret gegebene Wahrscheinlichkeit nur prüfen möchte, ist insbesondere bei der Arbeit ohne MMS der Weg über das Prognoseintervall einfacher, da man nur in die Formel für das Prognoseintervall einsetzen und keine Gleichung lösen muss.

I27 **interaktive Anwendung** Prognose-Konfidenzintervall-Tool

Aufgaben

○ **1** Ein Bernoulli-Experiment der Länge 100 lieferte die relative Häufigkeit $h = 0{,}65$. Prüfen Sie, ob die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ im Konfidenzintervall ($\beta = 95{,}4\,\%$) zu h liegt.

a) mithilfe eines Prognoseintervalls

b) mithilfe eines Konfidenzintervalls

→ **Lerntipp** Seite 374, Beispiel 1 und 2

○ **2** Die relative Häufigkeit $h = 0{,}5$ hat sich bei einem Versuch vom Umfang 100 bzw. 400 bzw. 1600 ergeben. Ordnen Sie jedem der Kärtchen A, B und C jeweils alle Wahrscheinlichkeiten (Kärtchen 1, 2, 3) zu, die im zugehörigen 95 %-Konfidenzintervall liegen.

A $h = \frac{50}{100}$ B $h = \frac{200}{400}$ C $h = \frac{800}{1600}$

1 $p = 0{,}5$ 2 $p = 0{,}51\ldots$ 3 $p = 0{,}54$ 4 $p = 0{,}6$

○ **3** Prüfen Sie, ob man die angenommene Wahrscheinlichkeit p auf dem 95,4 % Konfidenzniveau als vertrauenswürdig bezeichnen kann, oder ob man sie bezweifeln sollte. Person A arbeitet mit Prognose-, Person B mit Konfidenzintervallen. Vergleichen Sie anschließend.

a) $h = 0{,}5;\ n = 100;\ p = 0{,}55$ b) $h = 0{,}5;\ n = 100;\ p = 0{,}6$

c) $h = 0{,}8;\ n = 400;\ p = 0{,}85$ d) $h = 0{,}5;\ n = 10\,000;\ p = 0{,}52$

Lerntipp Seite 374, Beispiel 2

○ **4** Eine in einem Einkaufszentrum durchgeführte Umfrage lieferte für den Bekanntheitsgrad eines neuen Parfüms den Wert $h = 33{,}33\,\%$.

a) Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Kunde des Einkaufszentrums das Produkt kennt, wenn Sie erfahren, dass der Umfang der Stichprobe (1) $n = 3$ (2) $n = 30$ (3) $n = 300$ (4) $n = 3000$ betrug.

b) Formulieren Sie eine Erkenntnis, die Sie beim Lösen von Teilaufgabe a) gewonnen haben.

○ **5** Es soll geprüft werden, ob $p = 0{,}8$ im Konfidenzintervall zur relativen Häufigkeit $h = \frac{15}{25} = 0{,}6$ liegt (Versuchsumfang $n = 25$).

(1) löse $x \pm 2\sqrt{\frac{x \cdot (1 - x)}{25}} = 0{,}6$

(2) berechne $0{,}8 \pm 2\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot (1 - 0{,}8)}{25}}$

a) Erläutern Sie, welche Gedanken hinter den unterschiedlichen Lösungsansätzen (1) und (2) stecken und führen Sie die Prüfung auf beiden Wegen durch.

b) Begründen Sie, welchen Lösungsweg Sie bevorzugen.

Test 1

Lösungen, Seite 530

○ **6** **a)** Es soll mithilfe des 2σ-Prognoseintervalls geprüft werden, ob das Ergebnis

(1) 60 Treffer bei 100 Versuchen (2) 120 Treffer bei 200 Versuchen

Anlass bietet, an der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ zu zweifeln.

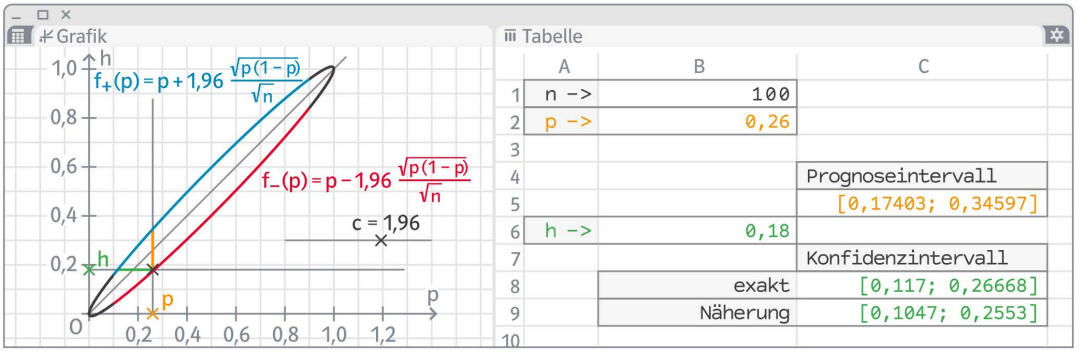
b) Bestimmen Sie das Konfidenzintervall zur relativen Häufigkeit $h = 0{,}6$ jeweils exakt und überprüfen Sie damit Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe a).

◒ **7** Durch die interaktive Anwendung wird für den Stichprobenumfang $n = 100$

- zur Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}26$ das 95 %-Prognoseintervall,
- zur relativen Häufigkeit $h = 0{,}18$ das 95 %-Konfidenzintervall

exakt und auch näherungsweise berechnet.

I27 **interaktive Anwendung** Prognose-Konfidenz-intervall-Tool



Tabelle

	A	B	C
1	n ->	100	
2	p ->	0,26	
3			
4			Prognoseintervall
5			[0,17403; 0,34597]
6	h ->	0,18	
7			Konfidenzintervall
8		exakt	[0,117; 0,26668]
9		Näherung	[0,1047; 0,2553]
10			

a) Rechnen Sie nach, dass die Ergebnisse stimmen.

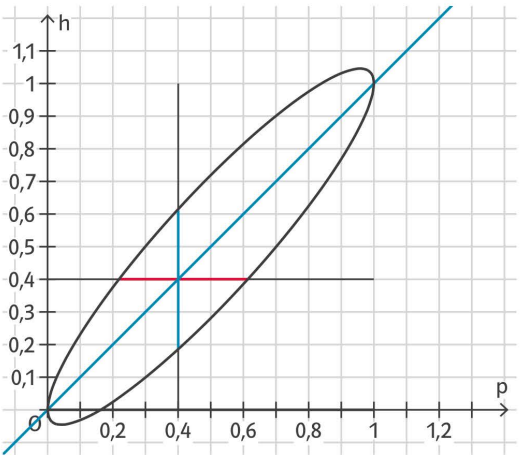
b) Fassen Sie die Bedeutung der orangefarbenen und der grünen Strecke in Worte.

c) Elif: „Ich kann der Abbildung die Antwort auf die Frage entnehmen, ob die relative Häufigkeit $h = 0{,}18$ Anlass bietet, die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}26$ zu bezweifeln."
Erläutern Sie Elifs Aussage und zu welchem Ergebnis Elif kommt.

d) Ümü: „Die Antwort auf Elifs Frage hängt davon ab, ob man exakt oder mit der Näherung arbeitet." Prüfen und kommentieren Sie Ümüs Aussage.

8 a) Berechnen Sie für $n = 100$ die Prognoseintervalle zu $p = 0{,}5$, $p = 0{,}3$ und $p = 0{,}1$.
b) Berechnen Sie für $n = 100$ die Konfidenzintervalle zu $h = 0{,}5$, $h = 0{,}3$ und $h = 0{,}1$.
c) Zeichnen Sie ein Ellipsendiagramm, in das Sie die Lage der berechneten Intervalle eintragen.
d) Erläutern Sie, wie sich die Längen der Intervalle in Abhängigkeit von h bzw. p verändern.

9 Die Abbildung gehört zum Stichprobenumfang $n = 20$ und zum Konfidenzniveau $\beta = 95{,}4\,\%$.
a) Lesen Sie das Konfidenzintervall zur relativen Häufigkeit $h = 0{,}4$ bzw. 0,8 und das Prognoseintervall zur Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}4$ bzw. $p = 0{,}8$ ab.
b) Geben Sie die Terme an, die zu den Funktionsgraphen gehören und überprüfen Sie damit die in Teilaufgabe a) abgelesenen Intervalle.
c) Erläutern Sie, wie sich das Diagramm ändert, wenn man das Konfidenzniveau auf 99,7 % erhöht.



Test 2

Lösungen, Seite 530

10 Es soll geprüft werden, ob $p = 0{,}81$ im Konfidenzintervall zu $h = 0{,}8$ liegt, wobei der Stichprobenumfang $n = 10\,000$ betrug.

Nina rechnet $0{,}8 \pm 2\frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{100}$ und notiert: „Ja, p liegt im Konfidenzintervall."

Simon rechnet $0{,}81 \pm 2\frac{\sqrt{0{,}81 \cdot 0{,}19}}{100}$ und notiert: „Nein, p liegt nicht im Konfidenzintervall."

a) Kontrollieren Sie Ninas und Simons Rechnungen.
b) Begründen Sie mit der Definition des Konfidenzintervalls, welche Antwort korrekt ist.

11 **Unter die Lupe genommen: Das Konfidenzintervall**
Die Grenzen des Konfidenzintervalls für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p (zum Konfidenzniveau $\beta = 0{,}954$) erhält man, indem man bei gegebenem h und n die Gleichungen

$p \pm 2\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = h$ nach p auflöst.

Durch eine Termumformung erhält man hieraus eine quadratische Gleichung für p, die man lösen kann und die für das Konfidenzintervall die folgende Formel liefert:

$$I = \left[\frac{\frac{2}{n} + h - 2\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{h(1-h)}{n}}}{\frac{4}{n} + 1} ; \frac{\frac{2}{n} + h + 2\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{h(1-h)}{n}}}{\frac{4}{n} + 1} \right]$$

a) Kontrollieren Sie dieses Ergebnis durch Nachrechnen.
b) Zeigen Sie, dass diese Formel für einen großen Versuchsumfang n übergeht in die Näherungsformel: $I \approx \left[h - 2\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} ; h + 2\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \right]$

Grundwissen Test — Uneigentliche Integrale bestimmen

Beispiel, Seite 79
Lösungen, Seite 530

G **12** a) Berechnen Sie für $a = 5; 50; 100$, wie viel Prozent $\int_1^a e^{-x}\,dx$ von $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ sind.
b) Beantworten Sie Teilaufgabe a) entsprechend für f mit $f(x) = x^{-2}$ (statt $f(x) = e^{-x}$).

4 Stichprobenumfang schätzen

Schätzen mit System: Eine Kosten-Nutzen-Bilanz
Wenn Sie die Trefferwahrscheinlichkeit, die Ihr Partner zufällig als „ganzzahlige Prozentzahl" zwischen 1% und 99% in den Taschenrechner eingegeben hat, richtig tippen, erhalten Sie 100 Punkte, sonst nichts.
- Begründen Sie, dass der Erwartungswert des Gewinns beim Raten nur ca. 1,01 Punkte beträgt.
- Um den zu erwartenden Gewinn zu erhöhen, können Sie von Ihrem Partner als Tipp eine relative Trefferhäufigkeit aus $n = 100$ Versuchen zum Preis von einem Punkt „abkaufen". Wie viele Tipps sollte man kaufen, um die Gewinnerwartung zu maximieren?

Je größer Stichproben sind, desto genauer bilden sie die Wirklichkeit ab, desto aufwendiger („teurer") wird aber auch das Sammeln der Daten oder das Durchführen von Umfragen. Bei der Planung des Umfangs statistischer Untersuchungen geht es somit auch um eine Kosten-Nutzen-Abwägung. Wie man dabei vorgehen kann, wird an einem Beispiel erläutert.

Eine kleine Partei A möchte den zu erwartenden Stimmenanteil durch eine repräsentative Befragung auf dem Konfidenzniveau $\beta = 95{,}4\%$ auf $\pm 0{,}1\%$ genau ermitteln lassen, weil sie befürchtet, ganz knapp an der 5%-Hürde zu scheitern. Einer größeren Partei B, die mit ca. 20% der Stimmen rechnet, reicht eine Genauigkeit von $\pm 2\%$. Wie viele Personen sollten die Parteien mindestens befragen lassen, damit die gewünschten Genauigkeiten erreicht werden?

Statt „auf dem Konfidenzniveau 95,4%" sagt man umgangssprachlich auch „mit einer Sicherheit von 95,4%".

In der Statistik deutet man die Genauigkeit $\pm 2\%$ als halbe Konfidenzintervall-Länge (man spricht vom Radius $r = 0{,}02$). Da das Konfidenzintervall beim Stichprobenumfang n im ungünstigsten Fall den Radius $\frac{1}{\sqrt{n}}$ hat, ist man auf der sicheren Seite, wenn man n so groß wählt, dass $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq r$ also $\frac{1}{r^2} \leq n$ gilt. Die kleine Partei A müsste demnach mindestens $n = \left(\frac{1}{0{,}001}\right)^2 = 1\,000\,000$, die größere Partei B mindestens $n = \left(\frac{1}{0{,}02}\right)^2 = 2500$ Personen befragen lassen.

Daran, dass Institute selten mehr als Tausend Personen befragen, erkennt man, dass die von der kleinen Partei gewünschte Genauigkeit unrealistisch ist.

Die Parteien könnten r wegen der plausiblen Wähleranteile p_0 auch mit der Näherung $r \approx 2\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}$ abschätzen und $n \approx \frac{4 \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)}{r^2}$ Wählerinnen und Wähler befragen lassen.

Das wären für die kleine Partei (mit $p_0 \approx 0{,}05$) $n \approx 190\,000$ und für die große (mit $p_0 \approx 0{,}2$) $n \approx 1600$ Personen.

Stichprobenumfang abschätzen

Wenn man wissen möchte, welchen Umfang eine Stichprobe haben sollte, geht man so vor:

(1) Man legt die Genauigkeit, mit der ein unbekannter Anteil bzw. eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p geschätzt werden soll, als maximalen Radius r des Konfidenzintervalls fest. Statt $r = 0{,}02$ notiert man auch „$\pm 2\%$".

(2) Man legt das Konfidenzniveau β fest, mit dem die Genauigkeit eingehalten werden soll.

(3) Wenn man nicht weiß, wo p in etwa liegen wird, geht man vom ungünstigsten Fall $p = \frac{1}{2}$ aus und wählt $n \geq \frac{c^2}{4r^2}$, wobei c wie in der Tabelle auf dem Rand vom Konfidenzniveau β abhängt. Für das Konfidenzniveau $\beta = 95{,}4\%$ vereinfacht sich die Formel zu $n \geq \frac{1}{r^2}$.

(4) Etwas günstiger kann es werden, wenn man davon ausgehen kann, dass die Wahrscheinlichkeit in der Nähe von p_0 liegt. Dann wählt man $n \geq \frac{c^2 \cdot p_0(1 - p_0)}{r^2}$.

c	β
1	68,3%
1,64	90%
1,96	95%
2	95,4%
2,58	99%
3	99,7%

Je höher das Konfidenzniveau β (umgangssprachlich sagt man dazu auch „die Sicherheit") sein soll, desto größer wird c, desto größer wird auch der erforderliche Stichprobenumfang.

Beispiel **Stichprobenumfang bestimmen**

Eine Partei möchte durch eine repräsentative Wählerbefragung ihren unbekannten Stimmenanteil p auf ±3% genau abschätzen lassen.

a) Berechnen Sie, wie viele Personen man mindestens befragen muss, wenn man das Konfidenzniveau $\beta = 95\%$ garantieren möchte.

b) Ermitteln Sie, wie viele Personen man befragen muss, wenn man davon ausgehen kann, dass $p \approx 10\%$ gilt.

c) Geben Sie an, um welchen Faktor sich der erforderliche Stichprobenumfang n vergrößert, wenn man das Konfidenzniveau von $\beta = 95\%$ auf $\beta = 99\%$ erhöhen möchte.

Lösung

a) Mit $\beta = 95\%$ ist $c = 1{,}96$. Man wählt (*) $n \geq \frac{c^2}{4 \cdot r^2} = \frac{1{,}96^2}{4 \cdot 0{,}03^2} \approx 1067{,}1$.

Man sollte also mindestens 1068 Personen befragen.

b) Man wählt n so groß, dass (**) $n \geq \frac{c^2 \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)}{r^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}{0{,}03^2} \approx 384{,}16$.

Man sollte also mindestens 385 Personen befragen.

c) Wenn man das Konfidenzniveau von 95% auf 99% erhöhen möchte, muss man statt $c = 1{,}96$ den Wert $c = 2{,}58$ verwenden. c^2 wächst dann von 3,8416 auf 6,6564, also um den Faktor 1,73. Da c^2 bei (*) und (**) im Zähler steht, ist das auch der Faktor, um den man den Stichprobenumfang erhöhen muss.

Aufgaben

○ **1** Ein Scheinmedikament (Placebo) wirkt mit unbekannter Wahrscheinlichkeit p. Bestimmen Sie die Anzahl der Patienten, an denen man das Placebo testen sollte, damit man p auf ±2% genau schätzen kann. Nutzen Sie das Konfidenzniveau $\beta = 95{,}4\%$.

Lerntipp Seite 378, Beispiel

○ **2** Eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p soll bei Zugrundelegung des Konfidenzniveaus 95,4% auf ±1% genau bestimmt werden.

a) Bestimmen Sie den erforderlichen Versuchsumfang.

b) Bestimmen Sie, um welchen Faktor man den Versuchsumfang verkleinern könnte, wenn man wüsste, dass p in der Nähe von $\frac{1}{6}$ liegt.

○ **3** Man möchte eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p bei Zugrundelegung des Konfidenzniveaus $\beta = 95{,}4\%$ auf ±5% genau bestimmen.

a) Bestimmen Sie den erforderlichen Versuchsumfang n.

b) Bestimmen Sie den Faktor, um den sich der erforderliche Versuchsumfang erhöht, wenn man statt $\beta = 95{,}4\%$ das Konfidenzniveau $\beta = 99{,}7\%$ fordert.

○ **4** Man möchte eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p auf dem Konfidenzniveau $\beta = 95{,}4\%$ auf ±3% genau schätzen.

a) Bestimmen Sie den erforderlichen Versuchsumfang n.

b) Bestimmen Sie den Faktor, um den man den Versuchsumfang reduzieren könnte, wenn man wüsste, dass die unbekannte Wahrscheinlichkeit p in der Nähe von 0,9 liegt.

Test 1

Lösungen, Seite 530

○ **5** Etwa 5% aller Pralinenpackungen wiegen netto weniger als aufgedruckt. Bestimmen Sie, wie viele Packungen man nachwiegen müsste, um den Anteil untergewichtiger Packungen bestimmen zu können.

a) auf dem Konfidenzniveau 95,4% auf ±0,2% genau

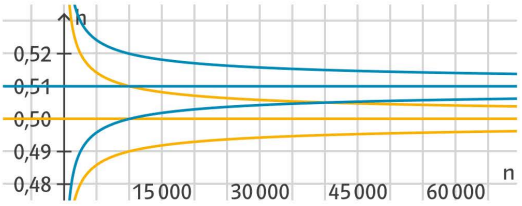
b) auf dem Konfidenzniveau 99,7% auf ±0,5% genau

6 SP a) Man möchte eine Wahrscheinlichkeit, über deren ungefähre Lage man keine Informationen hat, mit 95,4 % Sicherheit auf ±2 % genau bestimmen.
Erläutern Sie, warum man Zeile 3 der Tabelle auf dem Rand nutzt, um diese Frage zu beantworten. Kontrollieren Sie das Ergebnis durch eine eigene Rechnung.
b) Entnehmen Sie der Tabelle die erforderliche Stichprobengröße für den Fall, dass man die Wahrscheinlichkeit in der Nähe von 0,1 vermutet.
c) Formulieren Sie eine „je-desto-Aussage", die Sie
(1) dem Vergleich der ersten drei Tabellenzeilen,
(2) dem Vergleich der ersten drei mit den drei mittleren Tabellenzeilen,
(3) dem Vergleich der ersten drei mit den letzten drei Tabellenzeilen entnehmen.

p	c	β	r	n
0,1	2	95,4 %	2 %	900
0,3	2	95,4 %	2 %	2100
0,5	2	95,4 %	2 %	2500
0,1	3	99,7 %	2 %	2025
0,3	3	99,7 %	2 %	4725
0,5	3	99,7 %	2 %	5625
0,1	2	95,4 %	4 %	225
0,3	2	95,4 %	4 %	525
0,5	2	95,4 %	4 %	625

Erinnerung:
Eine relative Häufigkeit h weicht statistisch signifikant von einer angenommenen Wahrscheinlichkeit p ab, wenn h nicht im 95 % Prognoseintervall von p liegt bzw. wenn p nicht im Konfidenzintervall (β = 0,95) zu h liegt.

7 Nele: „Der Unterschied zwischen der bisherigen Heilungswahrscheinlichkeit $p_0 = 0{,}5$ und der verbesserten $p_1 = 0{,}51$ ist unbedeutend klein."
Max: „Trotzdem gelingt es dem Pharmakonzern mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %, die Verbesserung werbewirksam als statistisch signifikant nachzuweisen. Sie muss den Stichprobenumfang nur groß genug wählen."
Interpretieren Sie die Abbildung und begründen Sie durch Bestimmen des nötigen Stichprobenumfangs, dass Max recht hat.



8 Die Wahrscheinlichkeit des Erfolgs einer Therapie wurde durch ein neues Behandlungskonzept von $p_1 = 61\,\%$ auf $p_2 = 65\,\%$ erhöht. Schätzen Sie, welchen Stichprobenumfang n man benötigt, damit man diese Veränderung mit der Wahrscheinlichkeit 95,4 % als signifikant nachweisen kann.

9 Bestimmen Sie den Stichprobenumfang n, bei dem Abweichungen zwischen $p_1 = 0{,}8$ und $p_2 = 0{,}81$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,4 % bzw. 99,7 % signifikant nachweisbar werden.

Test 2

→ **Lösungen**, Seite 530

10 Eine Wahrscheinlichkeit p soll mit einer Sicherheit von 95,4 % auf ±2 % genau geschätzt werden.
a) Übersetzen Sie diesen Auftrag in die „Sprache der Konfidenzintervalle".
b) Bestimmen Sie den hierfür nötigen Mindest-Stichprobenumfang n_0.
c) Prüfen Sie, ob man bei Stichproben vom Umfang n_0 aus Teilaufgabe b) die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}48$ mit einer Sicherheit von 95,4 % bezweifeln könnte, wenn tatsächlich $p = 0{,}5$ gilt.

11 **Wahr oder falsch?**
Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.
a) Wenn Wahrscheinlichkeiten eng beieinanderliegen, ist der Unterschied nicht mehr als statistisch signifikant nachzuweisen.
b) Wenn die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ bei einem Versuchsumfang n im Konfidenzintervall zu $h = 0{,}45$ liegt, gilt diese Aussage erst recht bei doppeltem Versuchsumfang 2n.
c) Je mehr Versuche man macht, desto wahrscheinlicher überdeckt das Konfidenzintervall die unbekannte Wahrscheinlichkeit p.
d) Je größer der Versuchsumfang ist, desto wahrscheinlicher liegen unrealistische Wahrscheinlichkeitsannahmen außerhalb des Konfidenzintervalls.

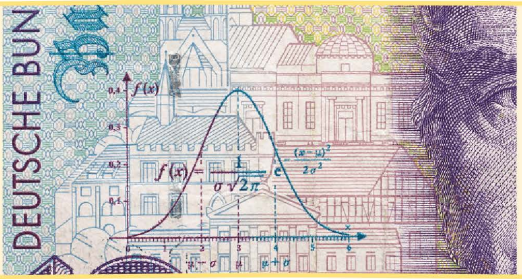
Grundwissen Test — Abstände im Raum bestimmen

→ **Beispiel 1**, Seite 257
Merkkasten, Seite 262
Lösungen, Seite 530

G **12** Bestimmen Sie die Abstände des Punktes $P(-2|1|3)$ von der Ebene $E: 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$ bzw. von der Geraden g durch die Punkte $Q(1|0|-2)$ und $R(0|1|4)$, die in E liegt.

5 Normalverteilung

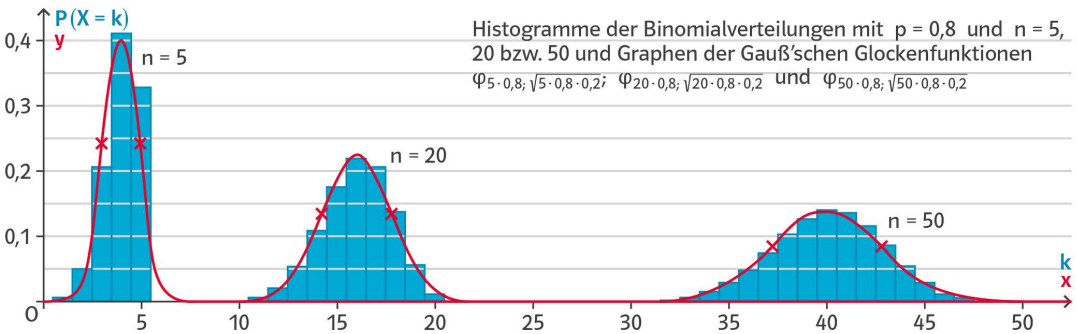
Zeichnen Sie mit Ihrem MMS den Graphen der auf dem 10-DM-Schein (von 1991) dargestellten Funktion und bestimmen Sie den Inhalt der Fläche unter dem Graphen im Intervall $[2; 4]$, $[1; 5]$, $[0; 6]$ und $[-100; 100]$. Formulieren Sie eine Entdeckung.



Im Folgenden erfahren Sie am Beispiel der Normalverteilung, welche Bedeutung die Analysis, insbesondere die Integralrechnung, für die Stochastik hat. Dabei erscheinen die Formeln für die Prognoseintervalle binomialverteilter Zufallsgrößen in einem neuen Licht.

Binomialverteilungen beschreiben Zufallsgrößen, die ganzzahlige Werte annehmen. Solche Verteilungen nennt man **diskret**. Es gibt aber auch Zufallsgrößen, die reelle Werte mit prinzipiell beliebig vielen Nachkommastellen annehmen können. Hier interessieren die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Werte in bestimmten Intervallen (man nennt sie „Klassen“) liegen. Solche Wahrscheinlichkeiten beschreibt man durch Integrale stetiger Funktionen. Man spricht von einer **stetigen** Verteilung und nennt die Zufallsgröße **stetig verteilt**.
Eine besonders wichtige stetige Verteilung ist die **Normalverteilung**, die meist ein gutes mathematisches Modell für die Verteilung von Körpergrößen, Gewichten oder die Zeiten darstellt, die man benötigt, um zum Arbeitsplatz oder zur Schule zu gelangen.

Die Normalverteilung hängt eng mit der Binomialverteilung zusammen. Um dies zu erkennen, betrachtet man Histogramme der Binomialverteilung $B_{n;\,p}$ mit wachsendem n.
Bei festem p werden die Histogramme mit zunehmendem n immer glockenförmiger.
Eine stetige Funktion, deren Graph eine solche Glockenform hat, wurde von Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) gefunden. Sie hat zwei Parameter μ und σ und den Funktionsterm
$\varphi_{\mu;\,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(x-\mu)^2}$.
Ihrem Entdecker zu Ehren heißt sie **Gauß'sche Glockenfunktion** mit den Parametern μ und σ.

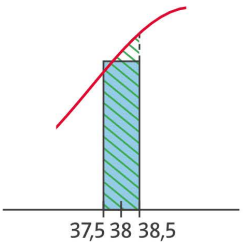


Histogramme der Binomialverteilungen mit p = 0,8 und n = 5, 20 bzw. 50 und Graphen der Gauß'schen Glockenfunktionen $\varphi_{5\cdot 0{,}8;\,\sqrt{5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}$; $\varphi_{20\cdot 0{,}8;\,\sqrt{20\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}$ und $\varphi_{50\cdot 0{,}8;\,\sqrt{50\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}$

Die Parameter bestimmen die Form der Glocke: Je größer μ ist, desto weiter verschiebt sich der Graph nach rechts. Je größer σ ist, desto breiter und flacher wird die Glocke. Tatsächlich haben die Graphen einen Hochpunkt $H\left(\mu \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)$ und zwei Wendepunkte $W\left(\mu \pm \sigma \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot e}\cdot\sigma}\right)$.
Die Wendepunkte liegen stets um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}6$ tiefer als der Hochpunkt.
Da für alle Parameter $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx = 1$ gilt, lassen sich die Flächen unter den Glockengraphen genau wie die Rechteckflächen von Histogrammen der Binomialverteilung als Wahrscheinlichkeiten deuten. Man bezeichnet $\varphi_{\mu;\,\sigma}$ als **Dichtefunktion** oder kurz als **Wahrscheinlichkeitsdichte**.

Die Bezeichnung der Parameter durch die Buchstaben μ und σ ist kein Zufall: Wenn man in der Glockenfunktion $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ wählt, also genauso groß macht wie den Erwartungswert bzw. die Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und p, dann passt der Graph der Glockenfunktion zum Histogramm von $B_{n;\,p}$ (vgl. Seite 380). Beispielsweise entspricht dort $B_{50;\,0,8}(38) = 0{,}1033$ dem Flächeninhalt des Balkens bei $k = 38$, weil der Balken die Breite 1 und die Höhe $B_{50;\,0,8}(38)$ hat. Da die Fläche unter dem Glockengraphen im Bereich $[37{,}5;\,38{,}5]$ ungefähr so groß wie der Balken ist, gilt

$$P(X = 38) = B_{n;\,p}(38) \approx \int_{37{,}5}^{38{,}5} \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx = 0{,}1096 \text{ mit } \mu = np \text{ und } \sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$



Diese Anpassung der Integrationsgrenzen nennt man **Stetigkeitskorrektur**.

Entsprechend erhält man $P(35 \le X \le 41) \approx \int_{34{,}5}^{41{,}5} \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx = 0{,}6761$.

Die Näherung wird tendenziell umso besser, je größer σ wird. Die Zusammenhänge verallgemeinernd definiert man:

Dass man die Binomialverteilung durch Integrale der Gauß'schen Glockenfunktion annähern kann, ist die Aussage des **Satzes von de Moivre-Laplace**.

Normalverteilte Zufallsgrößen

Eine stetige Zufallsgröße X heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie einen Wert in einem Intervall $[a;\,b]$ annimmt, gleich dem Wert des zugehörigen Flächeninhalts unter dem Graphen der Gauß'schen Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\,\sigma}$ ist:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(x-\mu)^2}\,dx$$

Der Vergleich der Binomialverteilung mit der Normalverteilung legt nahe, den Parameter μ der Normalverteilung als Erwartungswert und den Parameter σ als Standardabweichung zu bezeichnen. Die von der Binomialverteilung bekannten Sigmaregeln gelten für normalverteilte Zufallsgrößen exakt: $\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx \approx 0{,}6827$, $\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx \approx 0{,}9544$

Ungewohnt, aber plausibel ist: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine normalverteilte Zufallsgröße X ganz genau den Wert a annimmt, ist null, weil $\int_a^a \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx = 0$.

Intervallwahrscheinlichkeiten $P(a \le X \le b) = \int_a^b \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx$ berechnet man mit Rechenhilfsmitteln, die auch die Integralfunktion $\Phi_{\mu;\,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu;\,\sigma}(t)\,dt$ bereitstellen.

$\Phi_{\mu;\,\sigma}(x)$ nennt man **Verteilungsfunktion**. Sie entspricht bei der Binomialverteilung der Funktion $F_{n;\,p}$ und erlaubt, Intervallwahrscheinlichkeiten als Differenz $P(a \le X \le b) = \Phi_{\mu;\,\sigma}(b) - \Phi_{\mu;\,\sigma}(a)$ zu berechnen.

Den Wert x, unter dem eine normalverteilte Zufallsgröße X mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % liegt, für den also $P(X \le x) = 0{,}7$ gilt, berechnet man mit $\Phi_{\mu;\,\sigma}^{-1}(0{,}7)$, vgl. Seite 382, Beispiel 2.

Beispiel 1 **Die Normalverteilung als Näherung der Binomialverteilung**

Gegeben ist eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0{,}4$.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(6 \le X \le 10)$.

b) Bestimmen Sie $P(6 \le X \le 10)$ näherungsweise über eine geeignete Normalverteilung.

Lösung

a) $P(6 \le X \le 10) = P(X \le 10) - P(X \le 5) = F_{20;\,0,4}(10) - F_{20;\,0,4}(5) \approx 0{,}872 - 0{,}126 = 0{,}746$

b) Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 8$; Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{4{,}8}$.

$$P(6 \le X \le 10) \approx \int_{5{,}5}^{10{,}5} \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx = \Phi_{\mu;\,\sigma}(10{,}5) - \Phi_{\mu;\,\sigma}(5{,}5) = 0{,}746$$

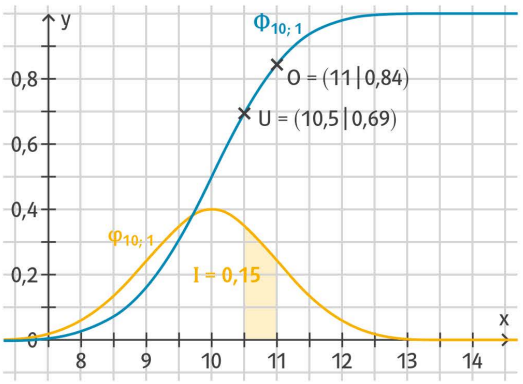
Beispiel 2 Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion

Murat beschreibt die Gewichtsverteilung seiner Lieblingsdrops durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi_{10;\,1}$ samt zugehöriger Verteilungsfunktion $\Phi_{10;\,1}$.

a) Notieren Sie die Informationen, die Sie dem eingezeichneten Integral I und den Punkten U und O entnehmen, in Worten und formal.

b) Entnehmen Sie der Grafik das Gewicht, das nur von 2 % der Drops überschritten wird.

c) Ermitteln Sie das Gewicht, das in Murats Modell nur 20 % aller Drops unterschreiten.



Lösung

a) Das Integral I mit dem Wert 0,15 gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Drops zwischen 10,5 g und 11 g wiegt. Bei O liest man ab, dass 84 % aller Drops weniger als 11 g wiegen, entsprechend bei U, dass 69 % aller Drops weniger als 10,5 g wiegen.
Wenn X das Gewicht eines Drops beschreibt, gilt $P(10{,}5 \le X \le 11) = 0{,}84 - 0{,}69 = 0{,}15$.

b) Man sucht den Wert x, für den $P(X \le x) = \Phi_{10;\,1}(x) = 0{,}98$ gilt, und liest $x \approx 12$ ab.
Ca. 98 % aller Drops wiegen weniger als 12 g. Also sind ca. 2 % schwerer als 12 g.

c) Durch systematisches Probieren erhält man $\Phi_{10;\,1}^{-1}(0{,}2) = 9{,}16$.

I29 **interaktive Anwendung** Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion

D1 **MMS-Anleitung** Normalverteilung

Beispiel 3 Klassen bilden

Max beschreibt das Gewicht (in g) von Äpfeln durch eine Normalverteilung mit $\mu = 180$ und $\sigma = 20$. Bilden Sie 8 geeignete Gewichtsklassen und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten.

Lösung

Die Werte normalverteilter Zufallsgrößen liegen mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $1 - 0{,}997 = 0{,}30\,\%$ außerhalb des 3σ-Intervalls $[\mu - 3\sigma;\, \mu + 3\sigma] = [120;\, 240]$. Wenn man das Intervall $[120;\, 240]$ in 6 Gewichtsklassen der Breite 20 g unterteilt, erhält man z. B. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gewicht X eines zufällig ausgewählten Apfels in der Gewichtsklasse $140\,\text{g} \le X \le 160\,\text{g}$ liegt, durch $\Phi_{180;\,20}(160) - \Phi_{160;\,20}(140) = 0{,}135\,91$. Durch analoge Rechnungen erhält man die folgende Tabelle:

Gewichtsklasse	$X \le 120$	$120 < X \le 140$	$140 < X \le 160$	$160 < X \le 180$
Wahrscheinlichkeit	0,001 35	0,0214	0,135 91	0,341 34

Gewichtsklasse	$180 < X \le 200$	$200 < X \le 220$	$220 < X \le 240$	$240 < X$
Wahrscheinlichkeit	0,341 34	0,135 91	0,0214	0,001 35

Aufgaben

○ **1** Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}2$ und $n = 40$.

a) Berechnen Sie $P(5 \le X \le 10)$ mithilfe der Binomialverteilung

b) Berechnen Sie $P(5 \le X \le 10)$ näherungsweise mithilfe einer geeigneten Normalverteilung.

c) Prüfen Sie, ob in Teilaufgabe b) die Laplace-Bedingung erfüllt ist.

Lerntipp Seite 381, Beispiel 1

○ **2** Man verwendet die Normalverteilung mit $\mu = 1$ und $\sigma = 0{,}3$ als Modell für die Längenverteilung von Zuckerschoten (in dm). Berechnen Sie in diesem Modell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für die Länge X einer Schote gilt:

a) $X < 0{,}8$ b) $X > 1{,}2$ c) $0{,}8 \le X \le 1{,}2$ d) $X > 1{,}5$

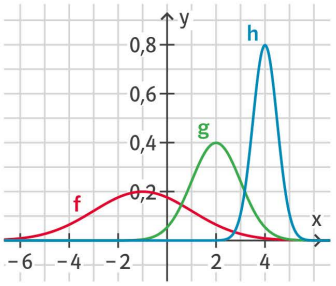
e) $X \le 0{,}8$ f) $X = 1{,}2$ g) $0{,}8 < X < 1{,}2$ h) $X \ge 1{,}5$

Lerntipp Seite 382, Beispiel 2

○ **3** Eine stetige Zufallsgröße ist normalverteilt mit $\mu = 25$ und $\sigma = 3$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit.
a) $P(X = 25)$ **b)** $P(X < 25)$ **c)** $P(X < 19)$ **d)** $P(19 < X < 31)$ **e)** $P(19 \leq X \leq 31)$

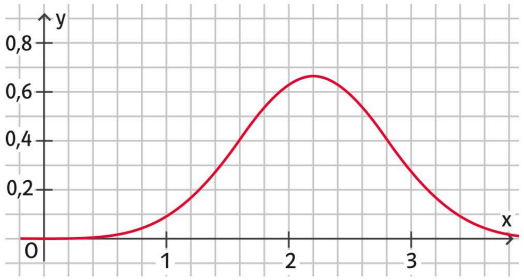
○ **4** **a)** Ordnen Sie die Kärtchen den Graphen von f, g oder h zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

A $\mu = -1$	B $\mu = 2$	I $P(X < 2) > \frac{2}{3}$	E $\sigma = \frac{1}{2}$	
J $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) > 0{,}6$	G $P(X < 2) = \frac{1}{2}$	D $\sigma = 1$		
H $P(X < 2) < 0{,}1$	C $\sigma = 2$	K $P(1{,}5 < X < 2{,}5) \approx 0{,}39$		
L Passt zu keiner Binomialverteilung	F $P(X < 0) > \frac{1}{2}$			



b) Benennen Sie Anwendungskontexte, zu deren Beschreibung die Wahrscheinlichkeitsdichten f, g und h geeignet sein könnten.

○ **5** Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X wird durch den nebenstehenden Graphen von $\varphi_{\mu;\sigma}$ beschrieben.
a) Entnehmen Sie der Zeichnung μ und σ.
b) Skizzieren Sie den Graphen von $\Phi_{\mu;\sigma}$.
c) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeiten.
(1) $P(X = 2{,}8)$ (2) $P(1{,}4 < X < 1{,}8)$
(3) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ (4) $P(X > 0)$
Erläutern Sie, wo Sie diese am Graphen von $\Phi_{\mu;\sigma}$ wiederfinden.



Sie können Ihre Ergebnisse mithilfe eines MMS kontrollieren.

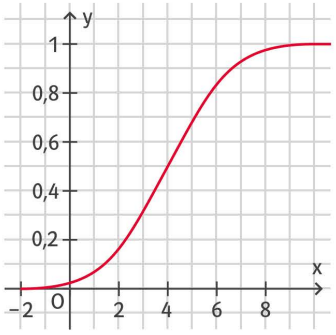
○ **6** **a)** Die Anzahl der Nüsse in einer Tafel Schokolade mit ganzen Nüssen soll näherungsweise durch eine Normalverteilung mit $\mu = 7{,}2$ und $\sigma = 2{,}1$ beschrieben werden. Bestimmen Sie in diesem Modell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Tafel Schokolade
(1) genau 7 Nüsse enthält, (2) zwischen 5 und 9 Nüsse enthält.
b) Begründen Sie, warum es sinnvoll ist, mit einer Stetigkeitskorrektur zu arbeiten.

Test 1

Lösungen, Seite 530

○ **7** Die Anzahl der Treffer in einem Spiel ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}05$.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dafür, dass es im kommenden Spiel
(1) keinen Treffer (2) 4, 5 oder 6 Treffer geben wird.
b) Ermitteln Sie, zu welchen Ergebnissen man kommt, wenn man mit einer geeigneten Normalverteilung rechnet. Prüfen Sie, ob die Laplace-Bedingung erfüllt ist.

◒ **8** **a)** Die Abbildung zeigt den Graphen einer Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu;\sigma}$. Entnehmen Sie der Abbildung die ganzzahligen Werte der Parameter μ und σ und übertragen Sie die Skizze samt Ableitung $\Phi'_{\mu;\sigma} = \varphi_{\mu;\sigma}$.
b) Lesen Sie $\Phi_{\mu;\sigma}(2)$ und $\Phi_{\mu;\sigma}^{-1}(0{,}9)$ ab und erläutern Sie, wo Sie die abgelesenen Werte in Ihrer Skizze von $\varphi_{\mu;\sigma}$ wiederfinden.
c) Zeichnen Sie den Graphen zu $\Phi_{\mu;\sigma}$, $\varphi_{\mu;\sigma}$ mit Ihrem MMS nach und berechnen Sie zur Kontrolle die in Teilaufgabe b) abgelesenen Werte genau.



9 Ein Produzent von Essig gibt auf dem Etikett der Flaschen eine Füllmenge von 200 ml an. Die Flaschen werden maschinell abgefüllt, die Füllmenge X soll als normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = 202\,\text{ml}$ und der Standardabweichung $\sigma = 3{,}5\,\text{ml}$ angesehen werden.

a) Bestimmen Sie den Anteil der Flaschen, die mindestens 2 % weniger Essig enthalten als auf dem Etikett angegeben.

b) Nach einer Verordnung dürfen maximal 2 % aller Flaschen eine Füllmenge von 196 ml unterschreiten. Auf welchen Wert muss der Produzent den Erwartungswert der Füllmenge an seiner Maschine korrigieren, damit er die Verordnung einhält? Geben Sie den Wert auf eine Dezimale genau an.

10 Nach dem Satz von de Moivre-Laplace kann die Binomialverteilung mit den Parametern n und p durch eine Normalverteilung mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ angenähert werden. Diese Näherung ist gut, wenn die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist.

a) Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem σ deutlich größer als 3 ist, und bestätigen Sie damit diese Aussage für ein selbstgewähltes Intervall.

b) Wählen Sie für $p = 0{,}5$ ein geeignetes n so, dass $\sigma < 3$ ist, und berechnen Sie den prozentualen Fehler für ein selbstgewähltes Intervall.

c) Bestimmen Sie für $p = 0{,}1$ den Parameter n so, dass Sie das gleiche σ wie in Teilaufgabe b) erhalten. Berechnen Sie den prozentualen Fehler für dasselbe Intervall wie in Teilaufgabe b).

11 Die Tabelle zeigt die Handspannen (in cm) von 102 Jugendlichen.

Intervall	Häufigkeit
15 – 17	1
17 – 19	16
19 – 21	38
21 – 23	32
23 – 25	14
25 – 27	1

a) Nennen Sie Argumente dafür, dass – auf den ersten Blick – die Normalverteilung ein brauchbares Modell für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Handspannen sein könnte.

b) Geben Sie eine grobe Schätzung für den Erwartungswert und die Standardabweichung an. Begründen Sie Ihre Schätzung.

c) Bestimmen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung der Handspannen, indem Sie zur Berechnung die Klassenmitten 16, 18, … 26 nutzen. Vergleichen Sie mit den aus der zugehörigen Urliste bestimmten Werten $\bar{x} = 20{,}80$ und $s_X = 1{,}80$.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der in der Tabelle angegebenen Intervalle unter der Modellannahme, dass die Handspannen normalverteilt sind mit $\varphi_{20{,}8;\,1{,}8}$. Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit Werte kleiner als 15 cm und größer als 27 cm zu erwarten sind.

e) Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten aus d) mit den zugehörigen relativen Häufigkeiten.

Lerntipp
Seite 382, Beispiel 3

12 a) X ist normalverteilt mit $\mu = 4$ und $\sigma = 2$. Zeigen Sie, dass $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0{,}682\,69$ gilt.

b) Das Gewicht eines 1-kg-Pakets Mehl soll normalverteilt sein mit dem Erwartungswert 1005 g und der Standardabweichung 5 g. Bestimmen Sie in diesem Modell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde zu wenig Mehl erhält.

c) Bestimmen Sie das Gewicht, das in weniger als 2 % aller Fälle unterschritten wird.

13 **Wahr oder falsch?**

Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Wahrscheinlichkeitsdichten können höchstens den Wert 1 annehmen, weil es keine Wahrscheinlichkeiten gibt, die größer als 100 % sind.

b) Wenn das Gewicht von Nüssen mit $\mu = 5$ und $\sigma = 1$ normalverteilt ist, dann ist $\varphi_{5;\,1}(5)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig herausgegriffene Nuss 5 g wiegt.

c) Wenn das Gewicht von Keksen normalverteilt ist mit $\mu = 10$ und $\sigma = 1$, dann ist $\int_{9{,}5}^{10{,}5} \varphi_{10;\,1}(x)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Keks 10 g wiegt.

d) Wenn eine Zufallsgröße normalverteilt ist, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie einen Wert annimmt, der größer als der Erwartungswert ist, genau 0,5.

14 a) Erläutern Sie, wie der Graph der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{x-3}{2}\right)$ aus dem Graphen von f mit $f(x) = x^3 - x$ hervorgeht.
b) Erläutern Sie, wie der Graph von $\varphi_{\mu;\sigma}$ aus dem Graphen von $\varphi_{0;1}$ hervorgeht.

15 Kontrollieren Sie mit $\Phi_{\mu;\sigma}$, dass $\int_{\mu-c\sigma}^{\mu+c\sigma} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = P$ gilt, wobei P und c wie in der Tabelle auf dem Rand dargestellt zusammenhängen.

c	P
1	0,683
1,64	0,90
1,96	0,950
2	0,954
2,58	0,990
3	0,997

16 Der Spritverbrauch eines Pkw (in Litern pro 100 km) im Stadtverkehr wird als normalverteilt mit $\mu = 8{,}2$ und $\sigma = 1{,}8$ modelliert.
Bestimmen Sie ein Intervall mit dem Mittelpunkt μ, in dem der Spritverbrauch mit der angegebenen Wahrscheinlichkeit liegt.
a) 50 % b) 90 % c) 99 %

Test 2

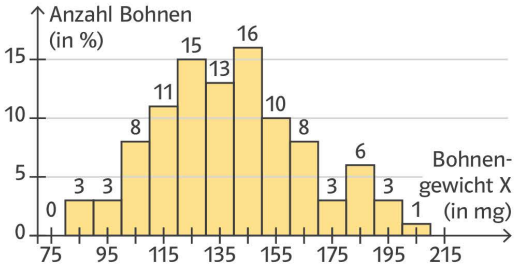
→ **Lösungen**, Seite 530

17 Überprüfen Sie die Angaben des Zeitungsartikels unter Beachtung der Tatsache, dass Intelligenztests so konstruiert sind, dass der IQ der Gesamtpopulation (hier: „die Deutschen") den Erwartungswert $\mu = 100$ hat und die Standardabweichung den Wert $\sigma = 15$ besitzt.

> Wie schlau sind die Deutschen? Gut zwei Drittel haben einen Durchschnitts-IQ zwischen 85 und 115. Überdurchschnittlich intelligent sind 16 %. Wer den Test vergeigt, darf sich trösten: Nur 2 % sind mit einem weit überdurchschnittlichen IQ über 130 gesegnet.

18 Eine stetige Zufallsvariable X ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 12$ und $\sigma = 5$.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(11 < X < 13)$; $P(11{,}5 < X < 12{,}5)$; $P(11{,}9 < X < 12{,}1)$; $P(X = 12)$.
b) Multiplizieren Sie $\varphi_{12;5}(12)$ mit 2, mit 1 und mit 0,2.
Veranschaulichen Sie den Zusammenhang mit den Ergebnissen von Teilaufgabe a).

19 Die Grafik zeigt die glockenförmige Gewichtsverteilung von Kaffeebohnen, wobei das Gewicht X in Milligramm gemessen wird.



a) Schätzen Sie aus der Grafik den Mittelwert $\bar{x}$ und die empirische Standardabweichung s des Bohnengewichts.
b) Berechnen Sie $\bar{x}$ und s, wobei Sie die einzelnen Messwerte durch die auf der x-Achse abzulesenden Zahlen annähern können.
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der das Gewicht einer Bohne im Intervall $[110; 120]$ bzw. $[120; 160]$ liegt, wenn man von einer Normalverteilung mit $\mu = \bar{x}$ und $\sigma = s$ ausgeht. Vergleichen Sie mit den relativen Häufigkeiten.

20 Weisen Sie mithilfe der Analysis nach, dass bei der Gauß'schen Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ mit $\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ die Extremstelle bei $x = \mu$ und die Wendestellen bei $x = \mu \pm \sigma$ liegen.
Es reicht, wenn Sie hierzu jeweils die notwendige Bedingung untersuchen.

Grundwissen Test — Volumen eines Rotationskörpers bestimmen

→ **Beispiel**, Seite 82
Lösungen, Seite 531

G **21** Der Querschnitt eines Glases wird durch die Funktion f mit $f(x) = x^2$, $-1 \le x \le 1$ beschrieben.
Bestimmen Sie das Volumen der Flüssigkeit, die das Glas fassen kann.

Prognoseintervalle für absolute Häufigkeiten

→ Lösungen, Seite 531

1 **a)** Skizzieren Sie das Histogramm der Binomialverteilung $B_{30;\,0,3}$.
b) Erläutern Sie, wie Sie beim Skizzieren in Teilaufgabe a) vorgegangen sind.
c) Markieren Sie in Ihrer Skizze die 1σ-, 2σ- und 3σ-Prognoseintervalle. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Intervalle.
d) Erläutern Sie, wie im Vergleich zu Teilaufgabe c) die $1{,}96\sigma$- und $2{,}58\sigma$-Intervalle liegen.
SP **e)** Formulieren Sie einen Wenn-Dann Satz, in dem der Begriff „signifikant“ vorkommt.

2 **a)** Geben Sie die Parameter n und p zu drei Bernoulli-Versuchen an, bei denen man die Prognoseintervalle absoluter Häufigkeiten leicht im Kopf berechnen kann.
b) Berechnen Sie die 1σ-Prognoseintervalle und erläutern Sie, welche Information man ihnen entnimmt.

Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten

3 Gegeben ist ein Bernoulli-Experiment mit $n = 400$ und $p = 0{,}1$.
a) Berechnen Sie das 2σ-Prognoseintervall der absoluten Häufigkeiten.
b) Erläutern Sie, wie sich hieraus das 2σ-Prognoseintervall der relativen Häufigkeiten ergibt. Berechnen Sie es und formulieren Sie einen Satz zu seiner Bedeutung.
c) Erläutern Sie die Unterschiede im Verhalten der beiden Prognoseintervalle bei Erhöhung des Versuchsumfangs n.

4 **a)** Bei einem Bernoulli-Experiment der Länge $n = 400$ schwanken die relativen Trefferhäufigkeiten zwischen 0 und 1. Skizzieren Sie das zugehörige Histogramm für $p = 0{,}2$ und erläutern Sie, wie Sie beim Skizzieren vorgehen.
b) Markieren Sie in Ihrer Skizze die 1σ- und 2σ-Prognoseintervalle der relativen Häufigkeiten. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Intervalle.
SP **c)** Formulieren Sie einen Wenn-Dann Satz, in dem der Begriff „signifikant“ vorkommt.

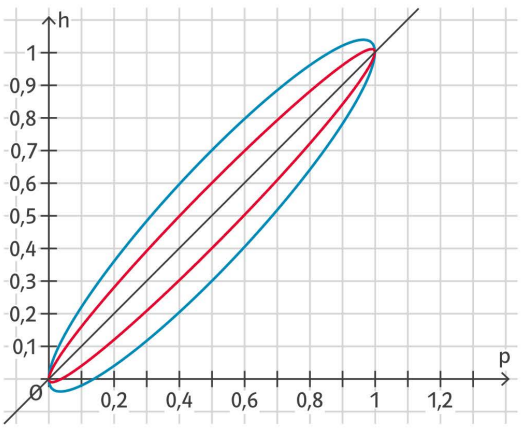
Konfidenzintervalle

5 Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 100$.
Berechnen Sie für die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$ die Prognoseintervalle der relativen Häufigkeiten zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten $P = 68{,}3\,\%$, $P = 95{,}4\,\%$ und $P = 99{,}7\,\%$.
Berechnen Sie für die relative Häufigkeit $h = 0{,}2$ die Konfidenzintervalle zu den Konfidenzniveaus $\beta = 68{,}3\,\%$, $\beta = 95{,}4\,\%$ und $\beta = 99{,}7\,\%$.

6 **a)** Ordnen Sie nebenstehenden Graphen die folgenden Funktionsterme zu und machen Sie je zwei numerische Kontrollen.

$$f_{25}(x) = x \pm 2\sqrt{\frac{x(1-x)}{25}}$$

$$f_{100}(x) = x \pm 2\sqrt{\frac{x(1-x)}{100}}$$



b) Lesen Sie die
- Prognoseintervalle zu $p = 0{,}2$ und 0,7 und die
- Konfidenzintervalle zu $h = 0{,}2$ und 0,7

ab und kommentieren Sie Ihr Vorgehen.
c) Kontrollieren Sie Ihre abgelesenen Werte rechnerisch.
d) Mara: „Man sieht an der Skizze, dass die Prognose – nicht aber die Konfidenzintervalle – symmetrisch sind.“ Erläutern und kontrollieren Sie die Aussage von Mara.

D31 Check-out

→ Lösungen, Seite 533

7 In einer Umfrage unter 400 Besuchern befürworteten 68 % der Befragten – trotz Verdoppelung des Eintrittspreises – die Erweiterung eines Schwimmbades zu einem Erlebnisbad.

a) Bestimmen Sie die Konfidenzintervalle zu $\beta = 0{,}954$ und $\beta = 0{,}997$ für den Anteil der Befürworter unter allen Stimmberechtigten.

b) Fassen Sie in Worte, welche Aussagen die berechneten Konfidenzintervalle machen.

Stichprobenumfang schätzen

8 Eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p soll mit einer Sicherheit von 95 % bzw. 99,7 % auf ± 2 % genau geschätzt werden. Notieren Sie eine Formel, die Sie zur Berechnung des nötigen Stichprobenumfangs n nutzen. Berechnen Sie n.

Normalverteilung

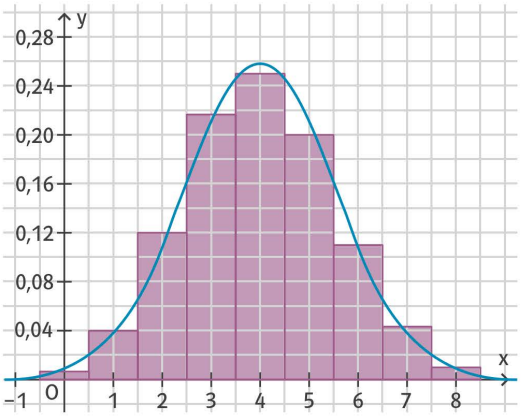
9 **a)** Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten $\varphi_{50;\,5}$ und $\varphi_{0{,}5;\,0{,}5}$.

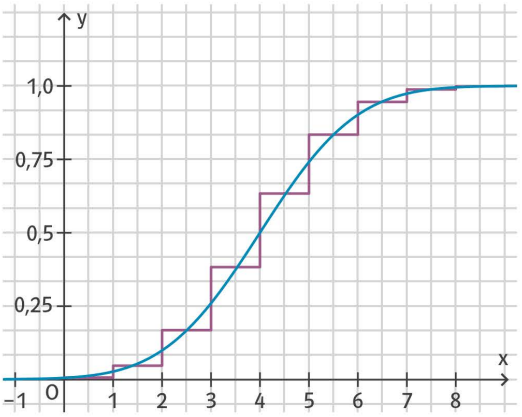
b) Markieren Sie die Sigma-Intervalle und erläutern Sie deren Bedeutung.

10 **a)** Erläutern Sie anhand der Abbildung die Zusammenhänge zwischen Binomial- und Normalverteilung, deren Parameter Sie den Abbildungen mit Begründung entnehmen.

b) Kontrollieren Sie an der Stelle $x = 5$, dass die Graphen korrekt gezeichnet wurden.

c) 💻 Erstellen Sie eine entsprechende Zeichnung mit Ihrem MMS.





Weiterführende Aufgaben

11 🖩 Nehmen Sie Stellung zum Dialog. Benennen Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen dem Messen von Längen und dem Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten.

Niclas: „Geometrie ist einfacher als Stochastik, weil man Längen messen kann. Dann multipliziere ich und schon habe ich das Volumen eines Quaders."
Nina: „Aber bei der Pfadregel musst du doch auch nur multiplizieren."
Niclas: „Die Wahrscheinlichkeiten, die ich bei der Pfadregel multiplizieren muss, kann ich aber nur schätzen, nicht messen. Denk mal an das Würfeln mit Quadern oder Schrauben."
Nina: „Das Messen ist aber auch nur ein Schätzen, denk mal an das Ausmessen des Schulhofs. Da hatten wir 30 unterschiedliche Ergebnisse."

12 **a)** Skizzieren Sie einen Versuch, den man durchführen könnte, um den Sinn des Merksatzes zu belegen.

b) Präzisieren Sie die Aussage mithilfe von Prognoseintervallen.

Merke:
Je mehr, desto genauer

Merkzettel aus Klasse 7

→ **Lösungen**, Seite 534

13 In einer Bernoulli-Kette mit einer Länge $n = 100$ und einer (angenommenen) Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ erhielt man $h = 65\,\%$ Treffer.

a) Berechnen Sie die Prognoseintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten $P = 95{,}4\,\%$ und $P = 99{,}7\,\%$.

b) Berechnen Sie die Konfidenzintervalle zu den Konfidenzniveaus $\beta = 95{,}4\,\%$ und $\beta = 99{,}7\,\%$.

c) Beantworten Sie sowohl mit Teilaufgabe a) als auch mit b), ob die relative Häufigkeit h Anlass gibt, an der Wahrscheinlichkeitsangabe $p = 0{,}8$ zu zweifeln.

d) Stellen Sie möglichst viele Gemeinsamkeiten und möglichst viele Unterschiede zwischen Prognose- und Konfidenzintervallen in einer Übersicht zusammen.

14 Sie dürfen 1600 Versuche machen. Der Unterschied von der alten Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0{,}5$ bzw. 0,8 zu einer neuen Wahrscheinlichkeit p_2 soll mit 95,4 % Sicherheit als statistisch signifikant nachgewiesen werden können.
Bestimmen Sie überschlagsmäßig, wie sehr p_2 von p_1 mindestens abweichen muss.

15 Bestimmen Sie, welche Stichprobengröße erforderlich ist, damit man mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,4 % eine signifikante Abweichung von der angenommenen Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ erhält, wenn die Wahrscheinlichkeit tatsächlich 0,83 beträgt.

16 Die Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten der Kopflage in zehn Serien aus 100 Würfen.

a) Untersuchen Sie, ob ein Ergebnis Zweifel an $p(\text{„Kopf“}) = 0{,}5$ signalisiert.

b) Schätzen Sie mithilfe der letzten Zeile $p(\text{„Kopf“})$ jeweils durch ein Konfidenzintervall und beurteilen Sie, ob die Abweichungen von $p = 0{,}5$ signifikant sind.

c) Beurteilen Sie, ob die Abweichungen relevant sind
(1) wenn beim Tennis statt mit einer Münze mit Reißnagel oder Kronkorken ausgelost wird, wer zuerst gegen die Sonne spielt,
(2) wenn eine Allergie statt bisher bei 50 % mit den Reißnagel- oder Kronkorken-Wahrscheinlichkeiten unmittelbar nach einer Therapie verschwindet,
(3) wenn Reißnagel oder Kronkorken statt einer Münze bei einem kommerziellen Glücksspiel zum Einsatz kämen.

	Münze	Reißnagel	Korken
1	54	40	57
2	55	53	54
3	51	59	57
4	53	55	55
5	46	49	50
6	49	49	51
7	55	45	59
8	49	62	46
9	48	54	55
10	47	54	55
Summe	507	520	539

17 **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**
Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage immer gilt, nie stimmt oder nur in bestimmten Fällen richtig ist. Geben Sie gegebenenfalls die Bedingungen an.

a) Wahrscheinlichkeiten sind Modelle, die in Bezug auf die Wirklichkeit nie genau stimmen.

b) Wahrscheinlichkeiten sind Zufallsgrößen.

c) Konfidenzintervalle helfen zu beurteilen, welche Wahrscheinlichkeiten gute Modelle sind.

d) Mit Prognoseintervallen kann man Trefferzahlen vorhersagen.

e) Mit der Binomialverteilung kann man berechnen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass eine Münze gezinkt ist.

f) Die feste Trefferwahrscheinlichkeit p einer Bernoullikette liegt mit 95,4 %iger Wahrscheinlichkeit im zufälligen Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $\beta = 95{,}4\,\%$.

g) Konfidenzintervalle zu einem Bernoulliexperiment schwanken zwar zufallsabhängig, haben aber stets eine Schnittmenge, in der die unbekannte Trefferwahrscheinlichkeit liegt.

18 Konfidenzintervalle und medizinische Tests

→ Lösungen, Seite 535

Der Packungsbeilage eines Corona Schnelltests entnimmt man folgende Tabelle.

Tabelle 1: CLINITEST Rapid COVID-19 Antigen Test (Nasopharyngealtupfer) vs PCR

Methode		PCR		Gesamtergebnisse
CLINITEST Rapid COVID-19 Antigen Test (Nasopharyngeal-tupfer)	Ergebnisse	Positiv	Negativ	
	Positiv	117	3	120
	Negativ	2	743	745
Gesamt		119	746	865

Relative Empfindlichkeit: 98,32 % (95 % CI* 94,06 % to 99,80 %)
Relative Spezifität: 99,60 % (95 % CI* 98,83 % to 99,92 %)
Genauigkeit: 99,42 % (95 % CI* 98,66 % to 99,81 %)

*Konfidenzintervall

Dabei bezeichnet die **Empfindlichkeit** (Sensitivität) des Schnelltests die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schnelltest bei einer (durch einen PCR-Test nachgewiesenermaßen) infizierten Person anschlägt (positiv ausfällt). Als **Spezifität** bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schnelltest bei einer nicht infizierten Person negativ ausfällt.
Als **Genauigkeit** des Tests bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schnelltest das richtige Ergebnis liefert.

a) Erläutern Sie, was die Verfasser des Beipackzettels unter relativer Empfindlichkeit und relativer Spezifität verstehen und kontrollieren Sie die Angaben.

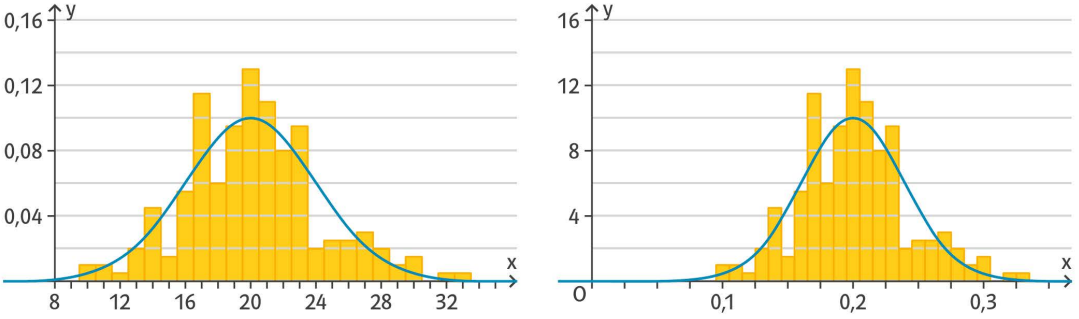
b) Berechnen Sie das Konfidenzintervall ($\beta = 0{,}95$) der Empfindlichkeit und vergleichen Sie mit den Angaben auf dem Beipackzettel

c) Nico vermutet, dass die Abweichungen darin begründet liegen, dass die Verfasser des Beipackzettels mit der Binomialverteilung rechnen, nicht mit dem $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz.
Er berechnet zur Kontrolle seiner Vermutung das 95 %-Prognoseintervall der absoluten Häufigkeiten zu $p = 0{,}9405$ und zu $p = 0{,}9407$. Erläutern Sie Nicos Gedanken und zu welchem Ergebnis seine Überlegungen führen.

d) Verfahren Sie entsprechend mit der Angabe 0,9866 für die Untergrenze des 95 %-Konfidenzintervalls zur Genauigkeit des Tests.

19

Beide Histogramme gehören zum gleichen Bernoulli-Versuch mit $n = 100$ und unbekanntem p.



a) „Links ist alles OK", meint Janina. „Da sind alle Säulen kleiner als 1". Aber rechts wurde falsch skaliert. Es gibt keine Wahrscheinlichkeiten über 1."
Formulieren Sie eine Antwort an Janina.

b) Entnehmen Sie den Abbildungen, wie oft in den 100 Versuchen 22 Treffer vorkamen und ermitteln Sie einen plausiblen Wert für die Trefferwahrscheinlichkeit p.

c) Prüfen Sie, ob Ihr Wert für p zur Lage der Wendepunkte und der 2σ-Regel passt.

d) Notieren Sie mögliche Funktionsgleichungen der Glockenkurven und machen Sie jeweils Punktproben.

e) 💻 Erstellen Sie über eine Simulation entsprechende Grafiken.

Prognoseintervalle für absolute Häufigkeiten

Bei einem n-stufigen Bernoulli-Experiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit p liegt die Trefferhäufigkeit X mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit P im Prognoseintervall $\left[n\cdot p - c\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)};\ n\cdot p + c\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}\right]$.

c und P hängen zusammen, wie in der Tabelle aufgeführt.

c	P | β
1	0,683
1,64	0,90
1,96	0,950
2	0,954
2,58	0,990
3	0,997

Für $p = 0{,}8$ und $n = 40$ ergibt sich $\mu = 32$, $\sigma = 2{,}53$ und für das 2σ-Intervall
$P(26{,}94 \le X \le 37{,}06) = P(27 \le X \le 37)$
$= F_{40;\,0{,}8}(37) - F_{40;\,0{,}8}(26) \approx 97{,}3\,\%$

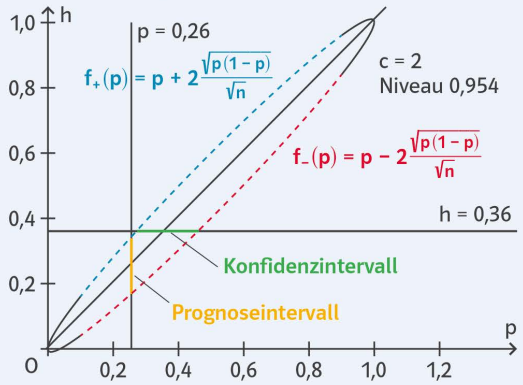
Für $p = 0{,}8$ und $n = 160$ ergibt sich $\mu = 128$, $\sigma = 5{,}06$ und für das 2σ-Intervall
$P(117{,}88 \le X \le 138{,}12) = P(118 \le X \le 138)$
$= F_{160;\,0{,}8}(138) - F_{160;\,0{,}8}(117) \approx 96{,}3\,\%$

Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten

Bei einem n-stufigen Bernoulli-Experiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit p liegt die relative Trefferhäufigkeit h mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit P im Prognoseintervall $\left[p - c\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}};\ p + c\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Man kann es durch $\left[p - \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}};\ p + \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ abschätzen.

$n = 100$, $p = 0{,}4$, $c = 2$
Prognoseintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,4 %: $[0{,}302;\ 0{,}498]$
(in der Ellipse gelbes Intervall, vertikal)



Konfidenzintervalle

Wenn man bei einer Bernoulli-Kette der Länge n die relative Trefferhäufigkeit h beobachtet, besteht das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau β aus den Wahrscheinlichkeiten p, in deren Prognoseintervall h liegt.

Man erhält die Grenzen des Konfidenzintervalls, indem man die Gleichungen $p \pm c\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} = h$ nach p auflöst.

Näherungsweise ergibt sich $\left[h - c\frac{\sqrt{h\cdot(1-h)}}{\sqrt{n}};\ h + c\frac{\sqrt{h\cdot(1-h)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Grafisch erhält man das Konfidenzintervall, indem man die Konfidenzellipse, die durch $f_\pm(p) = p \pm c\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}$ berandet wird, mit dem Graphen von $g(p) = h$ schneidet.

$n = 100$, $h = 0{,}36$, $c = 2$, $\beta = 0{,}954$
Konfidenzintervall $[0{,}271;\ 0{,}46]$
Näherung $[0{,}264;\ 0{,}456]$
(in der Ellipse grünes Intervall, horizontal)

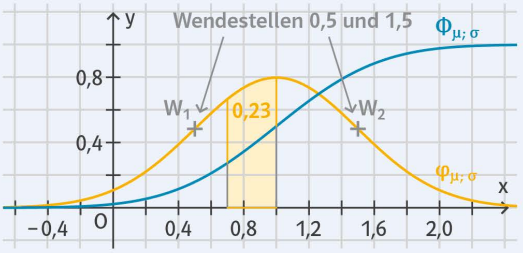
Normalverteilte Zufallsgrößen

Eine stetige Zufallsgröße X heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert im Intervall $[a;\ b]$ annimmt, beschrieben wird durch das Integral der Gauß'schen Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\,\sigma}$, wenn also $P(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(x-\mu)^2}\,dx$ gilt.

$P(X \le x) = \Phi_{\mu;\,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu;\,\sigma}(t)\,dt$ heißt Verteilungsfunktion.

$\Phi_{\mu;\,\sigma}^{-1}(a)$ berechnet die Stelle x für die gilt: $P(X \le x) = a$
Für normalverteilte Zufallsgrößen gelten die Sigmaregeln exakt.

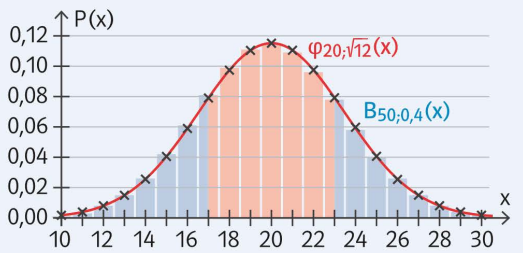
Dichte und Verteilungsfunktion der Normalverteilung mit $\mu = 1$, $\sigma = 0{,}5$:



Wenn X normalverteilt ist mit $\mu = 1$, $\sigma = 0{,}5$, gilt $P(0{,}7 \le X \le 1) = \int_{0{,}7}^{1} \varphi_{1;\,0{,}5}(x)\,dx \approx 0{,}23$.

Binomialverteilung – Normalverteilung

Die Wahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen X lassen sich mithilfe der Normalverteilung näherungsweise berechnen.
Als Parameter μ und σ werden dabei Erwartungswert und Standardabweichung der Binomialverteilung gewählt.



D32 Lösungen
Probeklausur
Kapitel X

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 1

30 min

1 25 Erdbeeren der Sorten A und B wurden gewogen. Die 50 erfassten Messwerte (in g) wurden in eine gemeinsame Liste aufgenommen, wobei die rot markierten Werte die Masse von Beeren der Sorte A zeigen, die blau markierten die der Sorte B.

10,4 11,5 12,3 12,4 12,7 12,8 12,9 13,1 13,4
13,4 14,1 14,5 14,6 14,6 14,7 14,9 15,1 15,1
15,4 15,5 15,5 15,9 16,4 16,6 16,8

16,9 16,9 16,9 17,3 17,3 17,5 17,8 17,8 17,9
18,2 19,2 19,3 19,3 19,4 19,5 19,5 19,6 19,7
19,9 20,0 20,8 21,8 22,1 23,2 23,5

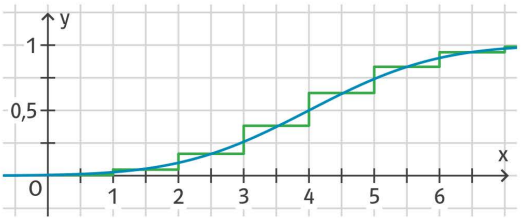
Wenn beide Sorten gleich schwer wären, müssten die 25 Werte von Sorte A je mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{2}$ in der unteren Hälfte vertreten sein.

a) Prüfen Sie durch Berechnung des Prognoseintervalls, ob Anlass besteht, die Annahme $p = \frac{1}{2}$ zu bezweifeln.

b) Erläutern Sie wie man vorgehen müsste, wenn man zur Prüfung ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $\beta = 95{,}4\,\%$ nutzen wollte.

2 Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten $p_1 < p_2$. Begründen Sie: Wenn für den Stichprobenumfang n gilt, $n > \frac{4}{(p_2 - p_1)^2}$ dann kann man auf Grundlage der Stichprobe mit einer Warscheinlichkeit von mindestens 95,4% die Gültigkeit von p_1 bezweifeln, falls p_2 gilt, und ebenso wahrscheinlich p_2 bezweifeln, falls p_1 gilt.

3 Die Graphen gehören zu einer Binomialverteilung mit den Parametern $n = 10$, unbekanntem p und der zugehörigen Normalverteilung.



a) Erläutern Sie, wie diese Graphen entstanden sind, und formulieren Sie drei Aussagen, die man ihnen entnehmen kann.

b) Begründen Sie, warum die Graphen von 0 auf 1 ansteigen.

c) Erläutern Sie die S-Form der Graphen und warum der eine Sprünge hat, der andere nicht.

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel – Runde 2

30 min

1 Abgebildet sind die 1σ-, 2σ- und 3σ-Prognoseintervalle zu einem Bernoulli-Experiment mit $p = 0{,}1$, $n = 25$, $n = 100$, $n = 400$ und deren Wahrscheinlichkeiten.

n	μ	σ	1σ-Intervall		P	2σ-Invervall		P	3σ-Intervall		P
25	2.5	1.50	1.00	4.00	0.631	-0.50	5.50	#ZAHL!	-2.00	7.00	#ZAHL!
100	10	3.00	7.00	13.00	0.670	4.00	16.00	0.956	1.00	19.00	0.998
400	40	6.00	34.00	46.00	0.680	28.00	52.00	0.955	22.00	58.00	0.997

a) Prüfen Sie die Einträge in den umrandeten Zellen durch eine Kontrollrechnung und erläutern Sie den Zusammenhang der Tabelle mit den Sigmaregeln.

b) Erläutern Sie, warum die Tabellenkalkulation in der ersten Zeile auch negative Zahlen und Fehlermeldungen ausgibt – und warum diese verschwinden, wenn man $p = 0{,}5$ setzt.

c) Erläutern Sie, wie die Länge der Prognoseintervalle von n abhängt.

2 Für einen Waschgang soll eine Waschmaschine durchschnittlich 55 Liter Wasser verbrauchen. Der Hersteller verspricht, dass bei höchstens 2,5% seiner Maschinen ein Verbrauch von 62 l oder mehr auftritt. Schätzen Sie ab, welche Standardabweichung der Wasserverbrauch bei einem Waschgang höchstens haben darf, wenn man davon ausgeht, dass der Wasserverbrauch normalverteilt ist.

3 Eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p soll mit 95,4%iger Sicherheit auf 4% genau bestimmt werden. Geben Sie den erforderlichen Stichprobenumfang an. Kommentieren Sie Ihr Vorgehen.

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 1 — 90 min

D32 Lösungen
Probeklausur
Kapitel X

1 Werbung eines Getränkeherstellers: „Die koffeinfreie Variante F unserer Erfrischungsbrause ist so perfekt designt, dass sie sich geschmacklich überhaupt nicht mehr von der koffeinhaltigen Variante K unterscheiden lässt."
Diese Aussage soll geprüft werden. Dazu verkosten 100 Personen in einem Blindversuch beide Varianten und müssen anschließend den Getränken die Sorten F und K zuordnen.
Berechnen Sie die 2σ- und 3σ-Prognoseintervalle, die sich für

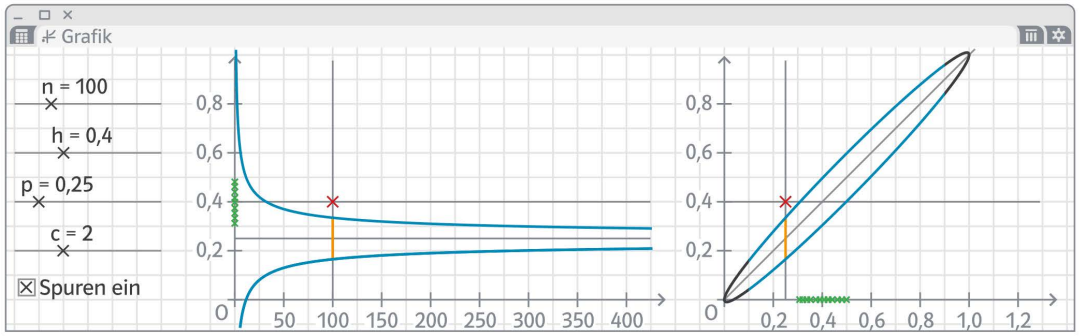
a) die absolute, **b)** die relative Trefferhäufigkeit

unter der Voraussetzung ergeben, dass die Aussage des Produzenten stimmt.

c) Berechnen Sie die entsprechenden Prognoseintervalle, wenn die Probanden vier Getränkeproben verkosten, von denen genau eine koffeinfrei ist.

d) Erläutern Sie, wie sich die Prognoseintervalle verändern, wenn man die Zahl der Probanden von 100 auf 400 vervierfacht.

2 **Trichter und Ellipsen**



Die beiden Abbildungen gehören zu den Parametern $n = 100$, $p = 0{,}25$. Beide zeigen einen roten Punkt, ein grünes und ein orangefarbenes Intervall.

a) Erläutern Sie, um welche Intervalle es sich handelt, wie die Achsen zu beschriften sind und welche Zusammenhänge die Diagramme veranschaulichen.

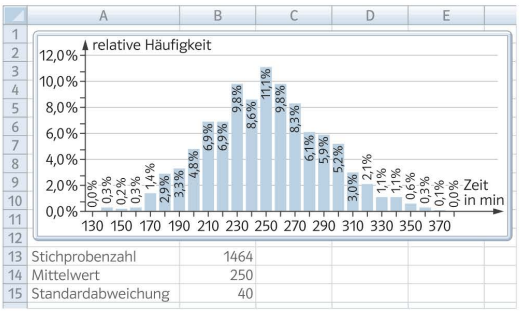
b) Erläutern Sie, was es aus statistischer Perspektive bedeutet, dass der rote Punkt nicht im orangefarbenen Intervall liegt.

c) Erläutern und begründen Sie, was sich in den Diagrammen ändert, wenn man
(1) n vervierfacht, (2) h von 0,4 auf 0,6 erhöht,
(3) c von 2 auf 1,96 verkleinert, (4) p von 0,25 auf 0,4 vergrößert.

d) Berechnen Sie die Grenzen der grünen und der orangefarbenen Intervalle exakt.

e) Bei den schwarz gefärbten Teilen der Ellipse ist die Laplace-Bedingung nicht erfüllt. Erläutern und prüfen Sie diese Aussage an einer selbst gewählten Stelle.

3 Das Diagramm zeigt die Verteilung der Laufzeiten X beim Köln-Marathon.
Es passt sehr gut zur Normalverteilung mit $\mu = 250$ und $\sigma = 40$ (Modell).



a) Beschreiben Sie, wie Sie μ und σ aus den Daten des Diagramms schätzen würden.

b) Berechnen Sie im Modell die Wahrscheinlichkeiten $P(235 < X \leq 265)$, $P(X \leq 205)$, $P(X > 265)$ und $P(245 < X < 255)$.
Vergleichen Sie sie mit den aus dem Diagramm erkennbaren relativen Häufigkeiten.

c) Berechnen Sie im Modell das zu $\mu = 250$ symmetrische Intervall, in dem 60 % aller Laufzeiten liegen müssten. Vergleichen Sie mit den Informationen im Diagramm.

D32 Lösungen
Probeklausur
Kapitel X

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln – Runde 2

90 min

1 **a)** Erläutern Sie am Beispiel von Fig. 1 die Begriffe Modell, Wahrscheinlichkeit, Realität, relative Häufigkeit, Hypothese, Prognose und Bezweifeln.

b) Bestimmen Sie das im abgebildeten Kontext sinnvolle Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $\beta = 0{,}95$.

c) Begründen Sie über das Prognose- und über das Konfidenzintervall, dass man $p(3) = 22{,}65\,\%$ anzweifeln sollte.

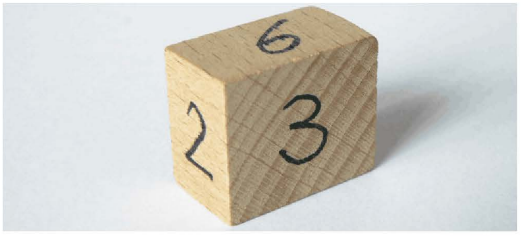


Fig. 1: Bei 1000 Würfen des Quaders kam die „3" 321-mal. Der Flächenanteil der 3 beträgt aber nur 22,6 %.

2 Schokocreme wird in 250-g-Packungen abgefüllt. Die Zufallsgröße X beschreibt das tatsächliche Füllgewicht in Gramm. Es wird angenommen, dass X mit dem Erwartungswert $\mu = 250$ und der Standardabweichung $\sigma = 5$ normalverteilt ist.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Füllgewicht einer Packung
(1) zwischen 245 g und 255 g liegt (das gilt als „normal"),
(2) über 260 g liegt,
(3) höchstens 240 g oder mindestens 250 g wiegt.

b) Bestimmen Sie das größte Gewicht z, das mindestens 99 % der Packungen überschreiten.

c) Mitunter verschiebt sich – bei gleichbleibender Standardabweichung $\sigma = 5$ – der Erwartungswert μ. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Gewicht im Normalbereich $[245; 255]$ liegt, wenn sich μ um $d = 3\,g$ vergrößert bzw. um $d = 6\,g$ verkleinert.

d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f: d \to P(245 \le X \le 255)$ und kommentieren Sie Ihre Skizze.

e) In regelmäßigen Abständen werden 200 Packungen der laufenden Produktion entnommen und gewogen. Die relative Häufigkeit h der normalgewichtigen Packungen wird ermittelt. Wenn das Konfidenzintervall (mit $\beta = 0{,}95$) zu h den Sollwert 0,684 nicht mehr enthält, wird Wartungsalarm ausgelöst.

Prüfen Sie, ob ein Anteil $h = \frac{110}{200}$ normalgewichtiger Packungen den Alarm auslöst.

f) Geben Sie alle relativen und absoluten Häufigkeiten h an, die zum Alarm führen.

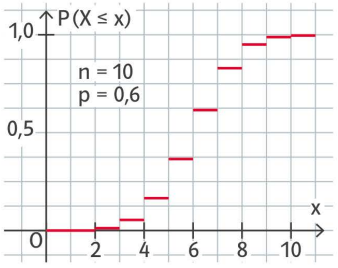
g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Alarm ausgelöst wird,
(1) wenn sich an μ nichts geändert hat,
(2) wenn μ sich von 250 auf 253 verschoben hat.

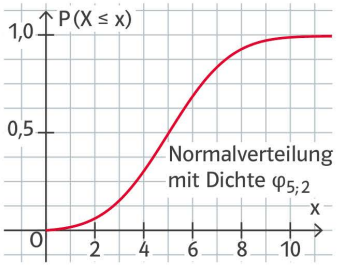
h) Unabhängig vom Sachzusammenhang ist die normalverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 250$ und $\sigma = 5$ gegeben. Betrachtet werden Intervalle der Form $[\mu + a; \mu + 2a]$ rechts von μ. Bestimmen Sie zwei Werte von a, für die $P(\mu + a \le X \le \mu + 2a) = 0{,}1$ gilt.

3 X ist eine Zufallsgröße. Rechts sind die Graphen der Verteilungsfunktionen $F_{n;\,p}(x) = B_{n;\,p}(X \le x)$ der Binomialverteilung und

$$\Phi_{\mu;\,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

für bestimmte Werte von n, p, μ und σ gezeichnet.





a) Überprüfen Sie die Graphen, indem Sie jeweils die Funktionswerte für $x = 4$ und $x = 8$ mit dem Rechner bestimmen.

b) Anscheinend steigen die Graphen der Verteilungsfunktionen monoton von $y = 0$ auf $y = 1$ an. Begründen Sie ohne Rechnung, warum das bei allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen so ist.

c) Erklären Sie anschaulich den Verlauf der Verteilungsfunktionen. Warum hat die eine Sprünge und die andere nicht? Wie kommt die „S-Form" zustande?

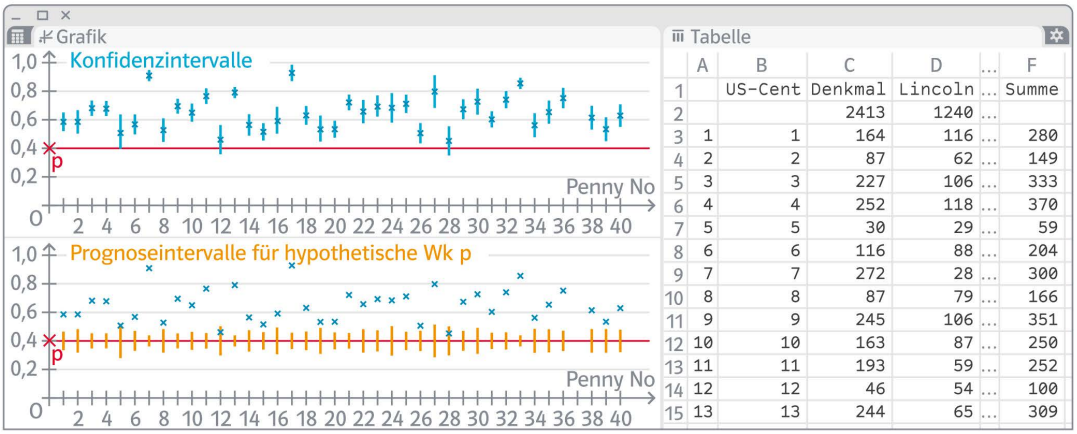
Der rotierende Penny und die Konfidenzintervalle

Wenn es um das Werfen von Münzen geht, sind wir uns einig: „fifty – fifty“ für die beiden Seiten Wappen und Zahl. Mit hoher Selbstverständlichkeit unterstellen wir Symmetrien. Wegen unterschiedlicher Motive auf den Seiten sind die Münzen „in Wirklichkeit“ aber nicht ganz symmetrisch. Nur: diese Unterschiede spielen keine Rolle, wenn man Münzen in die Höhe schnippt und auffängt. Wenn man sie aber auf einer glatten Oberfläche vertikal um die eigene Achse kreiseln lässt, dann hat man bei einigen Prägungen gute Chancen, die Asymmetrie in Experimenten auch als statistisch signifikant nachweisen zu können. Um diesen Nachweis geht es im Folgenden.

1 **Daten interpretieren: Dualität von Konfidenz- und Prognoseintervallen**

Wegen des „ausgeprägten“ Profils empfehlen sich amerikanische 1-Cent-Münzen (Pennys), die auf der Vorderseite das Denkmal des Präsidenten Lincoln (D) zeigen und auf der Rückseite Lincolns Profil (L) und das Jahr der Prägung.

Die Tabelle im rechten Teil von Fig. 1 zeigt, wie oft bei 40 Pennys (in unterschiedlich umfangreichen Versuchsserien) das Denkmal bzw. Lincoln oben lag. Die beiden Grafiken (in der Abbildung links) veranschaulichen die 40 relativen Häufigkeiten der Seite D als blaue Punkte. In der oberen Grafik werden die blauen Punkte durch ihre 95,4 %-Konfidenzintervalle umgeben. In der unteren Grafik lässt sich eine fiktive Wahrscheinlichkeit p (rote horizontale Linie) zusammen mit den zu den unterschiedlichen Stichprobenumfängen gehörenden 2 σ-Prognoseintervallen nach oben oder unten verschieben.



	A	B	C	D	...	F
1		US-Cent	Denkmal	Lincoln	...	Summe
2			2413	1240	...	
3	1	1	164	116	...	280
4	2	2	87	62	...	149
5	3	3	227	106	...	333
6	4	4	252	118	...	370
7	5	5	30	29	...	59
8	6	6	116	88	...	204
9	7	7	272	28	...	300
10	8	8	87	79	...	166
11	9	9	245	106	...	351
12	10	10	163	87	...	250
13	11	11	193	59	...	252
14	12	12	46	54	...	100
15	13	13	244	65	...	309

Fig. 1

a) Prüfen Sie durch Nachrechnen an den Daten eines Penny aus der Tabelle, dass die vertikalen Strecken tatsächlich die Konfidenz- bzw. Prognoseintervalle darstellen.

b) Experimentieren Sie mit der interaktiven Anwendung, indem Sie p verschieben und fassen Sie Zusammenhänge zwischen den Prognoseintervallen und den Konfidenzintervallen in Worte. Ergänzen Sie dazu den folgenden Satz und begründen sie ihn: „Immer dann, wenn das Prognoseintervall zu p die relative Häufigkeit …“.

c) Mia fragt nach der Wahrscheinlichkeit für „Denkmal“. Formulieren Sie eine schlüssige Antwort.

I30 **interaktive Anwendung**
Der kreiselnde Penny und Konfidenzintervalle

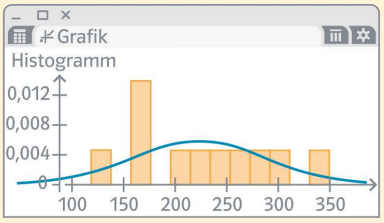
2 **Daten erheben: Selbst experimentieren**

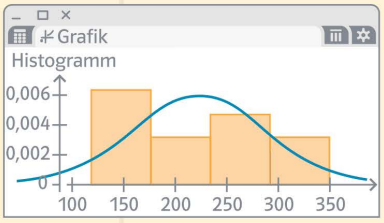
Suchen Sie nach Münzen mit stark ausgeprägten Profilen. Lassen Sie diese vertikal um ihre eigene Achse kreiseln. Die Ergebnisse zählen nur, wenn die Münze sehr lange in Ruhe kreiseln konnte, bevor sie sich für die Landung auf einer Seite entscheidet.
Übertragen Sie Ihre Häufigkeiten in die interaktive Anwendung und beurteilen Sie mithilfe der Grafiken, bei wie vielen Ihrer Münzen Anlass besteht, an der Brauchbarkeit des Laplace-Modells zu zweifeln.

US-Pennys kann man bestellen.
Bei Euro-Münzen ist der Nachweis signifikanter Abweichungen vom Laplace-Modell in der Regel kaum möglich.

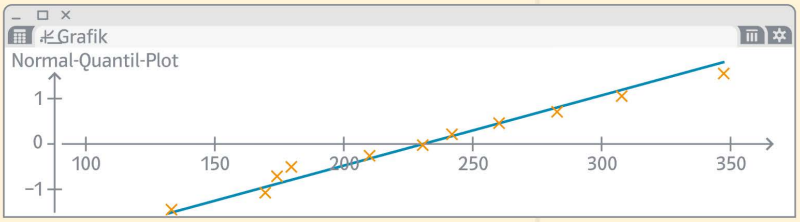
MK Die Normalverteilung und Normal-Quantil-Plots

Es ist (insbesondere bei wenigen Daten) schwer, mit Histogrammen zu beurteilen, ob bzw. wie gut sich eine Normalverteilung als Modell zur Beschreibung der Daten eignet. Das liegt daran, dass der Eindruck, den Histogramme erzeugen, erheblich von der Breite der verwendeten Klassen abhängen kann.





Statistiker nutzen deswegen die in vielen MMS implementierten **Normal-Quantil-Plots,** kurz NQ-Plots. Diese stellen die Daten – unabhängig von einer Klassenbildung – als Folge von Punkten dar. Die Punktfolgen sind umso „linearer" je besser das Normalverteilungsmodell die Daten beschreibt.



Hier sind die Gewichtsverteilungen von 11 Kekspackungen dargestellt.

1 Normal-Quantil-Plots in der Praxis

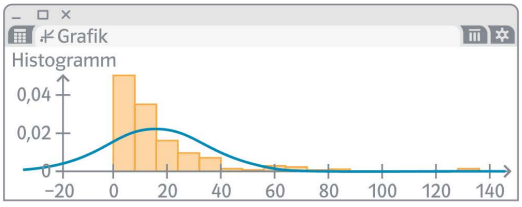
a) Wiegen Sie eine größere Zahl gleichartiger Gegenstände und stoppen Sie in einer längeren Rede, wie lange man auf den nächsten Fülllaut (z. B. „äh") warten muss, oder die Zeiten, die bei einer Person zwischen den Lidschlägen vergehen. Berechnen Sie jeweils den Mittelwert $\bar{x}$ und die empirische Standardabweichung s der beiden Datensätze.

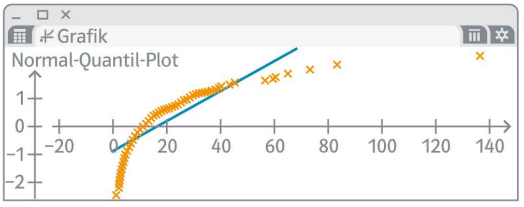
b) Veranschaulichen Sie die beiden Verteilungen (Gewichte und Wartezeiten) jeweils durch einen NQ-Plot und durch ein Histogramm mit variabler Klassenbreite.

c) Bestätigen Sie, dass die Gerade im NQ-Plot die Nullstelle $\bar{x}$ und die Steigung $\frac{1}{s}$ besitzt.

d) Experimentieren Sie mit NQ-Plots zu 100
(1) normalverteilten Zufallszahlen,
(2) binomialverteilten Zufallszahlen,
(3) gleichverteilten Zufallszahlen.

I32 **interaktive Anwendung** NQ-Plots





Hier sind Wartezeiten dargestellt.

2 Warum die NQ-Plots funktionieren – ein Exkurs für Neugierige

Für normalverteilte Zufallsgrößen X gilt (auf der Modellebene) $P(X \le x) = \Phi_{\mu;\sigma}(x)$.
Um die Realität mit diesem Modell vergleichen zu können, zählen MMS für jede Zahl x eines Datensatzes, wie viele Daten kleiner sind: Sie ermitteln dann die zugehörige relative Häufigkeit $h(X \le x)$, also die empirische Verteilungsfunktion des Datensatzes.
Wenn das Normalverteilungsmodell passt, dann liegen die relativen Häufigkeiten in der Nähe der Wahrscheinlichkeiten, es gilt also für jedes x $h(X \le x) \approx \Phi_{\mu;\sigma}(x)$.
Die empirische Verteilungsfunktion liegt also in der Nähe der Verteilungsfunktion des Modells.
Der Trick besteht nun darin, dass man auf beide Seiten $\Phi_{0;1}^{-1}$ anwendet und mit

$$NQ(x) = \Phi_{0;1}^{-1}(h(X \le x)) \approx \Phi_{0;1}^{-1}(\Phi_{\mu;\sigma}(x)) = \Phi_{0;1}^{-1}\left(\Phi_{0;1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

näherungsweise eine lineare Funktion mit der Nullstelle μ und der Steigung $\frac{1}{\sigma}$ erhält.

Bei der Umformung wurde die Gleichheit (*) $\Phi_{\mu;\sigma}(x) = \Phi_{0;1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ genutzt.

Begründen Sie, dass (*) aus der Beziehung $\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \varphi_{0;1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ folgt (vgl. Seite 385, Aufgabe 15).

Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur

Am Ende der Qualifikationsphase wird die Abiturklausur geschrieben. Sie beinhaltet alle Themen und Inhalte der Qualifikationsphase. Das heißt, alle drei Sachgebiete Funktionen und Analysis, lineare Algebra und analytische Geometrie sowie Stochastik werden geprüft. Teilweise ist eine Aufgabenauswahl durch die Schülerinnen und Schüler vorgesehen.

Die Klausur besteht aus zwei Prüfungsteilen. Im ersten Prüfungsteil befinden sich Aufgaben, die ohne Hilfsmittel bearbeitet werden müssen. Es sind weder die Nutzung eines digitalen Hilfsmittels, noch das Nachschlagen in einer Formelsammlung erlaubt.
Im zweiten Prüfungsteil dürfen digitale Hilfsmittel und eine Formelsammlung genutzt werden.

Vorbereitung mit dem Lambacher Schweizer

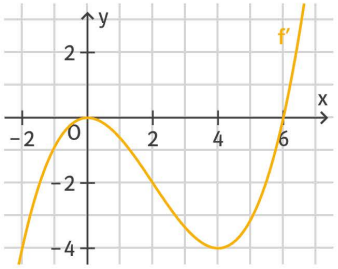
Die folgenden Beispielaufgaben sind mögliche Aufgaben für die Prüfungsteile 1 und 2. Sie sollen Ihnen bei der Vorbereitung auf die Klausur helfen. Einzelne Aufgaben oder Aufgabenteile sind mit dem Symbol 💻 gekennzeichnet. Es zeigt an, dass diese Aufgabenteile ohne MMS schwer oder nicht zu lösen sind.
Die Lösungen zu allen Aufgaben finden Sie in den Medien zu diesem Schulbuch.

1. Prüfungsteil – Aufgaben ohne Hilfsmittel

D33 Lösungen Aufgaben zur Abiturvorbereitung

Funktionen und Analysis

1 Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.



a) f hat auf dem Intervall $[-2; 7]$ zwei Extremstellen.
b) f hat auf dem Intervall $[-2; 7]$ zwei Wendestellen.
c) $\int_{-2}^{4} f'(x)\,dx = 0$
d) Der Graph von f hat auf dem Intervall $[-2; 7]$ einen Sattelpunkt.
e) f'' ist an der Stelle $x = 5$ positiv.
f) f''' ist an der Stelle $x = 0$ positiv.

2 Gegeben sind die Graphen einer Funktion g und einer Stammfunktion G von g.
a) Begründen Sie, warum in Fig. 1 der Graph von g und in Fig. 2 der Graph von G abgebildet sein muss.

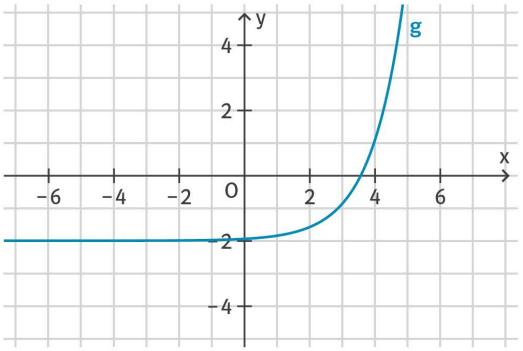


Fig. 1

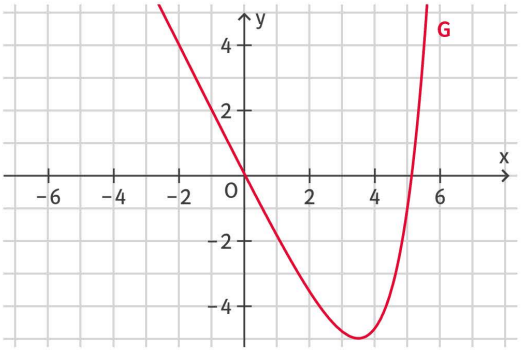
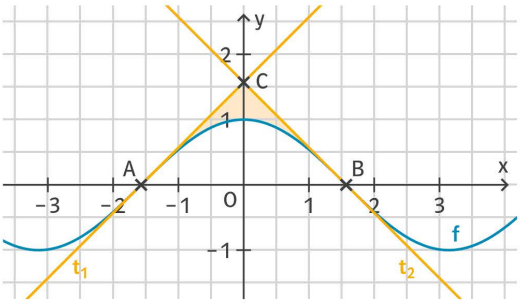


Fig. 2

b) Bestimmen Sie einen Näherungswert für $\int_{0}^{3,5} g(x)\,dx$
(1) mithilfe von Fig. 1, (2) mithilfe von Fig. 2.

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$.
In der Abbildung sind zudem die Tangenten t_1 und t_2 an den Graphen von f eingezeichnet.



a) Begründen Sie, dass die Tangente t_1 an f im Punkt $A\left(-\frac{\pi}{2}\,|\,0\right)$ die Gleichung $t_1(x) = x + \frac{\pi}{2}$ hat, und geben Sie die Gleichung von t_2 an.

b) (1) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC, das die Tangenten t_1 und t_2 mit der x-Achse einschließen.
(2) Ermitteln Sie den Inhalt der eingefärbten Fläche.

4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich von f an.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1\,|\,1)$.

d) Der Graph von f und die x-Achse schließen für $x > 1$ eine nach rechts unbeschränkte Fläche ein. Zeigen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche nicht begrenzt ist.

e) Der Graph von f soll im Intervall $[1; z]$ um die x-Achse rotieren.
Bestimmen Sie z so, dass der dabei entstehende Drehkörper das Volumen $\frac{3}{4}\pi$ hat. Zeigen Sie, dass das Volumen des Drehkörpers für $z \to +\infty$ endlich ist.

5 Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f so, dass die folgenden Bedingungen im Intervall $[-5; 5]$ erfüllt sind: Für $x < 0$ ist $f(x) < 0$ und $f''(x) > 0$ und für $x > 0$ ist $f(x) > 0$ und $f''(x) < 0$.
Weiterhin gilt $\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = 0$. Kommentieren Sie Ihre Lösung.

6 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse, der Graph von g ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Beide Funktionsgraphen haben einen Tiefpunkt in $T(2\,|\,-2)$.

a) Beurteilen Sie, ob die Funktionen f und g noch weitere Extrema besitzen. Geben Sie gegebenenfalls jeweils die Art und die Koordinaten eines weiteren Extremums von f bzw. g an.

Der Graph der Funktion h entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts. Der Graph der Funktion i entsteht aus dem Graphen der Funktion g durch Verschiebung um 2 Einheiten nach links.

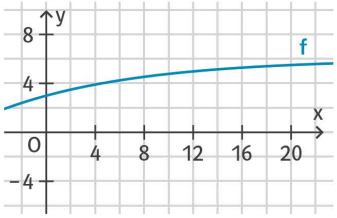
b) Geben Sie die Symmetrieachse des Graphen von h an.

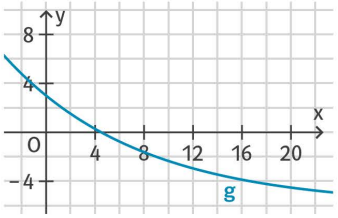
c) Begründen Sie, dass der Graph der Funktion i punktsymmetrisch zum Punkt $P(-2\,|\,0)$ ist.

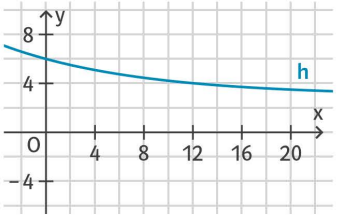
d) Begründen Sie, dass die Graphen von h und i den gemeinsamen Tiefpunkt $Q(0\,|\,-2)$ haben.

7 Ordnen Sie die Terme auf den Kärtchen begründet den Funktionsgraphen von f, g und h zu.

A $-6 + 9e^{-0{,}09x}$ B $6 - 3e^{-0{,}09x}$ C $3 + 3e^{-0{,}09x}$

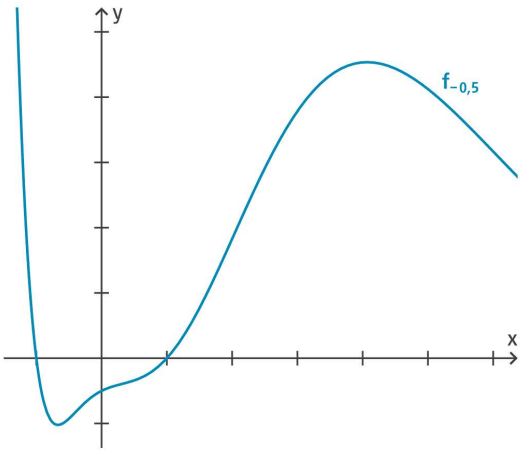






D33 Lösungen
Aufgaben zur Abiturvorbereitung

8 Für jedes $k \in \mathbb{R}$ ist durch die Gleichung $f_k(x) = (x^4 + kx^2 + k) \cdot e^{-x}$ eine Funktion f_k gegeben. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f_{-0,5}$.



a) Ermitteln Sie rechnerisch den Wert von k, für den f_k genau eine Nullstelle hat.

b) Berechnen Sie die Nullstellen für $k = -0,5$.

c) Der Graph von $f_{-0,5}$ schneidet die y-Achse im Punkt $P(0|-0,5)$.
Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an $f_{-0,5}$ in P sowie den Inhalt der Fläche, den die Tangente t mit den Koordinatenachsen einschließt.
[Kontrollergebnis: $t(x) = 0,5x - 0,5$]

d) Ermitteln Sie, für welchen Wert von k der Punkt $P(2|26e^{-2})$ auf dem Graphen von f_k liegt.

9 Gegeben sind die Funktionen g und h mit $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ mit $D_g = \mathbb{R}^+$ und $h(x) = \sqrt{2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)}$ mit $D_h =]0; 1]$.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass g auf D_g streng monoton fallend ist.

b) Begründen Sie, dass h für $x \leq 0$ und für $x > 1$ nicht definiert ist.

c) Begründen Sie mithilfe von Definitions- und Wertebereich, der gegebenen Graphen und beispielhaft gewählter Punkte, dass g und h Umkehrfunktionen zueinander sind.

Analytische Geometrie und lineare Algebra

1 Gegeben sind die Punkte $A(3|-1|4)$, $B(5|1|3)$ und $C(2|-1|2)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig, aber nicht gleichschenklig ist.

b) Bestimmen Sie einen Punkt D so, dass das Viereck ABDC ein Rechteck ist.
[Kontrollergebnis: $D(4|1|1)$]

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks ABDC.

2 Gegeben sind die Punkte $A(2|3|-1)$, $B(4|0|5)$ und $C(5|3|-2)$ sowie die Gerade g mit der Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Gerade g parallel zur Geraden durch die Punkte A und B ist und durch den Punkt C verläuft.

b) Geben Sie einen Term an, mit dem man die Größe des Winkels im Punkt B des Dreiecks ABC berechnen kann.

3 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{I} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 = 2 \\ \text{II} & x_1 & + & & & x_3 = 1 \\ \text{III} & x_1 & - & x_2 & & = 3 \end{array}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

b) Interpretieren Sie die Lösungsmenge geometrisch.

c) Begründen Sie, dass die Ebene E, die durch die Gleichung II gegeben ist, parallel zur x_2-Achse ist und durch die Punkte $P(1|0|0)$ und $Q(0|0|1)$ verläuft.

d) Geben Sie die Gleichung einer Ebene F in Koordinatenform an, die parallel zur Ebene E verläuft.

4 Gegeben sind die Geraden g, h, i und k.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$, $i: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$, $k: \vec{x} = \begin{pmatrix}11\\3\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\-1\end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Ebene E, die h enthält und zu g parallel ist.
b) Überprüfen Sie, ob sich die Geraden i und k orthogonal schneiden.
c) Geben Sie die Koordinatenform einer Ebene F an, die die Geraden i und k enthält.

5 Gegeben sind die Ebene E mit $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}$ und die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\9\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E.
b) Begründen Sie, dass die Gerade g die Ebene E im rechten Winkel schneidet.

6 Eine Untersuchung der gegenseitigen Lage einer Ebene E und einer Geraden g führt auf die Gleichung $2\cdot(4+2t) - 3\cdot(-1+t) + 2 - t = 8$.

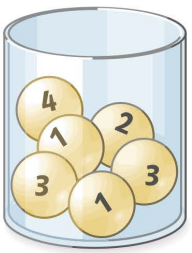
a) Geben Sie je eine Gleichung für die Ebene E und die Gerade g an.
b) Bestimmen Sie die Lagebeziehung von E und g.
c) Verändern Sie einen Summanden in der Gleichung so, dass E und g sich schneiden, und weisen Sie nach, dass es einen Schnittpunkt gibt.
d) Verändern Sie einen Summanden in der obigen Gleichung so, dass g in E liegt, und weisen Sie nach, dass g dann in E liegt.

7 Gegeben sind die Ebene E mit $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und der Punkt $P(0|0|1)$.

a) Geben Sie die Gleichung einer Geraden g an, sodass g senkrecht auf E steht und durch den Punkt P verläuft.
b) Der Punkt P wird an der Ebene E gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts P′ von P.
c) Eine Ebene F verläuft durch die Punkte $A(2|0|0)$, $B(6|-7|0)$ und $C(6|0|7)$. Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes Q, der von der Ebene F den Abstand 6 LE hat.

Stochastik

1 In einer Urne liegen sechs Kugeln. Man entnimmt daraus „blind" zwei Kugeln mit Zurücklegen. Betrachten Sie die Ereignisse E: „Die Summe der Zahlen auf den Kugeln beträgt höchstens 3." und $F = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$.



a) Geben Sie E als Menge an und beschreiben Sie F in Worten.
b) Bestimmen Sie P(E), P(F) und P(F\E).
c) Geben Sie an, welcher Verknüpfung der Ereignisse E und F die Menge $\{(1, 1), (2, 1)\}$ entspricht und stellen Sie diese schematisch in einem Mengendiagramm dar.
d) Beurteilen Sie, ob die Ereignisse E und F stochastisch unabhängig sind.

2 Die Zufallsgröße X gibt die Auszahlung a bei einem Spiel in Euro an.
Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

a	2	0	5
P(X = a)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X.
b) Ändern Sie die geringste Auszahlung so, dass das Spiel bei einem Einsatz von 3 € fair ist.

D33 Lösungen
Aufgaben zur Abiturvorbereitung

3 **a)** Gegeben sind die Ereignisse A, B und C.
A: Beim dreimaligen Werfen eines Würfels erhält man dreimal einen Teiler von „6“.
B: Beim Werfen mit vier Würfeln ist mindestens eine Eins dabei.
C: Beim 10-maligen Münzwurf wird genau einmal „Kopf“ geworfen.
Geben Sie jeweils einen Term an, mit dem man die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten des jeweiligen Ereignisses berechnen kann.

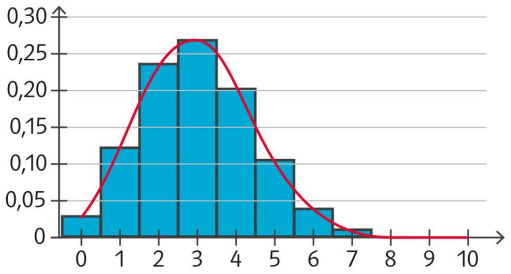
b) Beschreiben Sie in Worten, welche Fragestellung die Ungleichung $1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^n \geq 0{,}95$ löst.

4 Die Abbildung zeigt den Graphen einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit $n = 10$ und ganzzahligem Erwartungswert.

a) Bestimmen Sie p und μ.

b) Geben Sie ein Zufallsexperiment an, das zu den gegebenen Größen passt.

c) Bestimmen Sie näherungsweise mit dem Histogramm $P(X = 4)$, $P(X \leq 3)$ und $P(X > 3)$.



5 Der Bürgermeister einer Stadt geht davon aus, dass sein Stimmenanteil für seine Wiederwahl 50 % beträgt. Man befragt 100 Personen, 44 davon geben an, ihn wählen zu wollen.

a) Erläutern Sie für diese Situation den Begriff „2σ-Prognoseintervall“.

b) Beurteilen Sie, ob der Bürgermeister aufgrund der Befragung zweifeln muss, dass sein Stimmenanteil 50 % beträgt.

c) Erläutern Sie für die Situation den Begriff des Konfidenzintervalls zum Konfidenzniveau $\beta = 0{,}954$. Geben Sie die Gleichungen an, mit denen man die Grenzen des Konfidenzintervalls exakt bzw. näherungsweise berechnet.

d) Man erhält als Lösung von Teilaufgabe c) gerundet das Konfidenzintervall $[0{,}34; 0{,}54]$ zum Konfidenzniveau $\beta = 0{,}954$. Erläutern Sie, was Sie dem Ergebnis entnehmen.

e) Beschreiben Sie, wie sich der Stichprobenumfang auf die Länge des Konfidenzintervalls auswirkt.

6 Das Gewicht eines Brotes einer bestimmten Sorte ist normalverteilt mit den Parametern $\mu = 500\,\text{g}$ und $\sigma = 10\,\text{g}$.

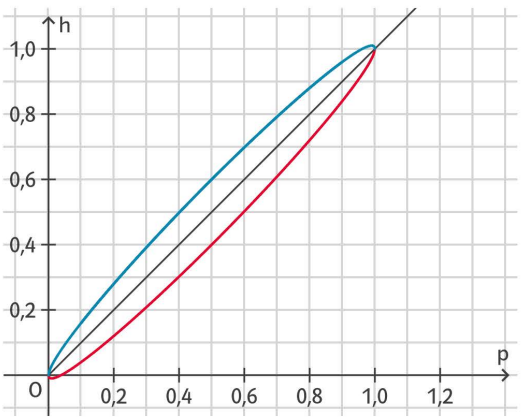
a) Geben Sie ein zu μ symmetrisches Intervall an, in dem ca. 68,3 % der Brotgewichte liegen.

b) Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Brot zwischen 480 und 500 g wiegt.

7 Das nebenstehende Diagramm gehört zu einem Stichprobenumfang $n = 100$ und zum Konfidenzniveau $\beta = 95{,}4\,\%$.

a) Lesen Sie das Konfidenzintervall zur relativen Häufigkeit $h = 0{,}6$ und das Prognoseintervall zur Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}6$ ab.

b) Erläutern Sie, wie sich das Diagramm sowie das Prognose- und das Konfidenzintervall ändern, wenn n größer wird.



2. Prüfungsteil – Aufgaben mit Hilfsmitteln

Funktionen und Analysis

1 Bei der Untersuchung einer Bauchspeicheldrüse spritzt man einen Farbstoff und misst, wie schnell er ausgeschieden wird. Man geht bei einer gesunden Bauchspeicheldrüse in den ersten 55 Minuten von einem exponentiellen Abbau der Farbstoffmenge von etwa 4 % pro Minute aus. Die Funktion f soll den Abbauprozess eines gesunden Organs beschreiben, wenn 0,3 g des Farbstoffs gespritzt werden. Dabei gibt $f(t)$ die in der Bauchspeicheldrüse verbliebene Farbstoffmenge (in g) und $t \in [0; 55]$ die Zeit (in min) nach dem Spritzen an.

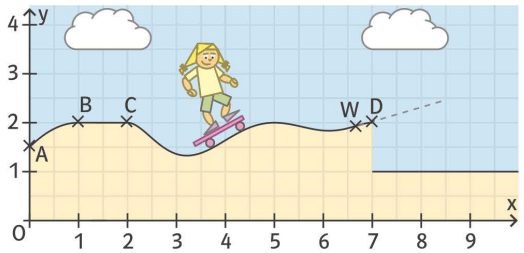
a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion f für eine gesunde Bauchspeicheldrüse.
[Kontrollergebnis: $f(t) = 0{,}3 \cdot 0{,}96^t = 0{,}3 \cdot e^{-0{,}04\,t}$]

b) 20 Minuten nach dem Spritzen hat das Organ einer Person 0,1 g ausgeschieden.
(1) Geben Sie an, wie viel Prozent des vorhandenen Farbstoffs die untersuchte Bauchspeicheldrüse pro Minute ausscheidet. Vergleichen Sie mit einem gesunden Organ.
(2) Ermitteln Sie, nach wie vielen Minuten bei einer gesunden und bei der untersuchten Bauchspeicheldrüse die Hälfte des gespritzten Farbstoffs ausgeschieden ist.
(3) Geben Sie für die Zeitpunkte aus Teilaufgabe b) (2) jeweils die Geschwindigkeit an, mit der der Farbstoff ausgeschieden wird.

Die Farbstoffmenge für die gesunde Bauchspeicheldrüse soll nach 55 Minuten durch die Funktion h mit $h(t) = -0{,}0013\,t + 0{,}1033$ modelliert werden.

c) Weisen Sie nach, dass es sich beim Übergang des Graphen der Funktion $f(t) = 0{,}3 \cdot e^{-0{,}04\,t}$ zum Graphen der Funktion h um einen Übergang „ohne Knick" handelt, und berechnen Sie, wann der Farbstoff bei dieser Modellierung vollständig ausgeschieden ist.

2 Bei einem jump'n'run-Spiel fährt eine Figur auf einem Skateboard dauerhaft entlang einer Fahrbahn. Die Grafik zeigt einen Ausschnitt des Spiels. Die Koordinatenachsen sollen den unteren und den linken Rand des Bildschirmausschnitts beschreiben. Dabei entspricht eine Einheit 25 mm und $x = 0$ entspricht dem Beobachtungsbeginn.



Die Funktion f_a modelliert für $a = -0{,}01$ die Fahrbahn zwischen den Punkten C und D. Ihre Funktionsgleichung lautet $f_a(x) = a \cdot (x-2)^2(x-5)^2(x-7)^2 + 2$ für $a < 0$.

a) Ermitteln Sie für den Punkt $P(4 \mid f_{-0{,}01}(4))$, wie viele Millimeter die Figur von den Bildschirmrändern entfernt ist.

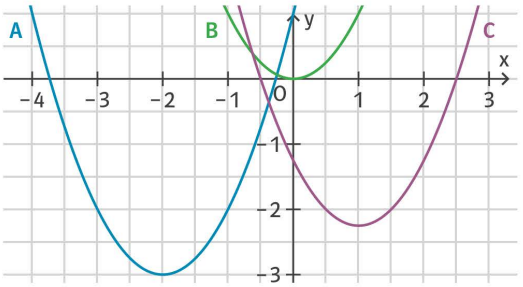
b) Begründen Sie mithilfe der Funktion f_a, dass die Hochpunkte an den Stellen $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ und $x_3 = 7$ unabhängig von a den Wert $y = 2$ haben. Geben Sie an, wie viele Zentimeter die Figur an diesen Stellen jeweils vom unteren Bildschirmrand entfernt ist.

c) Kurz bevor die Fahrbahn bei $x = 7$ abbricht, „fliegt" die Figur ab dem Wendepunkt W zunächst entlang der gepunktet dargestellten Tangente t. Bei $x = 7{,}5$ kommt sie auf dem tiefer gelegenen Stück der Fahrbahn auf.
(1) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes W.
(2) Bestimmen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente t.

d) Zwischen den Punkten A und B entspricht die Fahrbahn dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = -0{,}5(x-1)^2 + 2$. Zwischen den Punkten $B(1 \mid 2)$ und $C(2 \mid 2)$ ist der Verlauf konstant bei $y = 2$. Berechnen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung den Inhalt der Fläche, die von der Fahrbahn und den beiden Koordinatenachsen im Intervall $[0; 2]$ eingeschlossen wird. Geben Sie Ihr Ergebnis in cm^2 an.

e) Ermitteln Sie $\int_2^7 f(x)\,dx$. Deuten Sie das Integral im Kontext und geben Sie Ihr Ergebnis in cm^2 an.

3 Durch f_t mit $f_t(x) = x^2 - 4tx - t^2 - 2t$ $(t \in \mathbb{R})$ ist eine Funktionsschar gegeben. Die Abbildung zeigt die Graphen von f_{-1}, f_0 und $f_{0,5}$.



a) Ordnen Sie die Graphen A, B und C den Funktionen f_{-1}, f_0 und $f_{0,5}$ zu.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Tiefpunkte der Graphen von f_{-1}, f_0 und $f_{0,5}$.
[Kontrollergebnis: $T_{-1}(-2\,|\,-3)$, $T_0(0\,|\,0)$, $T_{0,5}(1\,|\,-2{,}25)$]

Die Tiefpunkte der Schar liegen alle auf einer Parabel p.

c) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von p.
[Kontrollergebnis: $p(x) = -1{,}25x^2 - x$]

d) Der Punkt $P(-1\,|\,-0{,}25)$ liegt auf der Parabel p und ist somit ein Tiefpunkt des Graphen von f_t.
(1) Geben Sie die Funktionsgleichung einer transformierten Normalparabel g in Scheitelpunktform und Normalform an, deren Tiefpunkt P ist.
[Kontrollergebnis: $g(x) = x^2 + 2x + 0{,}75$]
(2) Ermitteln Sie t so, dass f_t der Parabel aus Teilaufgabe d) (1) entspricht.

4 Beim einem internationalen Leichtathletik-Wettkampf wird die Modellfunktion f mit $f(x) = 18x \cdot e^{-0{,}04x+2}$ verwendet, um näherungsweise die Anzahl der Fans zu beschreiben, die pro Minute zu einer bestimmten Uhrzeit ins Stadion kommen. Der Wert $x = 0$ entspricht 8 Uhr, die Wettkämpfe beginnen um 10 Uhr.

a) Berechnen Sie, wie viele Fans zu Beginn der Wettkämpfe im Stadion sind.

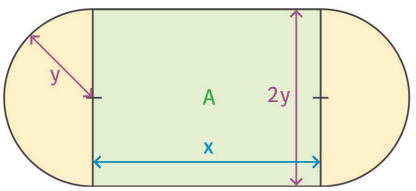
b) Bestimmen Sie, um wie viel Uhr der Besucherandrang am größten ist.

c) Ermitteln Sie, wie viele Fans laut Modell zu Beginn der Wettkämpfe im Stadion sind, unter der Annahme, dass das Stadion um 8 Uhr noch leer ist und es niemand vor Beginn der Wettkämpfe verlässt.

Beim Bau eines Sportstadions soll die 400 m lange Laufbahn so angelegt werden, dass im Inneren eine rechteckige Rasenfläche mit möglichst großem Flächeninhalt entsteht.

d) Begründen Sie, dass $y = \frac{400 - 2x}{2\pi}$ gilt (x, y in m).

e) Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion A für den Flächeninhalt des Rechtecks, die von der Variablen x abhängt, für $x \in [0; 200]$. Berechnen Sie das Maximum von A. Geben Sie die entsprechenden Längen der Strecken x und y an.



5 Eine junge Pflanze ist beim Einpflanzen einen Meter hoch. Die Wachstumsgeschwindigkeit wird in einem Modell in den ersten 30 Monaten nach dem Einpflanzen durch die Funktion v mit $v(t) = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}05t}$ beschrieben (t in Monaten nach dem Einpflanzen, v in m pro Monat).

a) Geben Sie die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze 2 Monate nach dem Einpflanzen an.

b) Begründen Sie, dass die Wachstumsgeschwindigkeit streng monoton abnimmt.

Die Funktion h mit $h(t) = 3 - 2 \cdot e^{-0{,}05t}$ gibt die Höhe der Pflanze (in m) nach t Monaten an.

c) Weisen Sie nach, dass h eine Stammfunktion von v ist.

d) Es gilt $h(24) = 1 + \int_0^{24} v(t)\,dt$. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Gleichung im Sachkontext.

e) Begründen Sie, dass von einem begrenzten Wachstum ausgegangen wird, und geben Sie an, mit welcher maximalen Höhe der Pflanze zu rechnen ist.

D33 **Lösungen** Aufgaben zur Abiturvorbereitung

6 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ für $-1 \le x \le 2$ und $g(x) = 3x^2 - 21x + 30$ für $2 \le x \le 5$.

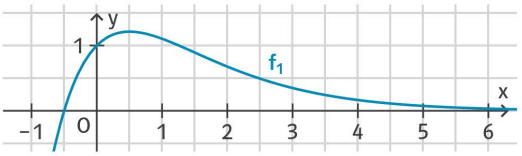
a) Ermitteln Sie die Nullstellen von g.

b) Zeigen Sie, dass die beiden Funktionsgraphen an der Stelle $x = 2$ „ohne Knick" ineinander übergehen.

c) Bestätigen Sie: Der Graph von f ist für $-1 < x < 2$ rechtsgekrümmt und der Graph von g ist für $2 \le x \le 5$ linksgekrümmt.

d) Überprüfen Sie die Aussage: „Die Fläche, die der Graph von g mit der x-Achse einschließt, ist etwa zwei Drittel mal so groß wie die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt."

7 Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = (2x + k) \cdot e^{-x}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_1 ist in der Abbildung dargestellt.



a) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Funktionsschar genau eine Nullstelle haben.

b) Untersuchen Sie, für welche Werte von k der Extrempunkt des Graphen von f_k auf einer der Koordinatenachsen liegt.

Die Funktion F_k mit $F_k(x) = -(2x + k + 2) \cdot e^{-x}$ ist eine Stammfunktion von f_k.

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass F_k eine Stammfunktion von f_k ist.

d) Der Graph von f_k schließt mit den Koordinatenachsen und der Geraden $x = u$ mit $u > -0{,}5k$ eine Fläche ein.

(1) Bestimmen Sie den Inhalt $A(u)$ dieser Fläche in Abhängigkeit von u.

(2) Bestimmen Sie, welchen Wert $A(u)$ für $u \to +\infty$ annimmt.

(3) Ermitteln Sie, für welchen Wert von k $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u) = 5$ gilt.

e) Die Punkte $P(0 \mid f_1(0))$, $Q(u \mid 0)$ und $R(u \mid f_1(u))$ bilden für $u > 0$ ein Dreieck. Berechnen Sie, für welchen Wert von u der Inhalt dieses Dreiecks maximal wird.

8 Ein ausgewachsener Ahornbaum hat etwa 100 000 Blätter und jedes Blatt hat eine Oberfläche von ca. $55\,cm^2$. Die Blätter produzieren abhängig von der Sonneneinstrahlung Sauerstoff. $1\,m^2$ Blattoberfläche liefert maximal 500 ml Sauerstoff pro Stunde. Die Sauerstoffproduktion $s(t)$ in $\frac{ml}{h \cdot m^2}$ während eines Sommertages zwischen 6 Uhr und 21 Uhr kann näherungsweise beschrieben werden durch $s(t) = 500 \cdot e^{-\frac{t^4}{360}}$ ($t \in [-6; 9]$; $t = 0$ entspricht 12 Uhr).

a) Skizzieren Sie den Graphen von s und beschreiben Sie dessen Verlauf im Kontext.

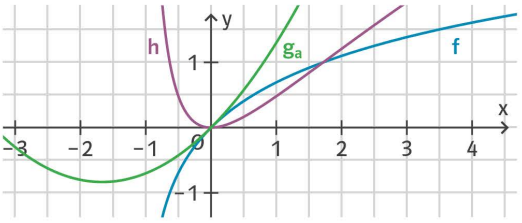
b) Berechnen Sie die Sauerstoffmenge, die pro m^2 während eines Sommertages produziert wird.

c) Ermitteln Sie, wie viel Sauerstoff der Baum während eines Sommertages produziert.

d) Untersuchen Sie, wie lange es an einem Sommertag dauert, bis pro m^2 eine Sauerstoffmenge von einem Liter produziert wird.

9 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \ln(x + 1)$ sowie die Funktionsschar $g_a(x) = a \cdot x^2 + x$, $a \in \mathbb{R}$. Außerdem ist für $x > -1$ die Funktion h gegeben durch $h(x) = (\ln(x + 1))^2$.

a) Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{R}$ haben die Graphen von g_a und f den gemeinsamen Punkt $P(0 \mid 0)$. Insbesondere ist g_0 die Tangente an den Graphen von f im Punkt P.



b) Zeigen Sie rechnerisch: Die Graphen der Funktionen h und f haben die Schnittpunkte $S_1(0 \mid 0)$ und $S_2(e - 1 \mid 1)$.

c) Begründen Sie mithilfe des Krümmungsverhaltens von h und f, dass $f(x) \ge h(x)$ im Intervall $[0; e - 1]$ gilt.

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A, die von den Graphen der Funktionen f und h eingeschlossen wird.

D33 Lösungen
Aufgaben zur Abiturvorbereitung

Analytische Geometrie und lineare Algebra

1 Gegeben sind die Punkte $A(1|6|0)$, $B(4|7|2)$, $C(2|7|1)$ und $D(2|0|2)$.

a) (1) Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene E auf, in der die Punkte A, B und C liegen.
(2) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
(3) Zeigen Sie, dass der Punkt D nicht in der Ebene E liegt.

Die Gerade g verläuft durch den Punkt D und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}24\\-2\\11\end{pmatrix}$.

b) (1) Zeigen Sie, dass die Gerade g parallel zur Ebene E ist.
(2) Berechnen Sie den Abstand vom Punkt D zur Ebene E.

c) Die Ebene F ist orthogonal zu E und enthält die Gerade g.
(1) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F an.
(2) Die Ebenen E und F schneiden sich in der Geraden h. Geben Sie eine Gleichung für h an.

d) Die Gerade k durch die Punkte A und B durchstößt die zu k orthogonale Ebene G, die den Punkt C beinhaltet, in einem Punkt H.
(1) Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes H und die Länge des Vektors $\overrightarrow{CH}$.
(2) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

e) Berechnen Sie das Volumen der Dreieckspyramide ABCD.

2 Gegeben sind die Punkte $O(0|0|0)$, $A(6|6|0)$, $B(3|9|0)$, $S(4|6|8)$ und die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3{,}5\\8\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$.

a) Das Dreieck OAB ist die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S.
(1) Zeichnen Sie die Pyramide in ein geeignetes Koordinatensystem.
(2) Bestimmen Sie die Größe der Innenwinkel des Dreiecks OAB.
(3) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide OABS.

b) (1) Zeigen Sie, dass die Pyramidenspitze S auf der Geraden g liegt.
(2) Begründen Sie die folgende Aussage: Bewegt sich der Punkt S auf der Geraden g, so ändert sich das Volumen der Pyramide nicht.
(3) Geben Sie die Koordinaten einer weiteren Pyramidenspitze S_2 an, sodass sich das Volumen der Pyramide nicht ändert.

c) In Richtung des Vektors $\begin{pmatrix}5\\-3\\-8\end{pmatrix}$ fallen Lichtstrahlen ein, deren Verlauf im Modell als parallel angenommen wird. Dabei wirft die Pyramide einen Schatten auf die x_1x_2-Ebene.
(1) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes S^* der Pyramidenspitze und zeichnen Sie den Schatten in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a) ein.
(2) Bestimmen Sie einen Richtungsvektor zum einfallenden Licht so, dass der Schattenpunkt S^{**} auf der x_1-Achse liegt und das Schattendreieck $OS^{**}A$ rechtwinklig mit einem rechten Winkel im Eckpunkt S^{**} ist.

3 Gegeben sind die Ebene E_u mit $E_u: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\u\\1-u^2\end{pmatrix}$ $(u \in]-1; 1])$ und die Gerade k mit $k: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie u so, dass der Punkt $P(3|4|2)$ auf genau einer der Ebenen E_u liegt.

b) Bestimmen Sie einen Wert von u so, dass E_u parallel zur x_1x_3-Ebene ist.

c) Bestimmen Sie eine Normalengleichung für die Ebene E_u.

d) (1) Geben Sie eine Bedingung für u_1 und u_2 an, sodass die Ebenen E_{u_1} und E_{u_2} orthogonal zueinander sind.
(2) Bestimmen Sie den Wert für u_2, wenn $u_1 = \frac{1}{2}$ ist.

e) (1) Bestimmen Sie den Ortsvektor des Durchstoßpunkts S der Geraden k durch die Ebene E_u.
(2) Bestimmen Sie einen Wert von u so, dass E_u parallel zur Geraden k ist.

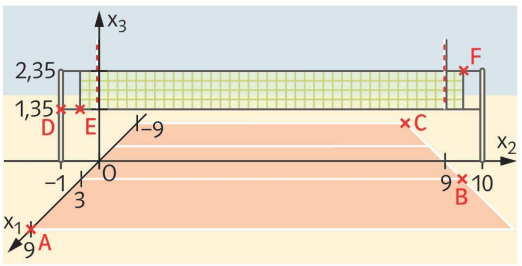
4 Die Lage der vier Städte A, B, C und D lässt sich folgendermaßen beschreiben:
Stadt A liegt direkt am Meer, also 0 m über der Meereshöhe.
Stadt B liegt 240 km östlich und 70 km nördlich von A auf 500 m über der Meereshöhe.
Stadt C liegt 400 km östlich und 190 nördlich von A auf 600 m über der Meereshöhe.
Stadt D liegt 360 km östlich und 200 km nördlich von A auf 1000 m über der Meereshöhe.

a) Ein Sportflugzeug überfliegt um 13:00 Uhr die Stadt A in 2000 m Höhe mit einer Geschwindigkeit von 200 $\frac{km}{h}$ geradlinig in Richtung der Stadt B.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem das Flugzeug die Stadt B überfliegt, wenn es seine Geschwindigkeit und seine Flughöhe nicht verändert.

b) Über der Stadt B ändert das Flugzeug bei gleichbleibender Höhe seine Richtung so, dass es direkt auf die Stadt C zufliegt.
Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen der ursprünglichen Flugrichtung und der neuen Flugroute in Richtung der Stadt C.

c) Das Flugzeug fliegt weiterhin in 2000 m Höhe über dem Meeresspiegel mit der Geschwindigkeit 200 $\frac{km}{h}$ in Richtung $\overrightarrow{BC}$.
(1) Beschreiben Sie die Position, in der es sich um 14:45 Uhr befindet.
(2) Bestimmen Sie die Uhrzeit und die Position des Flugzeugs, bei der es zu der Stadt D die kürzeste Entfernung hat.

5 In der Abbildung ist ein Volleyballfeld in einem Koordinatensystem dargestellt. Alle Längen sind in Metern angegeben. Vereinfacht wird angenommen, dass die Flugbahn des Balles jeweils auf einer Geraden liegt. Die eingetragenen Punkte des Volleyballfeldes haben die folgenden Koordinaten: $O(0|0|0)$, $A(9|0|0)$, $B(3|9|0)$, $C(-9|9|0)$, $D(0|-1|1{,}35)$, $E(0|-0{,}5|1{,}35)$, $F(0|9{,}5|2{,}35)$.



a) Das Volleyballfeld wird im Modell begrenzt durch die x_1-Achse für $x_1 \in [-9; 9]$ und eine zur x_1-Achse parallelen Geraden durch den Punkt B. Geben Sie die Länge und die Breite des orange gefärbten Volleyballfeldes an.

Ein Spieler schmettert den Ball im Punkt $P(0{,}5|6|2{,}5)$. Ein gegnerischer Spieler baggert zurück. Der Ball kommt auf seinen Unterarmen im Punkt $Q(-7|4|1)$ auf.

b) (1) Bestimmen Sie, wie weit der Ball fliegt.
(2) Bestimmen Sie die Höhe, in der der Ball über das Netz fliegt.

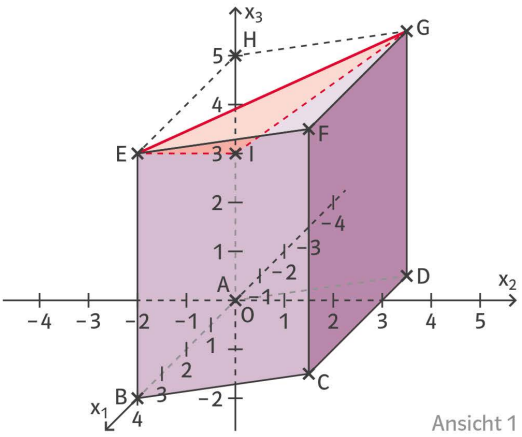
c) Bestimmen Sie, wie viele Sekunden der Ball von Punkt P zu Punkt Q benötigt, wenn man annimmt, dass der Ball die gesamte Strecke mit einer Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$ fliegt.

d) Der Spieler hält seine Unterarme in der Ebene E mit der Gleichung $E: 2{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 = -12$.
Bestimmen Sie die Größe des Winkels zur Ebene E, in dem der Ball in Punkt Q auftrifft.

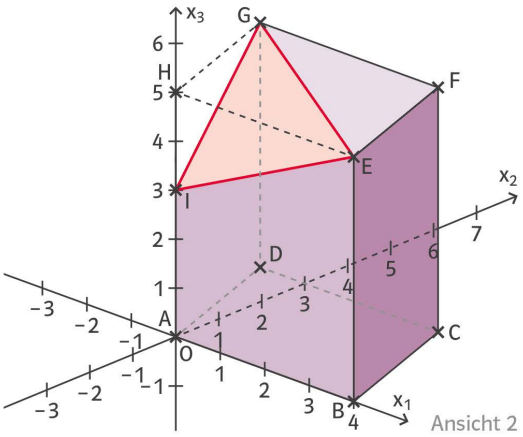
e) Von Q aus wird der Ball in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ gespielt. Beurteilen Sie, ob der Ball ins Netz geht, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Punkt, in dem er auf das Netz auftrifft.

f) Bei einem anderen Spielzug erwischt ein Spieler den Ball schlecht. Er pritscht im Punkt $R(2|1|2{,}3)$ in Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ins Aus. Der Kopf des Schiedsrichters soll vereinfacht im Punkt $S(0|-2|3{,}15)$ angenommen werden.
Bestimmen Sie die minimale Entfernung, die der Ball am Kopf des Schiedsrichters vorbeifliegt.

6 In Frankfurt soll ein neues Bürogebäude gebaut werden. Das Architekturbüro Prinz liefert einen Entwurf und erstellt zwei verschiedene Ansichten.



Ansicht 1



Ansicht 2

Die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(3|3|0)$, $D(-1|3|0)$ und $F(3|3|5)$ sind gegeben. Für alle Koordinaten gilt 1 LE entspricht 10 m. Aus dem Prisma mit der Grundfläche ABCD und der Höhe 50 m wurde eine dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche EGH und der Höhe $\overline{HI}$ ausgespart. Der Abstand der Punkte H und I beträgt 20 m. Weiterhin sind die Eckpunkte $E(4|0|5)$, $G(-1|3|5)$ und $I(0|0|3)$ gegeben.

a) Erläutern Sie die Koordinaten der Eckpunkte E, G und I.

b) Zeigen Sie, dass die Grundfläche des Bürogebäudes kein Rechteck ist.

c) Bestimmen Sie das Volumen des Bürogebäudes.

d) Die Dreiecksfläche EGI soll so vergrößert werden, dass eine Art Dach über den Gebäudeeingängen an den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ entsteht. Das Dach soll dreieckig sein mit den Eckpunkten E, G und J, wobei J genau über der Geraden durch die Punkte A und C steht.

(1) Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene EGI auf.

(2) Zeigen Sie, dass der Punkt $J\left(-\frac{15}{8}\middle|-\frac{15}{8}\middle|\frac{1}{2}\right)$ der Eckpunkt J des Daches ist.

■ (3) Bestimmen Sie die Parameter in der Parametergleichung des Daches JEG so, dass nur das dreieckige Dach beschrieben wird.

e) Vom Punkt $S(1|1|10)$ strahlt eine Lichtquelle paralleles Licht aus. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunkts J' des Punktes J auf der x_1x_2-Ebene näherungsweise.

■ **f)** Nachdem das Bürogebäude fertig gestellt wurde, sollen mithilfe einer Drohne Fotos geschossen werden. Zunächst bewegt sich die Drohne geradlinig von Punkt $K(8|0|0)$ in Richtung $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den minimalen Abstand der Drohne zur Gebäudekante $\overline{CF}$.

7 Gegeben sind die Punkte $P(3|1|2)$ und $Q(-1|3|2)$ und die Ebene $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den drei Koordinatenachsen.

■ **b)** (1) Berechnen Sie den Abstand der Ebene E zum Koordinatenursprung O.

(2) Der Punkt $O(0|0|0)$ wird an der Ebene E gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts O'.

■ **c)** Die Ebene E schneidet die x_1x_2-Ebene in einer Geraden g.

(1) Zeigen Sie, dass die Gleichung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ ist.

(2) Der Punkt R_t bewegt sich auf der Geraden g. Unter den möglichen Dreiecken PQR_t gibt es zwei gleichschenklige Dreiecke mit der Basis $\overline{R_tQ}$. Bestimmen Sie für beide Dreiecke die Koordinaten des jeweils zugehörigen Punktes R_t.

D33 **Lösungen** Aufgaben zur Abiturvorbereitung

Stochastik

1 Bei einem Schulfest veranstaltet die Jahrgangsstufe eine Tombola, bei der 20 000 Lose verkauft werden. In der Lostrommel sind 5 % Hauptgewinne und 30 % Trostpreise, der Rest sind Nieten.

a) Herr Glück ist der erste Teilnehmer und kauft 10 Lose.
(1) Begründen Sie, weshalb man die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Hauptgewinne beim Kauf von n Losen näherungsweise (aber nicht exakt) mit der Binomialverteilung bestimmen kann, und geben Sie die zugehörigen Parameter der Binomialverteilung für diesen Zufallsversuch an.
(2) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Ereignisse E: „Im ersten Zug ein Hauptgewinn" und F: „Im zweiten Zug ein Hauptgewinn" nicht stochastisch unabhängig voneinander sind.
(3) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Herr Glück keinen Hauptgewinn zieht, näherungsweise mithilfe der Binomialverteilung und exakt.
(4) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mindestens einen Hauptgewinn zieht näherungsweise mithilfe der Binomialverteilung.

b) Frau Zufall möchte so lange Lose kaufen, bis sie einen Hauptgewinn zieht. Bestimmen Sie die Anzahl der Lose, die Frau Zufall mindestens kaufen muss, damit sie mit mehr als 95 %iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Hauptgewinn zieht.

c) Die Jahrgangsstufe verkauft ihre Lose für einen Euro pro Stück. Die Hauptgewinne kosten in der Anschaffung 10 Euro, die Trostpreise 0,50 €.
Berechnen Sie mithilfe der Binomialverteilung näherungsweise den Gewinn für die Klassenkasse, den die Jahrgangsstufe erwarten kann, wenn sie 1000 Lose verkauft.

d) Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit $\sigma > 3$ gelten die folgenden σ-Regeln:
(A) $P(X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$ (B) $P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
(1) Deuten Sie die Aussagen (A) und (B) im Sachkontext.
(2) Bestimmen Sie mithilfe einer der beiden Aussagen, wie viele Hauptgewinne die Jahrgangsstufe mindestens bereitstellen muss, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % ausreichen, wenn 1500 Lose verkauft werden.

2 Ein Anbieter von Ferienwohnungen hat aufgrund von langjährigen Erfahrungen festgestellt, dass nur in 90 % der Buchungen die Gäste tatsächlich erscheinen. Die 80 Ferienwohnungen werden aufgrund dessen an 86 Gäste vermietet. Im Falle einer Überbuchung muss der Vermieter dem Gast neben der Rückerstattung eine Entschädigung von 500 € zahlen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Vermieter höchstens einen Gast entschädigen muss.

b) Bestimmen Sie die Anzahl von Ferienwohnung, die bei 86 Vermietungen zur Verfügung stehen sollten, sodass der Vermieter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % keine Entschädigung zahlen muss.

c) Mehrere Jahre in Folge sind von 86 Gästen, die eine Ferienwohnung angemietet haben, 83 tatsächlich erschienen.
(1) Prüfen Sie mithilfe eines Konfidenzintervalls exakt und näherungsweise, ob es Anlass zum Zweifeln an $p = 90\,\%$ gibt.
(2) Prüfen Sie mithilfe eines Prognoseintervalls, ob es Anlass zum Zweifeln an $p = 90\,\%$ gibt.
(3) Vergleichen Sie den jeweiligen Rechenaufwand in (1) und (2).

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Feriengäste mindestens stornieren sollten, sodass bei 80 Ferienwohnungen und 86 Buchungen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % kein Gast entschädigt werden muss.

3 Weltweit sind 12 % aller Menschen an einer bestimmten Autoimmunkrankheit erkrankt. Ein Test zur Feststellung der Erkrankung zeigt bei 90 % der Erkrankten ein positives Testergebnis an. Insgesamt erhalten 12,56 % der getesteten Personen ein positives Testergebnis.

a) (1) Zeichnen Sie zu der Situation ein passendes Baumdiagramm und beschriften Sie es vollständig.
(2) Erstellen Sie eine Vierfeldertafel zu der Situation und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, deren Testergebnis positiv ist, tatsächlich erkrankt ist.

Ein Pharmaunternehmen entwickelt ein Medikament gegen diese Autoimmunkrankheit. Das Unternehmen gibt an, dass eine erkrankte Person, die das Medikament einnimmt, eine Heilungschance von 85 % hat.

b) Geben Sie an, unter welchen Bedingungen es sinnvoll ist, anzunehmen, dass die Anzahl der Personen, die mithilfe des Medikaments geheilt wurden, binomialverteilt ist.

Sei nun die Anzahl der mithilfe des Medikaments geheilten Personen binomialverteilt mit $p = 0{,}85$.

c) Ein großes Uniklinikum möchte das Medikament flächendeckend einführen, wenn mehr als 425 von 500 zufällig ausgewählten Patienten mithilfe des Medikaments geheilt werden können. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Uniklinikum das Medikament nicht einführt.

d) Bestimmen Sie die Gruppengröße von zufällig ausgewählten Patienten so, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 100 Patienten geheilt werden.

Nach längerem Einsatz des Medikaments zweifelt das Uniklinikum die angegebene Heilungschance an. In einer Stichprobe werden 200 Patienten, die das Medikament einnehmen, überprüft.

e) Bestimmen Sie das 2σ-Prognoseintervall für die relative Häufigkeit h geheilter Patienten und geben Sie an, wie viele geheilte Patienten mindestens unter den 200 Patienten sein müssen, damit die sich ergebende relative Häufigkeit nicht angezweifelt werden muss.

f) Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für die relative Häufigkeit $h = 0{,}8$ und beurteilen Sie, ob die vom Pharmaunternehmen angegebene Heilungschance angezweifelt werden sollte.

g) Ein anderes Medikament gegen die Autoimmunkrankheit wird derzeit getestet. Der Hersteller möchte die unbekannte Heilungschance p auf dem Konfidenzniveau $\beta = 95\,\%$ auf $\pm 2\,\%$ genau angeben. Bestimmen Sie den erforderlichen Stichprobenumfang n.

4 Auf der Verpackung von Walnüssen gibt der Hersteller ein Füllgewicht von 200 g an. Die Zufallsgröße X beschreibt das tatsächliche Füllgewicht in Gramm. Es wird angenommen, dass X normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 200\,\text{g}$ und $\sigma = 4$ ist.

a) Beschreiben Sie, was sich durch den Term $\int_{196}^{204} \varphi_{200;\,4}(x)\,dx$ berechnen lässt.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Füllgewicht einer Packung zwischen 196 g und 204 g liegt. Vergleichen Sie mit den Sigmaregeln.

c) Bestimmen Sie das Gewicht einer Packung so, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Füllgewicht einer Packung mindestens dieses Gewicht beträgt, bei 5 % liegt.

d) Bestimmen Sie das Gewicht z, das nur von 1 % der Packungen unterschritten wird.

e) In einer Packung Walnüsse sind erfahrungsgemäß 4 % der Walnüsse ungenießbar.
(1) Bestimmen Sie näherungsweise mithilfe der Normalverteilung, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, in einer Packung mit 400 Walnüssen mindestens 20 ungenießbare Walnüsse zu haben. Vergleichen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der Wahrscheinlichkeit, die sich ergibt, wenn man davon ausgeht, dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.
(2) Geben Sie zu Teilaufgabe e) (1) den Ansatz als Integral an und erläutern Sie die Bedeutung der unteren Integralgrenze.

D33 **Lösungen** Aufgaben zur Abiturvorbereitung

Rechnen mit rationalen Zahlen

Zahlbereiche (Aufgabe 1)

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ $\{0; 1; 2; 3\ldots\}$
Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ $\{\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\ldots\}$
Zahlen, die man als Bruch darstellen kann, heißen **rationale Zahlen (ℚ)**. Jeder Punkt auf der Zahlengerade entspricht einer **reellen Zahl (ℝ)**.
Es gibt reelle Zahlen, wie z. B. $\sqrt{2}$ oder π, die sich nicht als Bruch darstellen lassen.

Brüche kürzen und erweitern (Aufgaben 2 und 3)

Ein Bruch wird erweitert, indem man den Zähler und den Nenner mit derselben natürlichen Zahl multipliziert.
$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}$ $\left(\frac{5}{6}\text{ wird mit 3 erweitert}\right)$
Ein Bruch wird gekürzt, indem man den Zähler und den Nenner durch dieselbe natürliche Zahl dividiert.
$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$ $\left(\frac{8}{12}\text{ wird mit 4 gekürzt}\right)$

Brüche addieren und subtrahieren (Aufgaben 4 und 5)

Man macht die Brüche gleichnamig, addiert bzw. subtrahiert die Zähler und behält den Nenner bei.

$\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{20}{24} + \frac{9}{24} = \frac{29}{24}$

$\frac{7}{8} - \frac{3}{10} = \frac{35}{40} - \frac{12}{40} = \frac{23}{40}$

Brüche als Dezimalzahlen schreiben (Aufgaben 6 und 8)

Um einen Bruch in eine Dezimalzahl umzuwandeln, erweitert oder kürzt man den Bruch so, dass im Nenner 10, 100, 1000, … steht oder man dividiert den Zähler durch den Nenner. Man erhält eine abbrechende oder periodische Dezimalzahl.
$\frac{11}{8} = \frac{11 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{1375}{1000} = 1{,}375$; $\frac{7}{22} = 7 : 22 = 0{,}3\overline{18}$

Dezimalzahlen als Brüche schreiben (Aufgaben 7 und 8)

Um eine Dezimalzahl als Bruch zu schreiben, nutzt man das Stellenwertsystem. Die erste Stelle nach dem Komma gibt die Zehntel, die zweite Stelle die Hundertstel, die dritte Stelle die Tausendstel usw. an.

	Zehner Z	Einer E	,	Zehntel z	Hundertstel h	
0,34		0	,	3	4	$\frac{34}{100}$
12,06	1	2	,	0	6	$12\frac{6}{100}$

Grundwissen Test

→ **Lösungen**, Seite 535

1 Entscheiden Sie, zu welchen Zahlbereichen die Zahl gehört.

a) $\frac{3}{4}$ b) $\sqrt{81}$ c) $\sqrt{5}$ d) $1{,}\overline{23}$
e) $-6{,}971$ f) $-\frac{51}{3}$ g) $\sqrt{28}$ h) $5\frac{1}{3}$

2 Kürzen Sie so weit wie möglich.

a) $\frac{49}{84}$ b) $\frac{102}{312}$ c) $\frac{171}{684}$ d) $\frac{173}{525}$

3 Ergänzen Sie die fehlende Zahl.

a) $\frac{5}{6} = \frac{\square}{42}$ b) $\frac{\square}{72} = \frac{7}{8}$ c) $\frac{63}{\square} = \frac{3}{4}$ d) $\frac{13}{16} = \frac{91}{\square}$

4 Berechnen Sie den Wert des Terms.

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$ b) $\frac{7}{8} - \frac{13}{10}$ c) $2\frac{1}{6} + 1\frac{3}{8}$
d) $2\frac{2}{3} - 4\frac{3}{5}$ e) $\frac{7}{21} - \frac{12}{16} + \frac{5}{6}$ f) $2\frac{2}{5} + \frac{8}{12} + \frac{7}{10}$

5 Emil trifft sich am Abend mit Cem, Theo und Darian. Sie sprechen darüber, wie viel Sport sie an diesem Tag gemacht haben. Emil ist eine Dreiviertelstunde Rad gefahren. Cem hatte 90 Minuten Training. Darian ist $1\frac{1}{5}$ Stunden gejoggt. Insgesamt haben die Freunde 5 Stunden Sport gemacht. Theo behauptet, dass er mehr Sport gemacht hat als Cem. Überprüfen Sie, ob dies stimmen kann.

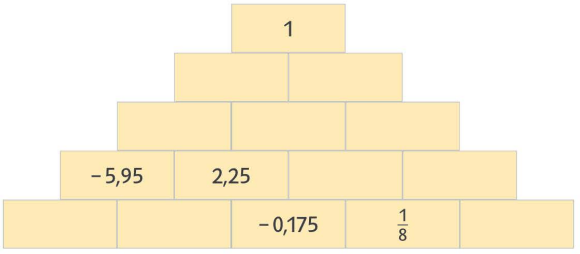
6 Wandeln Sie in eine Dezimalzahl um.

a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{7}{2}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $-\frac{36}{60}$
e) $\frac{2}{3}$ f) $5\frac{6}{8}$ g) $\frac{39}{75}$ h) $\frac{4}{7}$

7 Wandeln Sie in einen Bruch um. Kürzen Sie, wenn möglich.

a) 0,15 b) 0,007 c) $-3{,}75$ d) $-99{,}9$
e) $-5{,}\overline{6}$ f) 0,038 g) $32{,}\overline{1}$ h) 1,625

8 Übertragen Sie die Zahlenmauer und ergänzen Sie so, dass über zwei Zahlen deren Summe steht.



Prozentrechnung

Prozentangaben (Aufgabe 1)

Anteile schreibt man oft in Prozentschreibweise.
$\frac{1}{100} = 1\%$; $\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$; $0{,}45 = \frac{45}{100} = 45\%$

Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz (Aufgaben 2 bis 6)

Der Grundwert G ist die Bezugsgröße und entspricht immer 100 %. Der Prozentsatz p gibt an, wie viel Prozent der Prozentwert W von dem Grundwert ausmacht. Die einzelnen Werte kann man mithilfe eines Dreisatzes oder mithilfe entsprechender Formeln berechnen.

Prozentwert berechnen (Aufgaben 2 c) und 4)

	100 %	320 Autos	: 20
: 20	5 %	16 Autos	· 3
· 3	15 %	48 Autos	

$W = p \cdot G$
$W = 0{,}15 \cdot 320$ Autos
$W = 48$ Autos

Prozentsatz berechnen (Aufgaben 2 a) und 3)

	100 %	125 Bonbons	: 25
: 25	4 %	5 Bonbons	· 3
· 3	12 %	15 Bonbons	

$p = \frac{W}{G}$
$p = \frac{15 \text{ Bonbons}}{125 \text{ Bonbons}}$
$p = 0{,}12 = 12\%$

Grundwert berechnen (Aufgaben 2 b), 5 und 6

	8 %	26 Kinder	: 2
: 2	4 %	13 Kinder	· 25
· 25	100 %	325 Kinder	

$G = \frac{W}{p}$
$G = \frac{26 \text{ Kinder}}{0{,}08}$
$G = 325$ Kinder

Zinsen, Zinssatz und Guthaben (Aufgabe 7)

In der Zinsrechnung wird wie in der Prozentrechnung gerechnet. Man verwendet allerdings andere Begriffe.

Prozentrechnung	Zinsrechnung
Prozentwert	Jahreszinsen
Prozentsatz	Zinssatz
Grundwert	Startguthaben bzw. Startkapital

Zinseszinsen (Aufgabe 8)

Wenn die Zinsen am Jahresende einem Guthaben hinzugefügt werden, erbringen sie im Folgejahr auch Zinsen, sogenannte Zinseszinsen.
Wenn ein Guthaben G für t Jahre zu einem Zinssatz p verzinst wird, berechnet man das Kapital K nach t Jahren mit der Formel $K = (1 + p)^t \cdot G$.

Grundwissen Test

→ **Lösungen**, Seite 536

1 Geben Sie in Prozentschreibweise an.

a) 0,56 **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** 1,23 **d)** $\frac{6}{48}$

2 Ergänzen Sie die fehlenden Werte.

	Grundwert	Prozentwert	Prozentsatz
a)	20	12	
b)		16 €	25 %
c)	24 kg		175 %

3 Im Kurs haben 12 von 30 Jugendlichen ein Haustier. Bestimmen Sie den Prozentsatz.

4 Das Smartphone, das Emma kaufen möchte, kostete ursprünglich 280 €. In einer Sonderaktion wird es um 15 % reduziert. Berechnen Sie, wie viel Emma nun bezahlen muss.

5 Bei einem Halbmarathon liefen 153 Läuferinnen unter zweieinhalb Stunden. Das sind 68 % der Teilnehmerinnen. Bestimmen Sie, wie viele Läuferinnen insgesamt teilgenommen haben.

6 Durch einen Umzug hat sich Kims Weg zum Fußballverein um 20 % verlängert. Er ist jetzt 7,8 km lang. Bestimmen Sie, wie lang der Weg zuvor war.

7 Die Anspa-Bank verzinst das Guthaben auf einem Festgeld-Konto mit einem Zinssatz von 1,2 % pro Jahr.

a) Berechnen Sie, wie viele Zinsen Nesrin nach einem Jahr erhält, wenn sie 500 € anlegt.

b) Antons Sparguthaben werden am Jahresende 40,20 € Jahreszinsen gutgeschrieben. Berechnen Sie, wie groß sein Guthaben am Ende des Vorjahres war, wenn er weder Geld eingezahlt noch abgehoben hat.

8 Frau Abadi legt bei ihrer Bank für 5 Jahre ein Guthaben von 5000 € zu einem festen Zinssatz von 1,5 % an. Berechnen Sie das Kapitel am Ende des fünften Jahres, wenn die Zinsen mitverzinst werden.

Ganzrationale Funktionen

Ganzrationale Funktion (Aufgabe 1)

Gleichung:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit reellen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0)$.
Die Zahl n heißt Grad der Funktion f.

Verhalten für $x \to \pm\infty$ (Aufgabe 2)

Für $x \to \pm\infty$ wird das Verhalten einer ganzrationalen Funktion vom Summanden mit der größten Potenz von x bestimmt.

Nullstellen (Aufgaben 3, 4 und 5 a))

Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.
Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.
Mögliche Verfahren zur Berechnung:
- Ausklammern, wenn alle Summanden des Funktionsterms die Variable x enthalten, z. B. $f(x) = x^4 - 3x^3 = x^3 \cdot (x - 3) = 0$, genau dann wenn $x = 0$ oder $x = 3$ (Satz vom Nullprodukt).
- Ermitteln der Nullstellen, wenn der Funktionsterm Linearfaktoren enthält, z. B. hat f mit $f(x) = 2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - 4)$ die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ und $x_4 = 2$.

Schnittpunkte berechnen (Aufgabe 5 b))

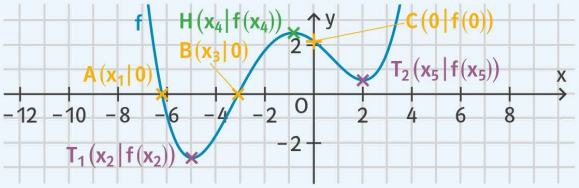
Sind zwei Funktionen g und h gegeben, so bestimmt man die x-Koordinate des Schnittpunkts der Graphen als Lösung der Gleichung $g(x) = h(x)$.

Symmetrie (Aufgabe 6)

Der Graph der Funktion f ist genau dann
- achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für alle $x \in D_f$ $f(-x) = f(x)$ gilt,
- punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn für alle $x \in D_f$ $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Besondere Punkte des Graphen (Aufgabe 7)

Schnittpunkte mit den Achsen: A, B, C
globaler Extrempunkt: T_1
lokale Extrempunkte: H_4, T_2



Grundwissen Test

→ **Lösungen**, Seite 536

1 Geben Sie an, ob die Funktion f ganzrational ist.
a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **b)** $f(x) = \sqrt{11} \cdot x^7 - x^2$ **c)** $f(x) = 3^x$

2 Untersuchen Sie das Grenzverhalten der Funktion f für $x \to \pm\infty$.
a) $f(x) = x^3 + 1$
b) $f(x) = x - x^4 - x^2$
c) $f(x) = 1 - x^5$

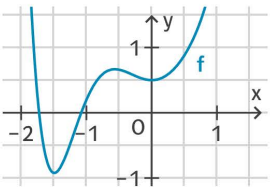
3 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.
a) $f(x) = -2x + 3$ **b)** $f(x) = x^2 - 6x + 7$
c) $f(x) = x(x + \sqrt{5})$ **d)** $f(x) = x^2 + 2x + 2$
e) $f(x) = 2x^3 + 6x^2$ **f)** $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 15)$
g) $f(x) = 3x(x^4 - 16)$ **h)** $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

4 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.
a) $f(x) = -x^4 + x^2 + 3$ **b)** $f(x) = x^3 - x^2 + 5$

5 Gegeben sind die Gleichungen der Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$ und $g(x) = x^2 - 3x + 3$.
a) Bestimmen Sie, falls möglich, die Nullstellen von f und g.
b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und g.

6 Untersuchen Sie, ob der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.
a) $f(x) = x^6 - 3x^2 + 5$ **b)** $f(x) = x^5 - 6x^3 - x$
c) $f(x) = x^6 - x^3 + 9$ **d)** $f(x) = x(x + 3)$

7 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit seinen charakteristischen Punkten.

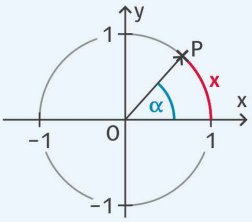


a) Lesen Sie näherungsweise die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen sowie die Extrempunkte ab.
b) Geben Sie an, bei welchen der in Teilaufgabe a) abgelesenen Extrempunkte ein lokales bzw. ein globales Extremum vorliegt.

Trigonometrische Funktionen

Grad und Bogenmaß (Aufgabe 1)

Die Größe des Mittelpunktswinkels α im Einheitskreis wird als Gradmaß α bezeichnet, die Länge des zugehörigen Kreisbogens x als Bogenmaß x.



Es kann vom Grad- ins Bogenmaß, und umgekehrt, umgerechnet werden.

$x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°}$

$\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot x$

Die Sinusfunktion (Aufgaben 2 und 3)

Die Sinusfunktion ist periodisch mit der Periode 2π. Ihre Nullstellen sind $x = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Es gilt $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ entsteht aus dem Graphen der Sinusfunktion g mit $g(x) = \sin(x)$ durch:

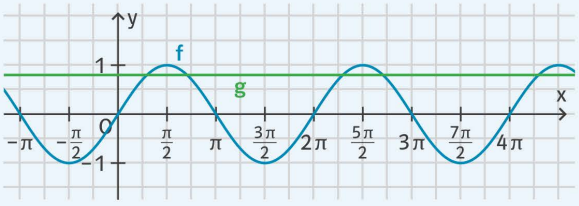
- Streckung in y-Richtung mit dem Faktor a,
- Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$,
- Verschiebung in x-Richtung um c,
- Verschiebung in y-Richtung um d.

f hat die Amplitude $A = |a|$ und die Periode $p = \frac{2\pi}{b}$.

Trigonometrische Gleichungen (Aufgabe 4)

Trigonometrische Gleichungen der Form $\sin(x) = r$ oder $\cos(x) = r$ können keine oder unendlich viele Lösungen haben.

In der Grafik sind die Schnittstellen des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ und der Geraden g mit der Gleichung $g(x) = r$ die Lösungen der Gleichung $\sin(x) = r$.



Häufig wird ein Intervall, in dem die Lösung liegen soll, vorgegeben.

Grundwissen Test

→ Lösungen, Seite 538

1 Bestimmen Sie jeweils das andere Winkelmaß.

a) 90° **b)** 120° **c)** −72°

d) $\frac{\pi}{3}$ **e)** $-\frac{\pi}{8}$ **f)** $3{,}5\pi$

2 Geben Sie die Amplitude und die Periode der Funktion f an.

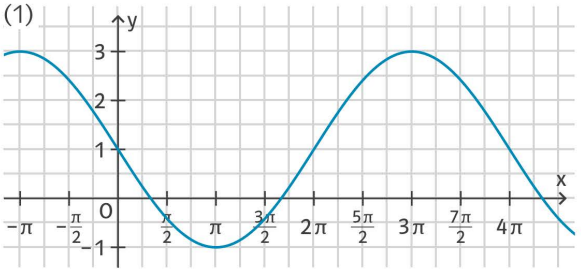
a) $f(x) = 2\sin(x - 3) + 7$ **b)** $f(x) = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 5$

c) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(4(x - 2)) - 1$ **d)** $f(x) = -\sin(\pi(x + 1))$

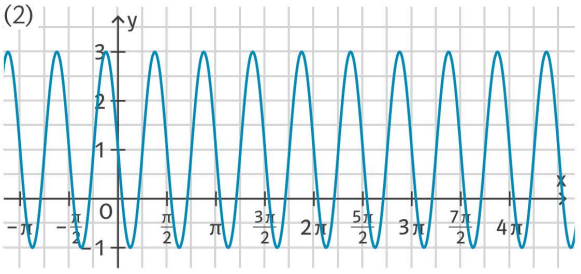
3 Ordnen Sie jeder Funktion den passenden Graphen zu. Begründen Sie.

$f(x) = 2\sin(2x) + 1$; $g(x) = -2\sin(0{,}5x) + 1$;
$h(x) = -2\sin(4x) + 1$

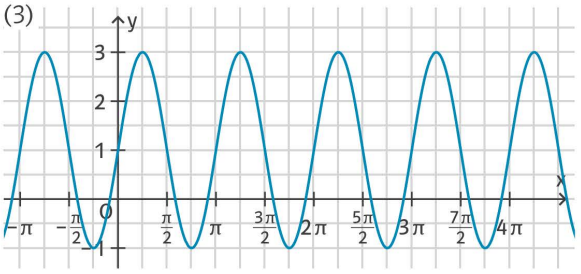
(1)



(2)



(3)



4 Bestimmen Sie, falls möglich, die im Intervall $[0; 2\pi]$ liegenden Lösungen.

a) $3 \cdot \sin(x) = 3$

b) $2\sin(x) + 2 = 4$

c) $5\cos(x) - 1 = -2\cos(x)$

Wachstum und Potenzen

Lineares Wachstum (Aufgaben 1 und 2)

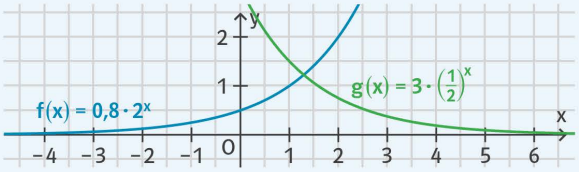
Lineares Wachstum liegt bei einem Bestand B vor, wenn zur Zeit t die absolute Änderung $d = B(t) - B(t-1)$ bei jedem Zeitschritt gleich ist.
Explizite Berechnung: $B(t) = a + d \cdot t$, wobei $a = B(0)$ ist. a heißt Anfangswert.

Exponentielles Wachstum (Aufgaben 2 und 3)

Exponentielles Wachstum liegt vor, wenn bei einem Bestand B zur Zeit t die relative Änderung $q = \frac{B(t)}{B(t-1)}$ bei jedem Zeitschritt gleich ist. Man berechnet den Bestand $B(t)$ mit einem Anfangsbestand $B(0)$ zu jedem Zeitpunkt t mit $B(t) = B(0) \cdot q^t$.

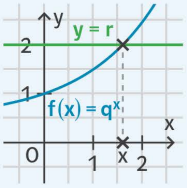
Exponentialfunktionen (Aufgaben 4 und 5)

Eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot q^x$ und $q > 0$, $q \neq 1$, heißt Exponentialfunktion mit Anfangswert a und Basis q.



Exponentialgleichung (Aufgabe 6)

Die Exponentialgleichung $q^x = r$ $(q, r > 0, q \neq 1)$ hat genau eine Lösung: $x = \log_q(r)$. Die Lösung ist in der Grafik die Schnittstelle des Graphen der Exponentialfunktion f mit $f(x) = q^x$ und der Geraden g mit der Gleichung $y = r$.



Potenzgesetze (Aufgaben 7 bis 9)

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(n = 1, 2 \ldots)$ $\quad a^0 = 1$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(m, n = 2, 3 \ldots;\ a \geq 0)$

Multiplikation bei gleicher Basis:
$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $\quad 2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

Division bei gleicher Basis (ungleich 0):
$a^p : a^q = a^{p-q}$ $\quad 2^7 : 2^4 = 2^{7-4} = 2^3$

Multiplikation bei gleichem Exponenten:
$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$ $\quad 2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3 = 8^3$

Division bei gleichem Exponenten (Basis ungleich 0):
$a^p : b^p = (a : b)^p$ $\quad 4^5 : 2^5 = (4 : 2)^5 = 2^5$

Potenzieren bei gleicher Basis:
$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$ $\quad (2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

Grundwissen Test

→ **Lösungen**, Seite 538

1 Ein Aufstellpool enthält anfangs 10 000 Liter Wasser. In jeder Minute fließen 25 Liter Wasser ab.
- **a)** Geben Sie die absolute Änderungsrate pro Minute an.
- **b)** Berechnen Sie, wie viel Wasser nach anderthalb Stunden noch im Pool sind.
- **c)** Berechnen Sie die Zeit, bis der Pool leer ist.

2 Überprüfen Sie, welche Tabelle lineares bzw. exponentielles Wachstum beschreibt. Begründen Sie.

t	0	1	2	3
B(t)	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

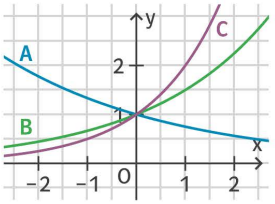
t	0	1	2	3
B(t)	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$

3 Das Gewicht eines Sauerteigs wird durch die Funktion G mit $G(t) = 400 \cdot 1{,}1^t$ modelliert (t in Stunden, G(t) in Gramm). Bestimmen Sie
- **a)** … das Startgewicht des Sauerteigs.
- **b)** … das Gewicht nach 3 Stunden.
- **c)** … die Zeit, bis das Gewicht 750 g beträgt.

4 Skizzieren Sie den Graphen zur Funktionsgleichung.
- **a)** $f(x) = 1{,}5 \cdot 2^x$
- **b)** $g(x) = 4 \cdot 0{,}25^x$

5 Ordnen Sie jede Gleichung einem Graphen zu.

$f(x) = 2^x$ $\quad h(x) = 1{,}5^x$ $\quad g(x) = 0{,}75^x$



6 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.
- **a)** $4^x = 64$
- **b)** $3^x = 6$
- **c)** $4 \cdot 10^x = 60$
- **d)** $7^x = -1$
- **e)** $2^{4x} = 0{,}5$
- **f)** $2 \cdot 2^{x-1} = 1$

7 Schreiben Sie als Potenz.
- **a)** $\sqrt{3}$
- **b)** $\sqrt[3]{5^2}$
- **c)** $\frac{1}{\sqrt{2^5}}$
- **d)** $\left(\sqrt[7]{\frac{3}{5}}\right)^9$

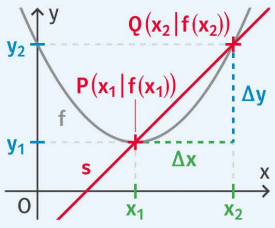
8 Schreiben Sie als Wurzel.
- **a)** $11^{\frac{1}{2}}$
- **b)** $3^{\frac{1}{5}}$
- **c)** $7^{\frac{3}{4}}$
- **d)** $y^{\frac{9}{2}}$

9 Schreiben Sie als eine Potenz.
- **a)** $3^5 \cdot 3^2$
- **b)** $5^{-2} : 5^4$
- **c)** $(2^{11})^3$
- **d)** $\frac{a^8}{a^2}$
- **e)** $\left(\frac{u}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{u}{3}\right)^3$
- **f)** $z^{2-b} \cdot z^{3b+1}$

Differenzialrechnung

Differenzenquotient (Aufgabe 1)

Der Differenzenquotient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ gibt die mittlere Änderungsrate der Funktionswerte im Intervall $[x_1; x_2]$ an. Er entspricht der Steigung der Sekante s durch die Punkte $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_2|f(x_2))$.



Ableitung (Aufgaben 2 bis 4)

Wenn der Differenzenquotient $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ für $h \to 0$ einen Grenzwert besitzt, dann heißt dieser Wert Ableitung von f an der Stelle x_0.

Man schreibt dafür $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Die Ableitung gibt die momentane Änderungsrate der Funktion an der Stelle x_0 an.

Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 entspricht der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$.

Beispiel: Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 2x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{2 \cdot (1 + h)^2 - 2 \cdot 1^2}{h} = \frac{2 + 4h + 2h^2 - 2}{h}$$

$$= \frac{h \cdot (4 + 2h)}{h} = 4 + 2h;$$

Für $h \to 0$ ergibt sich also $f'(1) = 4$.

Ableitungsregeln (Aufgabe 5)

Potenzregel:	
Für $f(x) = x^r$ $(r \in \mathbb{R})$ gilt:	$f(x) = x^5$
$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.	$f'(x) = 5x^4$
Faktorregel:	
Für $f(x) = r \cdot g(x)$ $(r \in \mathbb{R})$	$f(x) = 5x^3$
gilt: $f'(x) = r \cdot g'(x)$.	$f'(x) = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$
Summenregel:	
Für $f(x) = g(x) + h(x)$ gilt:	$f(x) = x + 4x^8$
$f'(x) = g'(x) + h'(x)$.	$f'(x) = 1 + 32x^7$

Monotonie (Aufgaben 6 bis 8)

Die Nullstellen x_0 der Ableitungsfunktion f' sind Grenzen der Monotonieintervalle. In einem Intervall $I = [x_{0_1}; x_{0_2}]$ wählt man eine Stelle $x \in I$.

- Wenn $f'(x) \geq 0$, dann ist f in I monoton steigend.
- Wenn $f'(x) \leq 0$, dann ist f in I monoton fallend.

Gilt sogar $f'(x) > 0$ bzw $f'(x) < 0$, so liegt strenge Monotonie vor.

Grundwissen Test

→ **Lösungen**, Seite 538

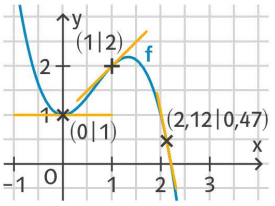
1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 1$. Bestimmen Sie den Differenzenquotienten im Intervall I.

a) $I = [0; 2]$ **b)** $I = [-1; 3]$
c) $I = [-1; 1]$ **d)** $I = [-2; -1]$

2 Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 1$ an der Stelle $x_0 = 1$, indem Sie den Differenzenquotienten bilden und den Grenzwert für $h \to 0$ bestimmen.

3 Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3$ an der Stelle $x_0 = 4$. Formen Sie dazu den Differenzenquotienten $\frac{(4 + h)^2 - 3 - (4^2 - 3)}{h}$ um und bestimmen Sie dann seinen Grenzwert für $h \to 0$.

4 Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mithilfe der Tangente an den markierten Punkten.



5 Bilden Sie die Ableitungsfunktion f'.

a) $f(x) = 4x^{11}$ **b)** $f(x) = 0{,}25x^4$
c) $f(x) = 3x^4 - x^5$ **d)** $f(x) = \frac{2}{3}x^9$
e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$ **f)** $f(x) = \frac{x}{2} + x$

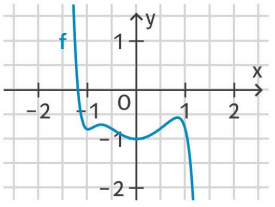
6 Bestimmen Sie die Monotonieintervalle der Funktion f.

a) $f(x) = x^4 + 1$ **b)** $f(x) = -x^4 - 2x^3$

7 Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion an, die folgende Monotonieintervalle hat:

- in $]-\infty; 0]$ streng monoton fallend
- in $[0; 2]$ monoton wachsend
- in $]2; +\infty]$ streng monoton fallend

8 Übertragen Sie den Graphen der Funktion f und skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



Extrempunkte bestimmen (Aufgabe 1)

Gegeben: Funktion f mit $f(x) = x^3 + 3x^2$
Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 + 6x$ und $f''(x) = 6x + 6$
Mögliche Extremstellen: $f'(x) = 0$
$3x^2 + 6x = 3x(x + 2) = 0$, also $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.
Überprüfung der möglichen Extremstellen:
- $f''(-2) = -6 < 0$. An der Stelle $x_2 = -2$ liegt ein lokales Maximum vor: $f(-2) = 4$.
  Der Graph von f hat den Hochpunkt $H(-2|4)$.
- $f''(0) = 6 > 0$. An der Stelle $x_1 = 0$ liegt ein lokales Minimum vor: $f(0) = 0$.
  Der Graph von f hat den Tiefpunkt $T(0|0)$.

Wendepunkte bestimmen (Aufgabe 2)

Gegeben: Funktion f mit $f(x) = x^3 + 3x^2$
Ableitungen: $f''(x) = 6x + 6$ und $f'''(x) = 6$
Mögliche Wendestellen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_3 = -1$
Überprüfung der möglichen Wendestelle:
$f'''(-1) = 6 \neq 0$. $x_3 = -1$ ist Wendestelle. $f(-1) = 2$,
der Wendepunkt des Graphen ist $W(-1|2)$.

Krümmungsverhalten (Aufgaben 3 und 4)

Der Graph der Funktion f ist für alle x im Intervall I
- linksgekrümmt, wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$,
- rechtsgekrümmt, wenn $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$.

Tangente und Normale (Aufgaben 5 bis 7)

Die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(a|f(a))$ ist eine Gerade, die durch den Punkt P verläuft und die Steigung $m_t = f'(a)$ hat.
Die Normale n an den Graphen von f im Punkt P ist eine Gerade, die senkrecht zur Tangente t steht und die Steigung $m_n = -\frac{1}{m_t}$ hat.
Bestimmung der Tangente an den Graphen von f mit $f(x) = x^3 + 3x^2$ im Punkt $P(-1|2)$:
Ansatz: $t(x) = m_t x + b$
Steigung m_t: $f'(x) = 3x^2 + 6x$, $m_t = f'(-1) = -3$
Punktprobe mit $P(-1|2)$: $2 = -3(-1) + b$, also $b = -1$
Gleichung der Tangente t: $t(x) = -3x - 1$
Bestimmung der Normalen an den Graphen von f:
$n(x) = m_n x + c$; $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$
Punktprobe mit $P(-1|2)$: $2 = \frac{1}{3} \cdot (-1) + c$, also $c = \frac{7}{3}$
Gleichung der Normalen: $n(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
Für die Steigungswinkel α der Tangente t und β der Normalen n gilt $\tan(\alpha) = f'(a) = m_t$ und
$\tan(\beta) = -\frac{1}{f'(a)} = m_n$.

Grundwissen Test

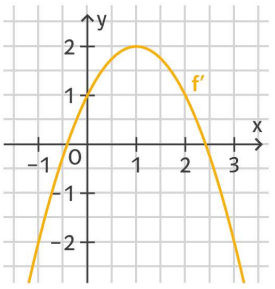
Lösungen, Seite 539

1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen der Funktion f.
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ **b)** $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$

2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen der Funktion f.
a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ **b)** $f(x) = -2x^4 + 3x^2$

3 Bestimmen Sie rechnerisch die Intervalle, in denen der Graph der Funktion f links- bzw. rechtsgekrümmt ist.
a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ **b)** $f(x) = -x^3 + x^2$
c) $f(x) = -x^3 + 6x$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 2x^2$

4 Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Geben Sie möglichst große Intervalle an, in denen der Graph von f links- bzw. rechtsgekrümmt ist.



5 Bestimmen Sie die Steigung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(a|f(a))$.
a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2$, $a = 2$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 2$, $a = -1$

6 Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen an den Graphen von f im Punkt P.
a) $f(x) = -x^2 + 4$, $P(1|3)$ **b)** $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $P(-1|2)$

7 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle $x = 4$.
b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse.
c) Bestimmen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente.

Lösen von Gleichungen

Lösung einer Gleichung (Aufgabe 1)

Eine Zahl heißt Lösung einer Gleichung, wenn die Terme auf beiden Seiten der Gleichung beim Einsetzen dieser Zahl denselben Wert ergeben.

$2 \cdot (x + 2) = 4x - 2$
3 ist Lösung dieser Gleichung, da
$2 \cdot (3 + 2) = 4 \cdot 3 - 2$.

Falls eine Gleichung nicht lösbar ist (wie z. B. $x + 2 = x$), ist die Lösungsmenge leer und man schreibt $L = \{\ \}$.

Äquivalenzumformung (Aufgaben 2 bis 4)

Eine Umformung einer Gleichung, bei der alle Lösungen gleich bleiben, heißt Äquivalenzumformung. Wichtige Äquivalenzumformungen sind:

- Auf beiden Seiten denselben Term addieren oder subtrahieren.
- Beide Seiten mit derselben Zahl multiplizieren oder durch diese dividieren (Zahl $\neq 0$).

$2x + 6 = 8x + 3 \quad | - 3$
$2x + 3 = 8x \quad | - 2x$
$3 = 6x \quad | : 3$
$\frac{1}{2} = x$
$L = \{\frac{1}{2}\}$

Lösen quadratischer Gleichungen (Aufgaben 5 bis 6)

Gleichungen, in denen die Variable mit 2. Potenz vorkommt, werden quadratische Gleichungen genannt, z. B. $x^2 + 3x - 7 = 0$. Eine quadratische Gleichung hat keine, eine oder zwei Lösungen. Es gibt verschiedene rechnerische Lösungsverfahren zum Lösen quadratischer Gleichungen.

Quadratische Gleichungen der Form $\mathbf{x^2 - e = 0}$ kann man durch Äquivalenzumformungen lösen.

$x^2 - e = 0 \quad | + e$
$x^2 = e$
$x_1 = \sqrt{e}$ und $x_2 = -\sqrt{e}$
also $L = \{-\sqrt{e}; \sqrt{e}\}$

Quadratische Gleichungen der Form $\mathbf{x^2 - d \cdot x = 0}$ für $d \neq 0$ kann man durch Ausklammern lösen.

$x^2 - d \cdot x = 0$
$x \cdot (x - d) = 0$
Das Produkt $x \cdot (x - d)$ ist null, wenn $x = 0$ oder $x - d = 0$, also $x = d$ ist. $L = \{0; d\}$

Quadratische Gleichungen der Form $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ kann man mithilfe der pq-Formel lösen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Hat eine quadratische Gleichung nicht die Form $x^2 + px + q = 0$ wird sie durch Äquivalenzumformungen in diese Form gebracht.

Grundwissen Test

→ **Lösungen**, Seite 541

1 Überprüfen Sie, ob die Zahlen auf den Kärtchen jeweils eine Lösung der Gleichung sind.

2 | 0 | −4 | 5 | −3

a) $2x + 5 = -3$
b) $4x - 5 = -3(x - 10)$
c) $4\left(2x - \frac{7}{4}\right) = \frac{3}{2}x + 6$
d) $2x^2 = 12 - 2x$

2 Bestimmen Sie die Lösungsmenge. Führen Sie eine Probe durch.

a) $\frac{3}{5}x = 36$
b) $4{,}8x = 3{,}2$
c) $2(3x - 1) = 28x - 13$
d) $-3(10x + 1) = 6(2 - 5x)$
e) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{2}{5}x$
f) $0{,}3x + 1{,}3 = 5{,}2 - x$

3 Zeigen Sie zunächst durch eine Probe, dass die Rechnung nicht stimmen kann. Erklären Sie dann, was falsch gemacht wurde, und notieren Sie die richtige Lösung.

$5x - (x - 2) = 3(4 - x) \quad |$ vereinfachen
$4x - 2 = 12 - 3x \quad | + 2 + 3x$
$7x = 14 \quad | : 7$
$x = 2$
$L = \{2\}$

4 Geben Sie an, welche Zahl für □ eingesetzt werden muss, sodass $x = -1$ Lösung der Gleichung ist.

a) $11x = \square$
b) $3 = 7x + \square$
c) $x - 2 = 4x + \square$
d) $\square + \frac{1}{5}x = -x - \frac{3}{5}$

5 Entscheiden Sie zunächst, welches Lösungsverfahren gut geeignet ist. Bestimmen Sie anschließend die Lösungsmenge und führen Sie eine Probe durch.

a) $x^2 + 7x = 0$
b) $x^2 - 3x - 4 = 0$
c) $x^2 - 1{,}96 = 0$
d) $5x - 6 = x^2 - 6$
e) $-4x^2 + 32x = 64$
f) $-3x^2 + 17 = -5x^2 - 19$
g) $4x^2 + 15x - 4 = 0$
h) $3x^2 + 7 = -8 + 4{,}5x$

6 Gegeben sind die Funktionsgleichungen f und g mit $f(x) = x^2 - 2x + 3$ und $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

a) Bestimmen Sie, falls möglich, jeweils die Nullstellen von f und g.
b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und g.

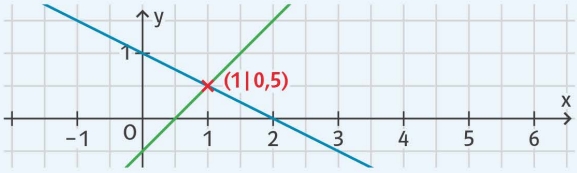
Lösen linearer Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme

Werden mehrere lineare Gleichungen wie
I: $x + 2y = 2$ und II: $-x + y = -0{,}5$ gleichzeitig erfüllt, liegt ein lineares Gleichungssystem vor.

Grafisches Lösungsverfahren (Aufgabe 1)

I: $x + 2y = 2$ entspricht I_a: $y = -0{,}5x + 1$
II: $-x + y = -0{,}5$ entspricht II_a: $y = x - 0{,}5$



Die Geraden schneiden sich im Punkt $(1|0{,}5)$.
Also ist die Lösungsmenge $L = \{(1|0{,}5)\}$.

Gleichsetzungsverfahren (Aufgabe 2)

Gleichsetzen: $-0{,}5x + 1 = x - 0{,}5$, also $x = 1$
Einsetzen von $x = 1$ in I_a (oder II_a):
$y = -0{,}5 \cdot 1 + 1 = 0{,}5$.

Einsetzungsverfahren (Aufgaben 3 und 4)

Einsetzen von $y = x - 0{,}5$ in I:
$x + 2(x - 0{,}5) = 2$, also $x = 1$
Einsetzen von $x = 1$ in II_a: $y = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Additionsverfahren (Aufgaben 5 und 6)

Addieren:

I	x	$+ 2y$	$=$	2
II	$-x$	$+ y$	$=$	$-0{,}5$
I + II		$3y$	$=$	$1{,}5$

Gleichung lösen: $y = 0{,}5$
Einsetzen von $y = 0{,}5$ in I: $x + 2 \cdot 0{,}5 = 2$, also $x = 1$
Probe: $(1|0{,}5)$ in I: $1 + 2 \cdot 0{,}5 = 2$ (wahr)
$(1|0{,}5)$ in II: $-1 + 0{,}5 = -0{,}5$ (wahr)

Lösungsvielfalt (Aufgaben 7 und 8)

Veranschaulicht man die Gleichungen als Geraden, ergeben sich für die Lösungsmenge eines Gleichungssystems drei Fälle.

Veranschaulichung	Lösungsmenge
Die Geraden schneiden sich.	Es gibt genau eine Lösung, z. B. $L = \{(1\|0{,}5)\}$.
Die Geraden sind parallel.	Es gibt keine Lösung, $L = \{\ \}$.
Die Geraden sind identisch.	Es gibt unendlich viele Lösungen, z. B. $L = \{(x\|y) \mid y = 2x + 1\}$.

Grundwissen Test

→ **Lösungen**, Seite 542

1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge grafisch. Führen Sie eine Probe durch.

a) I $y - 4x = 0$
II $y + 2x = 3$

b) I $-x - y = -1$
II $3x + y = 5$

2 Lösen Sie mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens.

a) I $y - 2x = 5$
II $y + x = -1$

b) I $-0{,}5x - y = 1$
II $2{,}5x - y = -2$

3 Lösen Sie mithilfe des Einsetzungsverfahrens und machen Sie eine Probe.

a) I $3x - 4y = 2$
II $2x + y = 5$

b) I $3x - 2y = -14$
II $6x + 5y = 8$

4 Auf einer Weide stehen 75 Tiere. Die Kühe und Hühner haben 252 Beine. Bestimmen Sie, wie viele Kühe und Hühner auf der Weide sind.

5 Lösen Sie mithilfe des Additionsverfahrens und machen Sie eine Probe.

a) I $7x - y = -4$
II $-6x + y = 3$

b) I $-7x + 2y = -4$
II $-8x + 5y = 9$

6 Emilia gibt an ihrem Geburtstag Eis aus: ein Milcheis kostet 1,60 € und ein Softeis 2,40 €. Sie hat das Geld passend abgezählt, es sind 20 €. Leider vertauscht sie bei der Bestellung die Anzahl an Milcheis und Softeis, die sie kaufen wollte, daher bekommt sie 4 € zurück. Bestimmen Sie, wie viel Eis sie insgesamt kauft.

7 Entscheiden Sie, welches rechnerische Verfahren zum Lösen des Gleichungssystems geeignet ist. Begründen Sie Ihre Wahl. Lösen Sie das Gleichungssystem und geben Sie an, wie viele Lösungen das LGS hat.

a) I $3y = 5x - 2$
II $-2x - 9 = 3y$

b) I $x = y + 1$
II $2x + 3y = 7$

c) I $8x = 1 + 4y$
II $4y - 8x = 3$

d) I $9x - 3y = -18$
II $y = 3x + 6$

8 Überprüfen Sie rechnerisch, wie viele Lösungen das LGS hat.

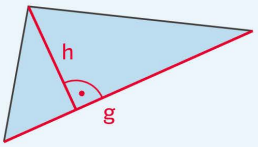
a) I $0{,}2y - 1{,}5x = -2$
II $4{,}5x + 1 = 0{,}6y$

b) I $-\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y = -2$
II $\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = 1$

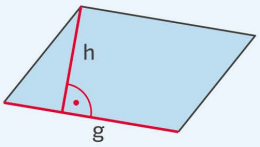
Elementare Geometrie

Flächeninhalt (Aufgaben 1 bis 3)

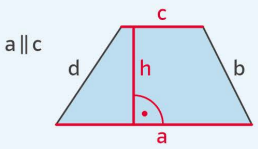
Flächeninhalt eines Dreiecks:
$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$



Flächeninhalt eines Parallelogramms:
$A = g \cdot h$

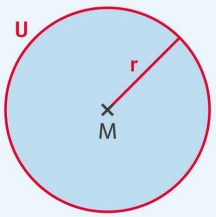


Flächeninhalt eines Trapezes:
$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$



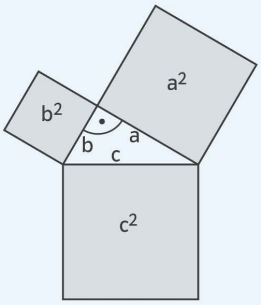
Umfang und Flächeninhalt eines Kreises (Aufgabe 4)

Umfang: $U = 2 \cdot \pi \cdot r$
Flächeninhalt: $A = \pi \cdot r^2$



Satz des Pythagoras (Aufgaben 5 bis 7)

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, gilt für die Längen a und b der Katheten und für die Länge c der Hypotenuse $a^2 + b^2 = c^2$.
Umkehrung des Satzes des Pythagoras:
Wenn in einem Dreieck für die Seitenlängen $c^2 = a^2 + b^2$ gilt, dann ist es rechtwinklig bei C.



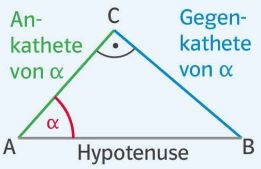
Trigonometrie (Aufgabe 8)

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ ist

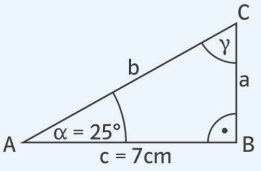
$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$,

$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$,

$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$.



Im Dreieck rechts gilt (in cm)
$a = c \cdot \tan(25°) \approx 3{,}26$,
$b \approx \sqrt{7^2 + 3{,}26^2} \approx 7{,}72$
und
$\gamma = 180° - 90° - 25° = 65°$.



Grundwissen Test → **Lösungen**, Seite 544

1 Zeichnen Sie das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.
a) A(1|2), B(7|2), C(3|6)
b) A(1,5|−2), B(4|3), C(−1,5|2)

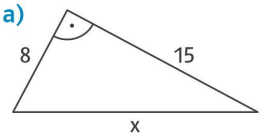
2 Zeichnen Sie das Parallelogramm ABCD in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.
a) A(−3|−2), B(2|−2), C(3|1), D(−2|1)
b) A(2|1,5), B(4|2,5), C(−2|4), D(−4|3)

3 Zeichnen Sie das Trapez ABCD in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.
a) A(1|−1), B(4|−1), C(3,5|1,5), D(2,5|1,5)
b) A(1|0), B(5|1), C(2,5|2,5), D(0,5|2)

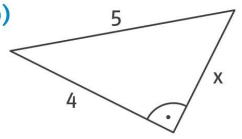
4 **a)** Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser 6 cm.
b) Ein Kreis hat einen Umfang von 5 m. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.
c) Ein Kreis hat einen Flächeninhalt von 7 dm^2. Berechnen Sie seinen Umfang.

5 Bestimmen Sie die Länge der Seite x.

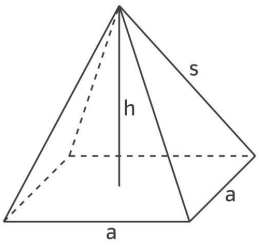
a)



b)



6 Berechnen Sie für eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche
a) … die Kantenlänge s für a = 8 cm und h = 10 cm.
b) … die Höhe für a = 6 cm und s = 9 cm.



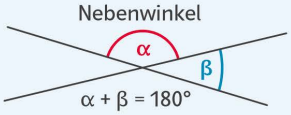
7 Prüfen Sie, ob ein Dreieck mit den angegebenen Seitenlängen rechtwinklig ist.
a) a = 12 cm; b = 5 cm; c = 13 cm
b) a = 16 cm; b = 7 cm; c = 14 cm

8 Berechnen Sie die fehlenden Seitenlängen und Winkelgrößen im Dreieck ABC.
a) a = 6 cm; c = 10 cm; $\gamma = 90°$
b) b = 7 cm; $\alpha = 60°$; $\beta = 90°$

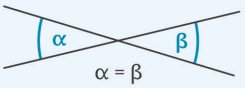
Elementare Geometrie

Winkelsätze (Aufgaben 1 bis 3)

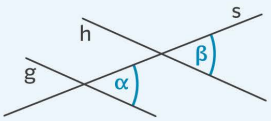
Nebenwinkel



Scheitelwinkel

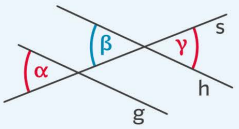


Stufenwinkel



(1) Wenn $g \parallel h$, dann $\alpha = \beta$.
(2) Wenn $\alpha = \beta$, dann $g \parallel h$.

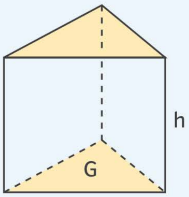
Wechselwinkel



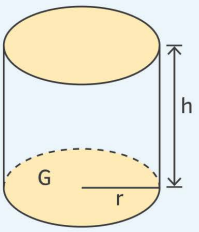
(1) Wenn $g \parallel h$, dann $\alpha = \gamma$.
(2) Wenn $\alpha = \gamma$, dann $g \parallel h$.

Volumina von Körpern (Aufgaben 4 bis 6)

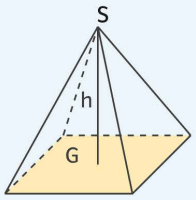
Volumen eines Prismas:
$V = G \cdot h$



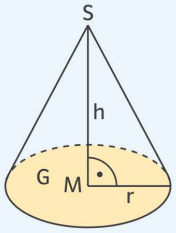
Volumen eines Zylinders:
$V = \pi r^2 \cdot h$



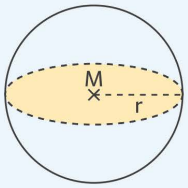
Volumen einer Pyramide:
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$



Volumen eines Kegels:
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$



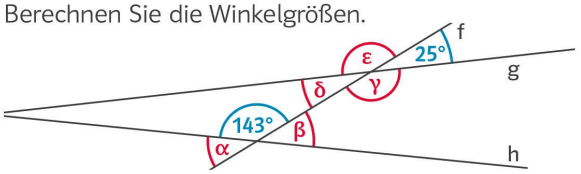
Volumen einer Kugel:
$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$



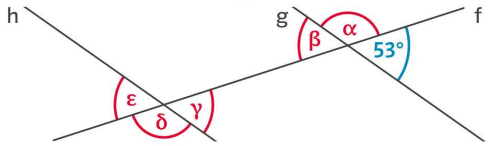
Grundwissen Test

→ **Lösungen**, Seite 545

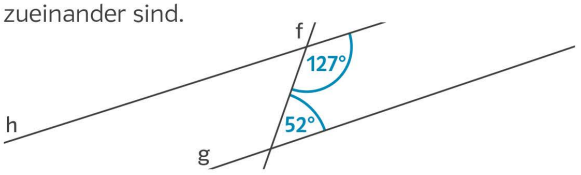
1 Berechnen Sie die Winkelgrößen.



2 Die Geraden g und h sind parallel zueinander. Berechnen Sie die Winkelgrößen.



3 Überprüfen Sie, ob die Geraden g und h parallel zueinander sind.



4 Berechnen Sie das Volumen

a) … eines Prismas mit der Höhe 4 m, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 6 m, 8 m und 10 m ist.

b) … eines Zylinders mit dem Grundkreisradius 4 cm und der Höhe 7 cm.

c) … einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche mit den Seitenlängen 60 cm und 50 cm und einer Höhe von 10 dm.

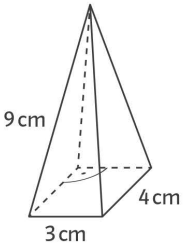
d) … eines Kegels mit dem Grundkreisradius 30 dm und der Höhe 5 m.

e) … einer Kugel mit dem Radius 7 mm.

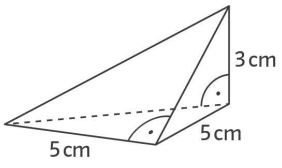
5 Ein Zylinder hat die Höhe 9 cm und das Volumen 306 cm^3. Bestimmen Sie seinen Grundkreisradius.

6 Berechnen Sie das Volumen V und den Oberflächeninhalt O der Pyramide.

a)



b)



Vektoren

Punkte im Raum (Aufgabe 1)

In einem räumlichen Koordinatensystem ist jeder Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ durch seine drei Koordinaten p_1, p_2 und p_3 eindeutig festgelegt.
Punkte, bei denen zwei Koordinaten den Wert 0 haben, liegen auf einer Koordinatenachse.
$P(0|0|5)$ liegt auf der x_3-Achse.
Punkte, bei denen eine Koordinate den Wert 0 hat, liegen in einer Koordinatenebene.
$Q(1|-4|0)$ liegt in der x_1x_2-Ebene.

Vektoren und ihr Betrag (Aufgaben 2 und 3)

Die Koordinaten eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ bestimmt man aus den Koordinaten der Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$.

Zu einem Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ gehört der Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$.

Unter dem Betrag eines Vektors $\vec{v}$ versteht man die Länge eines zugehörigen Pfeils.

Es gilt $|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Abstand zwischen zwei Punkten (Aufgabe 4)

Gegeben sind die Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ und $Q(q_1|q_2|q_3)$. Den Abstand d der beiden Punkte P und Q berechnet man mit
$d = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$.

Linearkombination (Aufgaben 5 bis 7)

Sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und eine reelle Zahl r gegeben, dann heißt $\vec{a} + \vec{b}$ die Summe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
$r \cdot \vec{a}$ heißt Skalarmultiplikation des Vektors $\vec{a}$ mit der Zahl r.
Sind zwei Vektoren Vielfache voneinander, dann heißen sie **kollinear**.

Grundwissen Test

→ **Lösungen**, Seite 546

1 Gegeben sind die Punkte $A(5|0|2)$, $B(7|1|2)$, $C(-1|-2|0)$ und $D(0|4|0)$.
a) Zeichnen Sie die Punkte in ein dreidimensionales Koordinatensystem.
b) Geben Sie an, ob die Punkte auf einer Koordinatenachse oder in einer Koordinatenebene liegen, und wenn ja, auf welcher.

2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{PQ}$.
a) $P(1|3|5)$, $Q(3|4|9)$
b) $P(0|3|-1)$, $Q(-5|18|4)$
c) $P(12|0|9)$, $Q(-6|0|-8)$

3 Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{v}$.
a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$
c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix}$

4 Berechnen Sie den Abstand der Punkte A und B.
a) $A(4|8|7)$, $B(1|2|1)$
b) $A(-2|3|0)$, $B(1|3|0)$
c) $A(-6|-1|2)$, $B(-6|2|-2)$

5 Berechnen Sie.
a) $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$
c) $3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$
d) $2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

6 Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mithilfe von Vektoren.
a) $A(5|7|2)$, $B(7|9|6)$ **b)** $A(-2|4|9)$, $B(4|3|-6)$
c) $A(0|0|-4)$, $B(4|0|0)$ **d)** $A(2|2|-2)$, $B(7|-7|-7)$

7 Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind. Geben Sie gegebenenfalls die Zahl an, mit der $\vec{a}$ multipliziert werden muss, um $\vec{b}$ zu erhalten.
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$

Geraden im Raum

Geraden im Raum (Aufgaben 1 und 2)

Eine Gleichung der Geraden g, die die Punkte $A(2|-3|5)$ und $B(-1|0|4)$ enthält, ist

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Punktprobe: Der Punkt $P(8|-9|7)$ liegt auf g, denn

das LGS $\begin{matrix} 2 - 3t = 8 \\ -3 + 3t = -9 \\ 5 - t = 7 \end{matrix}$ hat die Lösung $t = -2$.

Lagebeziehung von Geraden im Raum (Aufgaben 3 und 4)

Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden g und h im Raum mit $g: \vec{x} = \vec{p} + r\cdot\vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s\cdot\vec{v}$:

- $\vec{u} = k\cdot\vec{v}$ und $P \in h$: g und h sind *zueinander parallel und identisch*.
- $\vec{u} = k\cdot\vec{v}$ und $P \notin h$: g und h sind *zueinander parallel und verschieden*.
- $\vec{u} \neq k\cdot\vec{v}$ und $\vec{p} + r\cdot\vec{u} = \vec{q} + s\cdot\vec{v}$ hat eine Lösung: g und h *schneiden* sich.
- $\vec{u} \neq k\cdot\vec{v}$ und $\vec{p} + r\cdot\vec{u} = \vec{q} + s\cdot\vec{v}$ hat keine Lösung: g und h sind *zueinander windschief*.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen voneinander. Das LGS

$\begin{matrix} 2r = 4 \\ -r - 5s = 3 \\ r + 4s = -2 \end{matrix}$ hat die Lösung $r = 2$ und $s = -1$.

$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, Schnittpunkt $S(3|3|3)$

Bewegungsgleichung (Aufgabe 5)

Deutet man in der Parametergleichung $\vec{x} = \vec{p} + t\cdot\vec{v}$ den Parameter t als Zeit, erhält die Parametergleichung die Bedeutung einer Bewegungsgleichung. P ist der Ort des Körpers zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\vec{v}$ die Verschiebung des Körpers in einer Zeiteinheit. Der Betrag von $\vec{v}$ gibt zusammen mit der zugehörigen Einheit die Geschwindigkeit des Körpers an.

Ein Objekt bewegt sich modellhaft gemäß

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Koordinaten in km, t in min).

Das Objekt befindet sich zu Beginn im Punkt $P(2|1|2)$.

Geschwindigkeit: $\left|\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 9^2 + 1^2} \approx 10{,}86$

Es bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von etwa $10{,}86\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \approx 651{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Grundwissen Test

→ **Lösungen**, Seite 547

1 **a)** Geben Sie eine Gleichung einer Geraden g an, die die Punkte $A(6|-1|0)$ und $B(4|3|-7)$ enthält.

b) Geben Sie eine weitere Gleichung für die Gerade h an, die durch $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

2 Prüfen Sie, ob der Punkt A auf der Geraden g liegt.

a) $A(1|3|2)$, $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A(2|0|-1)$, $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \\ -24 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

4 Die Gerade h enthält die Punkte $A(1|5|2)$ und $B(4|-6|3)$. Geben Sie die Gleichung einer Geraden g an, die den Koordinatenursprung enthält und parallel zur Geraden h verläuft.

5 Eine geradlinige Rolltreppe läuft in Richtung und mit der Länge des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$ (in m) von einem in das nächste Stockwerk eines Kaufhauses. Sie startet im Punkt $A(12|10|0)$ und hat nach 20 Sekunden die Hälfte der Strecke zurückgelegt (alle Angaben in m).

a) Ermitteln Sie eine Bewegungsgleichung für die Fahrt auf der Rolltreppe und geben Sie an, für welche Zahlenwerte des Parameters die Strecke der Rolltreppe beschrieben wird.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Rolltreppe in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Daten und Wahrscheinlichkeit

Absolute und relative Häufigkeiten (Aufgabe 1)

Anzahlen nennt man in der Statistik absolute Häufigkeiten. Die dazugehörigen Anteile an der Gesamtanzahl nennt man relative Häufigkeiten.

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtanzahl}}$$

Die Summe aller relativen Häufigkeiten ergibt 1 bzw. 100 %.

Note	1	2	3	4	5	6	Summe
absolute Häufigkeit	5	10	15	1	4	15	50
relative Häufigkeit	$\frac{5}{50}$ = 10 %	$\frac{10}{50}$ = 20 %	$\frac{15}{50}$ = 30 %	$\frac{1}{50}$ = 2 %	$\frac{4}{50}$ = 8 %	$\frac{15}{50}$ = 30 %	$\frac{50}{50}$ = 1 = 100 %

Wahrscheinlichkeit (Aufgabe 2)

Bei einem Zufallsexperiment kann man die einzelnen **Ergebnisse** nicht vorhersagen. Man kann ihnen aber **Wahrscheinlichkeiten** zuordnen, die zusammen 1 (100 %) ergeben. Mit Wahrscheinlichkeiten drückt man aus, welche **relativen Häufigkeiten** man bei mehreren langen Versuchsreihen in etwa erwartet. Beim **Schätzen** von Wahrscheinlichkeiten orientiert man sich an **relativen Häufigkeiten** aus vergangenen Versuchsreihen – und man beachtet Symmetrien. Je mehr Versuche man gemacht hat, desto vertrauenswürdiger sind die Schätzwerte.

Arithmetisches Mittel (Aufgabe 3)

$$\text{arithmetisches Mittel} = \frac{\text{Summe aller Werte}}{\text{Gesamtanzahl}}$$

Hat man die 6 Werte 1, 3, 3, 4, 5 und 7, so erhält man das arithmetische Mittel wie folgt:

$$\frac{1+3+3+4+5+7}{6} = \frac{23}{6} \approx 3{,}8.$$

Im Alltag nennt man das arithmetische Mittel auch Durchschnitt oder Mittelwert.

Median (Aufgabe 3)

In einer sortierten Datenliste steht der Median in der Mitte. Wenn die Anzahl der Werte in der Liste gerade ist, wählt man als Median den Wert, der genau zwischen den beiden mittleren Werten liegt.

Median: 3
Liste: 1; 3; 3; 4; 5
Liste: 1; 3; 3; 4; 5; 7
Median: $\frac{3+4}{2} = 3{,}5$

Grundwissen Test

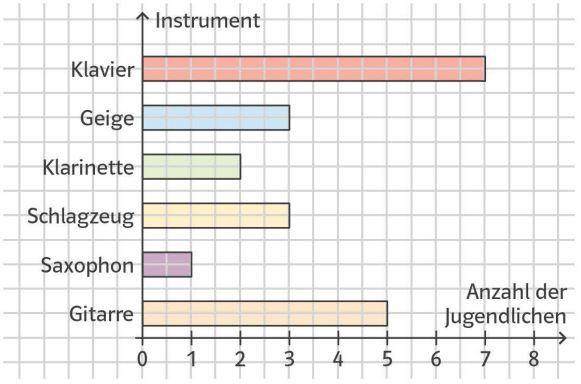
→ **Lösungen**, Seite 548

1 In einer 10. Klasse wurde abgefragt, wie viele Geschwister die 30 Jugendlichen haben.

keine	eins	zwei	drei	vier oder mehr
𝍸 IIII	𝍸 𝍸 IIII	𝍸	I	I

Bestimmen Sie die absolute und relative Häufigkeit für jede Geschwisteranzahl.

2 Die Jugendlichen eines Musikleistungskurses wurden befragt, welches Instrument sie spielen.



Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person

a) … Gitarre spielt.
b) … Schlagzeug oder Geige spielt.
c) … nicht Klavier spielt.

3 Imani hat in ihrer Klasse eine Umfrage gemacht, wie viele Stunden pro Tag ihre Mitschülerinnen und Mitschüler ihrer eigenen Einschätzung nach ihr Smartphone nutzen.

Stunden / Tag	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl der Lernenden	2	3	5	10	7	2	1

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Stundenanzahl.
b) Geben Sie den Median der Stundenanzahl an.
c) Statt 7 Stunden nutzt Luca das Smartphone 10 Stunden pro Tag. Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und den Median für die neue Einteilung. Erläutern Sie den Unterschied zwischen Median und arithmetischem Mittel.

I Fortsetzung der Differenzialrechnung

Seite 7

Check-in

1

a) $(3-2x)(5x+15)=0$

$3-2x=0 \quad |+2x$ oder $5x+15=0 \quad |-15$

$3=2x \quad |:2$ oder $5x=-15 \quad |:5$

$x_1=1{,}5$ und $x_2=-3$

b) $x^2-4x+3=0$ | pq-Formel

$x_{1/2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm\sqrt{1}$

$x_1=2+1=3$ und $x_2=2-1=1$

c) $3x^2+6x-9=0$ | :3

$x^2+2x-3=0$ | pq-Formel

$x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1+3}=-1\pm\sqrt{4}$

$x_1=-1+2=1$ und $x_2=-1-2=-3$

d) $x^2-12x+36=0$ | binomische Formel

$(x-6)^2=0$

$x=6$

e) $x^3-4x=0$ | ausklammern

$x(x^2-4)=0$ | binomische Formel

$x(x-2)(x+2)=0$

$x_1=0$ und $x_2=2$ und $x_3=-2$

f) $5x^3-10x^2+5x=0$ | ausklammern

$5x(x^2-2x+1)=0$ | binomische Formel

$5x(x-1)^2=0$

$x_1=0$ und $x_2=1$

2

a) $f'(x)=6x^2-8x$ $\quad f''(x)=12x-8$ $\quad f'''(x)=12$

b) $f'(x)=2x^3-2x^2+\frac{3}{5}$ $\quad f''(x)=6x^2-4x$ $\quad f'''(x)=12x-4$

c) $f'(x)=4ax^3-2bx$ $\quad f''(x)=12ax^2-2b$ $\quad f'''(x)=24ax$

3

a) $f'(t)$ gibt die Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$ an, mit der das Auto t Stunden nach dem Start fährt.

b) $f'(x)$ gibt die Steigung der Straße nach x Metern in horizontaler Entfernung vom Startpunkt an.

4

a) Ableitung: $f'(x)=1{,}5x$

Steigung an der Stelle $x_0=2$: $f'(2)=1{,}5\cdot2=3$

Steigungswinkel an der Stelle $x_0=2$: $\alpha=\tan^{-1}(3)\approx71{,}6°$

b) Ableitung: $f'(x)=0{,}4x-0{,}5$

Steigung an der Stelle $x_0=-2$:

$f'(-2)=0{,}4\cdot(-2)-0{,}5=-1{,}3$

Steigungswinkel an der Stelle $x_0=-2$:

$\alpha=\tan^{-1}(-1{,}3)\approx-52{,}4°$

5

a)

I	$8x$	$+4y$	$=$	20	
II	$3x$	$+4y$	$=$	10	$\mid\cdot(-1)$
I	$8x$	$+4y$	$=$	20	
II_a	$-3x$	$-4y$	$=$	-10	
$I+II_a$	$5x$		$=$	10	$\mid:5$
	x		$=$	2	

$x=2$ in I: $8\cdot2+4y=20 \quad |-16$

$4y=4 \quad |:4$

$y=1$

Lösungsmenge: $L=\{(2;1)\}$

b)

I	x		$=$	$5y-4$	
II	$7x$	$-4y$	$=$	3	
I in II:	$7(5y-4)$	$-4y$	$=$	3	
	$35y-28$	$-4y$	$=$	3	$\mid+28$
	$31y$		$=$	31	$\mid:31$
	y		$=$	1	

$y=1$ in I: $x=5\cdot1-4=1$

Lösungsmenge: $L=\{(1;1)\}$

c)

I	$4a$	$-6b$	$=$	-7	$\mid\cdot5$
II	$-5a$	$+8b$	$=$	$9{,}5$	$\mid\cdot4$
I_a	$20a$	$-30b$	$=$	-35	
II_a	$-20a$	$+32b$	$=$	38	
I_a+II_a		$2b$	$=$	3	$\mid:2$
		b	$=$	$1{,}5$	

$b=1{,}5$ in I: $4a-6\cdot1{,}5=-7$

$4a-9=-7 \quad |+9$

$4a=2 \quad |:4$

$a=0{,}5$

Lösungsmenge: $L=\{(0{,}5;1{,}5)\}$

d)

I	$-10a$	$+8b$	$=$	2	$\mid\cdot3$
II	$30a$	$+2b$	$=$	$\frac{34}{3}$	
I_a	$-30a$	$+24b$	$=$	6	
II	$30a$	$+2b$	$=$	$\frac{34}{3}$	
I_a+II		$26b$	$=$	$6+\frac{34}{3}=\frac{18}{3}+\frac{34}{3}=\frac{52}{3}$	$\mid:26$
		b	$=$	$\frac{2}{3}$	

$b=\frac{2}{3}$ in I: $-10a+8\cdot\frac{2}{3}=2 \quad \left|-\frac{16}{3}\right.$

$-10a=2-\frac{16}{3}=\frac{6}{3}-\frac{16}{3}=-\frac{10}{3} \quad |:(-10)$

$a=\frac{1}{3}$

Lösungsmenge: $L=\left\{\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\right\}$

6

a) $x^8\cdot x^3=x^{8+3}=x^{11}$

b) $\frac{x^9}{x^5}=x^{9-5}=x^4$

c) $(x^{-2})^3=x^{-2\cdot3}=x^{-6}$

d) $x^{-5}\cdot x^6=x^{-5+6}=x^1$

e) $(\sqrt{x})^4=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4=x^{\frac{1}{2}\cdot4}=x^2$

Seite 12

5

a) Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 12$; $f''(x) = 6x$

Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$3x^2 - 12 = 0 \quad | + 12$

$3x^2 = 12 \quad | : 3$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_1 = 2$ prüfen:

Es gilt $f''(2) = 12 > 0$, somit ist $x_1 = 2$ eine Minimalstelle von f.

Mit $f(2) = 8 - 24 = -16$ folgt, dass $T(2|-16)$ ein Tiefpunkt des Graphen von f ist.

Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_2 = -2$ prüfen:

Es gilt $f''(-2) = -12 < 0$, somit ist $x_2 = -2$ eine Maximalstelle von f.

Mit $f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = -8 + 24 = 16$ folgt, dass $H(-2|16)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist.

b) Ableitungen: $f'(x) = x^2 - 3x = x(x - 3)$; $f''(x) = 2x - 3$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $x(x - 3) = 0$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 3$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_1 = 0$ prüfen:

Es gilt $f''(0) = -3 < 0$, somit ist $x_1 = 0$ eine Maximalstelle von f.

Mit $f(0) = 1$ folgt, dass $H(0|1)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist.

Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_2 = 3$ prüfen:

Es gilt $f''(3) = 3 > 0$, somit ist $x_2 = 3$ eine Minimalstelle von f.

Mit $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9 + 1 = 9 - 13{,}5 + 1 = -3{,}5$ folgt, dass $T(3|-3{,}5)$ ein Tiefpunkt des Graphen von f ist.

c) Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x - 4)$; $f''(x) = -6x + 12$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $-3x(x - 4) = 0$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 4$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_1 = 0$ prüfen:

Es gilt $f''(0) = 12 > 0$, somit ist $x_1 = 0$ eine Minimalstelle von f.

Mit $f(0) = 0$ folgt, dass $T(0|0)$ ein Tiefpunkt des Graphen von f ist.

Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_2 = 4$ prüfen:

Es gilt $f''(4) = -24 + 12 = -12 < 0$, somit ist $x_2 = 4$ eine Maximalstelle von f.

Mit $f(4) = -64 + 6 \cdot 16 = -64 + 96 = 32$ folgt, dass $H(4|32)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist.

6

a) Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 + 12x$; $f''(x) = 6x + 12$; $f'''(x) = 6$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$6x + 12 = 0 \quad | - 12$

$6x = -12 \quad | : 6$

$x = -2$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen prüfen:

Es gilt $f'''(-2) = 6 \neq 0$, somit ist $x = -2$ eine Wendestelle von f.

Mit $f(-2) = -8 + 6 \cdot 4 = -8 + 24 = 16$ folgt, dass $W(-2|16)$ ein Wendepunkt des Graphen von f ist.

b) Ableitungen: $f'(x) = x^2 - 2x + 2$; $f''(x) = 2x - 2$; $f'''(x) = 2$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$2x - 2 = 0 \quad | + 2$

$2x = 2 \quad | : 2$

$x = 1$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen prüfen:

Es gilt $f'''(1) = 2 \neq 0$, somit ist $x = 1$ eine Wendestelle von f.

Mit $f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1 - 1 + 2 = \frac{4}{3}$ folgt, dass $W\left(1\left|\frac{4}{3}\right.\right)$ ein Wendepunkt des Graphen von f ist.

c) Ableitungen: $f'(x) = 5x^4$; $f''(x) = 20x^3$; $f'''(x) = 60x^2$

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $20x^3 = 0$

$x = 0$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen prüfen:

Da $f'''(0) = 0$ ist, wird f'' auf einen Vorzeichenwechsel an der Stelle $x = 0$ untersucht.

Es gilt $f''(-1) = -20$ und $f''(1) = 20$.

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	–	0	+
Krümmung des Graphen von f	rechts-gekrümmt	keine Krümmung	links-gekrümmt

Mit $f(0) = 0$ folgt, dass $W(0|0)$ ein Wendepunkt des Graphen von f ist.

Seite 13

12

a) Um 3 Uhr morgens sind seit Beginn des Experiments 19 Stunden vergangen. Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man $A(19) = 56{,}005$. Somit ist dem Modell zufolge um 3 Uhr morgens eine Fläche von ca. $56\,cm^2$ von Bakterien besetzt.

b) Gesucht sind die globale Maximalstelle und das globale Maximum von A' im Intervall $[0; 28]$. Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man:

Die globale Maximalstelle von A' im Intervall $[0; 28]$ ist $t = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$; das globale Maximum beträgt $A'\left(\frac{40}{3}\right) = \frac{107}{30} \approx 3{,}57$.

Somit liegt das maximale Wachstum $13\frac{1}{3}$ Stunden nach dem Beginn des Experiments, also um 21:20 h. Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt ca. $3{,}57\,\frac{cm^2}{h}$.

G **14**

a) (1) Umfang des Kreises: $U = 2\pi \cdot 2{,}1\,\text{cm} \approx 13{,}2\,\text{cm}$
Flächeninhalt des Kreises: $A = \pi \cdot (2{,}1\,\text{cm})^2 \approx 13{,}9\,\text{cm}^2$
(2) Umfang des Kreises: $U = 2\pi \cdot 3{,}8\,\text{cm} \approx 23{,}9\,\text{cm}$
Flächeninhalt des Kreises: $A = \pi \cdot (3{,}8\,\text{cm})^2 \approx 45{,}4\,\text{cm}^2$

b) (1) Bogenlänge des Kreisausschnitts:
$b = 2\pi \cdot 2{,}1\,\text{cm} \cdot \frac{97°}{360°} \approx 3{,}6\,\text{cm}$
Flächeninhalt des Kreisausschnitts:
$A = \pi \cdot (2{,}1\,\text{cm})^2 \cdot \frac{97°}{360°} \approx 3{,}7\,\text{cm}^2$
(2) Bogenlänge des Kreisausschnitts:
$b = 2\pi \cdot 3{,}8\,\text{cm} \cdot \frac{163°}{360°} \approx 10{,}8\,\text{cm}$
Flächeninhalt des Kreisausschnitts:
$A = \pi \cdot (3{,}8\,\text{cm})^2 \cdot \frac{163°}{360°} \approx 20{,}5\,\text{cm}^2$

Seite 15

3

a) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ | Substitution $z = x^2$
$z^2 + 2z - 3 = 0$ | pq-Formel anwenden
$z_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3} = -1 \pm \sqrt{4}$
$z = -1 + 2 = 1$ oder
$z = -1 - 2 = -3$ | Rücksubstitution $x^2 = z$
$x^2 = 1$ oder $x^2 = -3$ | Wurzel ziehen, falls möglich
Die Nullstellen von f sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

b) $x^5 - 10x^3 + 9x = 0$ | ausklammern
$x \cdot (x^4 - 10x^2 + 9) = 0$
$x = 0$ oder $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ | Substitution $z = x^2$
$z^2 - 10z + 9 = 0$ | pq-Formel anwenden
$z_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm \sqrt{16}$
$z = 5 + 4 = 9$ oder
$z = 5 - 4 = 1$ | Rücksubstitution $x^2 = z$
$x^2 = 9$ oder $x^2 = 1$ | Wurzel ziehen, falls möglich
Die Nullstellen von f sind $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$, $x_4 = 1$ und $x_5 = -1$.

c) $(x^4 - 9x^2 + 8)(x - 4) = 0$
$x = 4$ oder $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$ | Substitution $z = x^2$
$z^2 - 9z + 8 = 0$ | pq-Formel anwenden
$z_{1/2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 8} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$
$z = \frac{9}{2} + \frac{7}{2} = \frac{16}{2} = 8$ oder
$z = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} = 1$ | Rücksubstitution $x^2 = z$
$x^2 = 8$ oder $x^2 = 1$ | Wurzel ziehen, falls möglich
Die Nullstellen von f sind $x_1 = 4$, $x_2 = \sqrt{8}$, $x_3 = -\sqrt{8}$, $x_4 = 1$ und $x_5 = -1$.

7

$(t + 1)^3 + (t + 1)^2 - 6(t + 1) = 0$ | Substitution $x = t + 1$
$x^3 + x^2 - 6x = 0$ | ausklammern
$x(x^2 + x - 6) = 0$
$x = 0$ oder $x^2 + x - 6 = 0$ | pq-Formel anwenden
$x_1 = 0$ und $x_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$
$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ und $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{6}{2} = -3$
Für die Rücksubstitution muss die Gleichung $x = t + 1$ nach t aufgelöst werden: $x = t + 1$ | -1
$x - 1 = t$
Durch die Rücksubstitution $t = x - 1$ erhält man
$t_1 = x_1 - 1 = 0 - 1 = -1$, $t_2 = x_2 - 1 = 2 - 1 = 1$ und
$t_3 = x_3 - 1 = -3 - 1 = -4$.
Die Nullstellen von g sind $t_1 = -1$, $t_2 = 1$ und $t_3 = -4$.

G **9**

a) Bezeichnet man den Mittelpunktswinkel mit α, so gilt:
$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$ | $\cdot \frac{360°}{2\pi r}$
$\alpha = \frac{360° \cdot b}{2\pi r} = \frac{360° \cdot 17{,}8\,\text{cm}}{2\pi \cdot 5{,}6\,\text{cm}} \approx 182{,}1°$

b) Bezeichnet man den Mittelpunktswinkel mit α, so gilt:
$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$ | $\cdot \frac{360°}{\pi r^2}$
$\alpha = \frac{360° \cdot A}{\pi r^2} = \frac{360° \cdot 24{,}9\,\text{cm}^2}{\pi \cdot (5{,}6\,\text{cm})^2} \approx 91{,}0°$

Seite 18

5

a) Für den Flächeninhalt A des Rechtecks gilt $A = a \cdot b$.
Nebenbedingung: $2a + 2b = 50$
Um eine Funktion zu finden, die von a abhängt, muss die Gleichung der Nebenbedingung nach b aufgelöst werden.
$2a + 2b = 50$ | $-2a$
$2b = 50 - 2a$ | $:2$
$b = 25 - a$
Durch Einsetzen in die Formel erhält man
$A = a \cdot b = a \cdot (25 - a) = 25a - a^2$.
Zielfunktion: $A(a) = 25a - a^2$ mit $D_A =]0; 25[$

b) Ableitungen: $A'(a) = 25 - 2a$; $A''(a) = -2$
Notwendige Bedingung für Extremstellen:
$25 - 2a = 0$ | $+2a$
$25 = 2a$ | $:2$
$a = \frac{25}{2} = 12{,}5$
Da der Graph von A eine nach unten geöffnete Parabel ist, ist A(12,5) das globale Maximum von A.
Somit ist der Inhalt des Rechtecks maximal, wenn die Seite a die Länge 12,5 cm hat.
In dieser Situation gilt $b = 25 - a = 25 - 12{,}5 = 12{,}5$; die Seite b muss somit auch 12,5 cm lang sein.
Der maximale Flächeninhalt beträgt
$A = a \cdot b = 12{,}5 \cdot 12{,}5 = \frac{25}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{625}{4} = 156\frac{1}{4} = 156{,}25\,[\text{cm}^2]$.

Seite 19

13

a = Seitenlänge der Grundfläche der Schachtel (in cm)
h = Höhe der Schachtel (in cm)
Volumen V der Schachtel (in cm^3): $V = a^2h$
Nebenbedingung: $a^2 + 4ah = 100 \quad | -a^2$

$$4ah = 100 - a^2 \quad | :4a$$

$$h = \frac{100 - a^2}{4a}$$

Durch Einsetzen in die Formel für V erhält man

$$V = a^2 \cdot \frac{100 - a^2}{4a} = \frac{a \cdot (100 - a^2)}{4} = \frac{100a - a^3}{4} = 25a - \frac{a^3}{4}.$$

Zielfunktion: $V(a) = 25a - \frac{a^3}{4}$ mit $D_V =]0; 10[$
Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man auf dem Intervall $]0; 10[$ das Maximum $V \approx 96{,}23$ an der Stelle $a \approx 5{,}77$.

In dieser Situation gilt $h = \frac{100 - a^2}{4a} \approx 2{,}89$.

Daher ist das Volumen der Schachtel mit ca. 96,2 cm^3 maximal, wenn die Grundfläche eine Seitenlänge von 5,8 cm und eine Höhe von 2,9 cm hat.

14

a = Anzahl der verkauften Bauteile pro Monat
s = Stückpreis (in €); p = Preissenkung (in €)
Für die monatlichen Einnahmen e (in €) gilt $e = a \cdot s$.
Nebenbedingungen: $s = 25 - p$; $a = 5000 + 300p$
Durch Einsetzen in die Formel für e erhält man
$e = (5000 + 300p)(25 - p)$.
Zielfunktion: $e(p) = (5000 + 300p)(25 - p)$ mit $D_e =]0; 25[$
Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man im Intervall $]0; 25[$ das Maximum $e \approx 130\,208{,}33$ an der Stelle $p \approx 4{,}17$.
Daraus folgt, dass die monatlichen Einnahmen laut Modell mit ca. 130 208 € maximal sind, wenn der Stückpreis 25 € − 4,17 € = 20,83 € beträgt.

G 18

a) Für den Mantelflächeninhalt M gilt
$M = (6\,cm + 5\,cm + 5\,cm) \cdot 8\,cm = 128\,cm^2$.
Da die Grundfläche G des Prismas ein gleichschenkliges Dreieck ist, gilt

$$G = \frac{6\,cm}{2} \cdot \sqrt{(5\,cm)^2 - \left(\frac{6\,cm}{2}\right)^2}$$
$$= 3\,cm \cdot \sqrt{25\,cm^2 - 9\,cm^2}$$
$$= 3\,cm \cdot 4\,cm = 12\,cm^2.$$

Damit erhält man für den Oberflächeninhalt
$O = M + 2 \cdot G = 128\,cm^2 + 2 \cdot 12\,cm^2 = 152\,cm^2$ und für das Volumen $V = G \cdot h = 12\,cm^2 \cdot 8\,cm = 96\,cm^3$.

b) Da der Oberflächeninhalt des zweiten Prismas $2 \cdot 152\,cm^2 = 304\,cm^2$ beträgt, muss für die Höhe h gelten:

$304\,cm^2 = (6\,cm + 5\,cm + 5\,cm) \cdot h + 2 \cdot 12\,cm^2$
$304\,cm^2 = 16\,cm \cdot h + 24\,cm^2 \quad | -24\,cm^2$
$280\,cm^2 = 16\,cm \cdot h \quad | :16\,cm$

$$h = \frac{280\,cm^2}{16\,cm} = 17{,}5\,cm$$

Seite 22

5

a) Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Bedingungen: $f(0) = 3$; $f(1) = 1$; $f(2) = -3$
Gleichungen aufstellen:
$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, also $c = 3$
$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$, also $a + b + c = 1$
$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$, also $4a + 2b + c = -3$
Einsetzen von $c = 3$ liefert das folgende Gleichungssystem:

I	$a + b + 3 = 1$	$\| -3$
II	$4a + 2b + 3 = -3$	$\| -3$
I_a	$a + b = -2$	$\| \cdot(-2)$
II_a	$4a + 2b = -6$	
I_b	$-2a - 2b = 4$	
II_a	$4a + 2b = -6$	
$I_b + II_a$	$2a = -2$	$\| :2$
	$a = -1$	

$a = -1$ in I_a: $-1 + b = -2 \quad | +1$
$b = -1$

Man erhält die Funktionsgleichung $f(x) = -x^2 - x + 3$.

b) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$
Bedingungen: $f(0) = 2$; $f''(0) = 0$; $f(-1) = 0$; $f'(-1) = 0$
Gleichungen aufstellen:
$f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d$, also $d = 2$
$f''(0) = 6a \cdot 0 + 2b = 2b$, also $2b = 0$ und damit $b = 0$
$f(-1) = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = -a + b - c + d$, also $-a + b - c + d = 0$
$f'(-1) = 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 3a - 2b + c$, also $3a - 2b + c = 0$
Einsetzen von $d = 2$ und $b = 0$ liefert das folgende Gleichungssystem:

I	$-a + 0 - c + 2 = 0$	$\| -2$
II	$3a - 2 \cdot 0 + c = 0$	
I_a	$-a - c = -2$	
II	$3a + c = 0$	
$I_a + II$	$2a = -2$	$\| :2$
	$a = -1$	

$a = -1$ in II: $3 \cdot (-1) + c = 0 \quad | +3$
$c = 3$

Man erhält die Funktionsgleichung $f(x) = -x^3 + 3x + 2$.
Hinreichende Bedingungen für die Existenz des Tiefpunkts und des Wendepunkts prüfen:
Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 + 3$; $f''(x) = -6x$; $f'''(x) = -6$
Es gilt $f''(-1) = -6 \cdot (-1) = 6 > 0$. Der Graph hat den Tiefpunkt $T(-1 | 0)$.
Es gilt $f'''(0) = -6 \neq 0$. Der Graph hat den Wendepunkt $W(0 | 2)$.

c) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Bedingungen: $f(-1) = 3;\ f(0) = -1;\ f(1) = -1;\ f(2) = 9$
Gleichungen aufstellen:
$f(-1) = a\cdot(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1) + d = -a + b - c + d$, also $-a + b - c + d = 3$
$f(0) = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = d$, also $d = -1$
$f(1) = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = a + b + c + d$, also $a + b + c + d = -1$
$f(2) = a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d = 8a + 4b + 2c + d$, also $8a + 4b + 2c + d = 9$
Einsetzen von $d = -1$ liefert das folgende Gleichungssystem:

I	$-a$	$+\ b$	$-\ c$	$-\ 1$	$=$	3
II	a	$+\ b$	$+\ c$	$-\ 1$	$=$	-1
III	$8a$	$+\ 4b$	$+\ 2c$	$-\ 1$	$=$	9

Mit einem MMS erhält man die Lösung $a = 1$, $b = 2$ und $c = -3$.
Es ergibt sich die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$.

Seite 23

11

Da im Modell ein zur y-Achse symmetrischer Verlauf des Graphen angenommen wird, muss die gesuchte Funktion gerade sein.
Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c;\ f'(x) = 4ax^3 + 2bx$
Bedingungen: $f(0) = 1;\ f(1) = 0{,}5;\ f'(1) = 0$
Gleichungen aufstellen:
$f(0) = a\cdot 0^4 + b\cdot 0^2 + c = c$, also $c = 1$
$f(1) = a\cdot 1^4 + b\cdot 1^2 + c = a + b + c$, also $a + b + c = 0{,}5$
$f'(1) = 4a\cdot 1^3 + 2b\cdot 1 = 4a + 2b$, also $4a + 2b = 0$
Einsetzen von $c = 1$ liefert das Gleichungssystem:

I	a	$+\ b$	$+\ 1$	$=$	$0{,}5$	
II	$4a$	$+\ 2b$		$=$	0	

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man die Lösung $a = \frac{1}{2}$ und $b = -1$.
Es ergibt sich die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1$.
Hinweis: Alternativ kann man von einer beliebigen ganzrationalen Funktion vierten Grades mit $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ausgehen. Mit den zusätzlichen Bedingungen $f(-1) = 0{,}5$ und $f'(-1) = 0$ erhält man ebenfalls die gesuchte Funktionsgleichung.

G 15

a) $M = 2\pi rh = 2\pi\cdot 7\,\text{cm}\cdot 15\,\text{cm} = \pi\cdot 210\,\text{cm}^2 \approx 659{,}73\,\text{cm}^2$
$O = 2\pi r^2 + M = 2\pi\cdot 49\,\text{cm}^2 + \pi\cdot 210\,\text{cm}^2 = \pi\cdot 308\,\text{cm}^2 \approx 967{,}61\,\text{cm}^2$
$V = \pi r^2 h = \pi\cdot 49\,\text{cm}^2\cdot 15\,\text{cm} = \pi\cdot 735\,\text{cm}^3 \approx 2309{,}07\,\text{cm}^3$

b) $M = 2\pi rh = 2\pi\cdot 2{,}3\,\text{cm}\cdot 8{,}6\,\text{cm} = \pi\cdot 39{,}56\,\text{cm}^2 \approx 124{,}28\,\text{cm}^2$
$O = 2\pi r^2 + M = 2\pi\cdot 5{,}29\,\text{cm}^2 + \pi\cdot 39{,}56\,\text{cm}^2 = \pi\cdot 50{,}14\,\text{cm}^2 \approx 157{,}52\,\text{cm}^2$
$V = \pi r^2 h = \pi\cdot 5{,}29\,\text{cm}^2\cdot 8{,}6\,\text{cm} = \pi\cdot 95{,}494\,\text{cm}^3 \approx 142{,}92\,\text{cm}^3$

c) $M = 2\pi rh = 2\pi\cdot 9\,\text{cm}\cdot 2\,\text{cm} = \pi\cdot 36\,\text{cm}^2 \approx 113{,}10\,\text{cm}^2$
$O = 2\pi r^2 + M = 2\pi\cdot 81\,\text{cm}^2 + \pi\cdot 36\,\text{cm}^2 = \pi\cdot 198\,\text{cm}^2 \approx 622{,}04\,\text{cm}^2$
$V = \pi r^2 h = \pi\cdot 81\,\text{cm}^2\cdot 2\,\text{cm} = \pi\cdot 162\,\text{cm}^3 \approx 508{,}94\,\text{cm}^3$

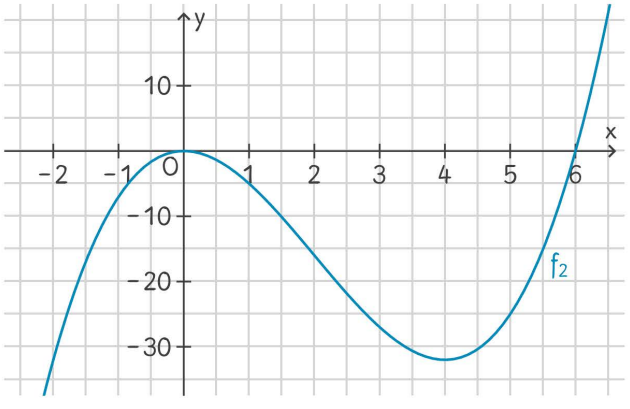
Seite 26

5

a) Es gilt $f_t(-1) = (-1)^3 - 3t\cdot(-1)^2 + 3t - 6 = -1 - 3t + 3t - 6 = -7$.
Der Graph von f_t verläuft unabhängig von $t > 0$ durch den Punkt $P(-1\,|\,-7)$.

b) Ableitungen: $f_t'(x) = 3x^2 - 6tx = 3x(x - 2t);\ f_t''(x) = 6x - 6t$
Notwendige Bedingung für Extremstellen: $3x(x - 2t) = 0$
$x_1 = 0$ und $x_2 = 2t$
Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_1 = 0$ prüfen:
Es gilt $f_t''(0) = 6\cdot 0 - 6t = -6t < 0$, somit ist $x_1 = 0$ eine Maximalstelle von f_t.
Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_2 = 2t$ prüfen:
Es gilt $f_t''(2t) = 6\cdot 2t - 6t = 12t - 6t = 6t > 0$, somit ist $x_2 = 2t$ eine Minimalstelle von f_t.

c) Aus Teilaufgabe b) folgt: $x_1 = 0$ ist eine Maximalstelle von f_2, $x_2 = 2\cdot 2 = 4$ ist eine Minimalstelle von f_2.
Es gilt $f_2(x) = x^3 - 3\cdot 2x^2 + 3\cdot 2 - 6 = x^3 - 6x^2 = x^2(x - 6)$,
also $f_2(0) = 0^3 - 6\cdot 0^2 = 0$ und
$f_2(4) = 4^3 - 6\cdot 4^2 = 64 - 96 = -32$.
Daher ist $H(0\,|\,0)$ ein Hochpunkt des Graphen von f_2 und $T(4\,|\,-32)$ ein Tiefpunkt des Graphen von f_2.
Außerdem gilt: $f_2(x) = 0$
$x^2(x - 6) = 0$
$x_1 = 0$ und $x_2 = 6$
also sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$ die Nullstellen von f_2.
Skizze:

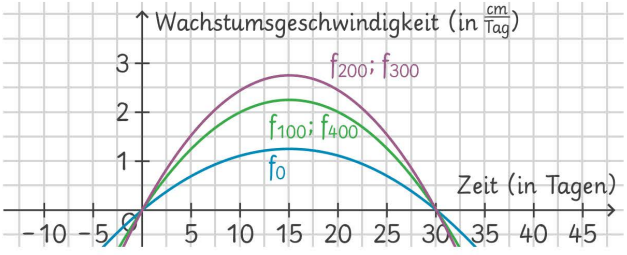


Seite 28

15

a) Die Graphen schneiden die x-Achse an den Stellen $t_1 = 0$ und $t_2 = 30$ und verlaufen zwischen diesen beiden Nullstellen oberhalb der x-Achse. An der Funktionsgleichung erkennt man, dass der Graph eine nach unten geöffnete Parabel ist. Also hat der Graph an der Stelle $t_3 = 15$ einen Hochpunkt.

b) Eine Erhöhung der Düngermenge sorgt zunächst dafür, dass die Wachstumsgeschwindigkeit in der ersten Hälfte des Beobachtungszeitraums stärker ansteigt, einen höheren Maximalwert annimmt und in der zweiten Hälfte des Beobachtungszeitraums stärker fällt. Dieser Effekt ist jedoch nur bis zu einer bestimmten Düngermenge zu beobachten: So ist die maximale Wachstumsgeschwindigkeit bei einer Düngermenge von 400 ml geringer als bei einer Düngermenge von 300 ml.



c) Es gilt $f_d'(t) = \left(\frac{-d^2 + 500d}{50000} + 1\right) \cdot \left(-\frac{2t}{180} + \frac{1}{6}\right)$

$= \left(\frac{-d^2 + 500d}{5000} + 1\right) \cdot \left(-\frac{t}{90} + \frac{1}{6}\right)$.

Der Graph der Funktion g mit $g(d) = \frac{-d^2 + 500d}{5000} + 1$ ist eine nach unten geöffnete Parabel.

Ihre Nullstellen sind $d_1 \approx -9{,}8$ und $d_2 \approx 509{,}8$.

Daher gilt $\left(\frac{-d^2 + 500d}{5000} + 1\right) > 0$ für alle $d \in [0; 500]$.

Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$$\left(\frac{-d^2 + 500d}{50000} + 1\right) \cdot \left(-\frac{t}{90} + \frac{1}{6}\right) = 0 \quad \Big| : \left(\frac{-d^2 + 500d}{50000} + 1\right)$$

$$-\frac{t}{90} + \frac{1}{6} = 0$$

$$t = 15$$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen prüfen:

Es gilt $f''(15) = \underbrace{-\frac{1}{90}}_{<0} \cdot \underbrace{\left(\frac{-d^2 + 500d}{50000} + 1\right)}_{>0 \text{ (s. o.)}} < 0$.

Also ist $t = 15$ unabhängig von $d \in [0; 500]$ eine Maximalstelle von f_d.

Im Sachkontext bedeutet das, dass die Pflanze 15 Tage nach der Düngung am schnellsten wächst, unabhängig davon, wie viel Dünger verwendet wird.

d) Für das Maximum von f_d gilt $f_d(15) = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{-d^2 + 500d}{50000} + 1\right)$.

Daher ordnet die quadratische Funktion h mit

$h(d) = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{-d^2 + 500d}{50000} + 1\right)$ jeder Düngermenge $d \in [0; 500]$ (in ml) die auftretende maximale Wachstumsgeschwindigkeit (in cm pro Tag) zu. Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man den Hochpunkt $H(250 \mid 16{,}875)$ des Graphen von h, also ist $d = 250$ die Maximalstelle von h. Im Sachkontext bedeutet das, dass laut Modell mit einer Düngermenge von 250 ml die höchste Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze erzielt werden kann.

G 19

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9\,\text{cm}^2 \cdot 7{,}5\,\text{cm} = \pi \cdot 22{,}5\,\text{cm}^3 \approx 70{,}69\,\text{cm}^3$

$M = \pi r s$ mit

$s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{9\,\text{cm}^2 + 56{,}25\,\text{cm}^2} = \sqrt{65{,}25\,\text{cm}^2} \approx 8{,}0777\,\text{cm}$

$M = \pi r s \approx \pi \cdot 3\,\text{cm} \cdot 8{,}0777\,\text{cm} = \pi \cdot 24{,}2331\,\text{cm}^2 \approx 76{,}13\,\text{cm}^2$

$O = \pi r^2 + M \approx \pi \cdot 9\,\text{cm}^2 + \pi \cdot 24{,}2331\,\text{cm}^2 = \pi \cdot 33{,}2331\,\text{cm}^2$

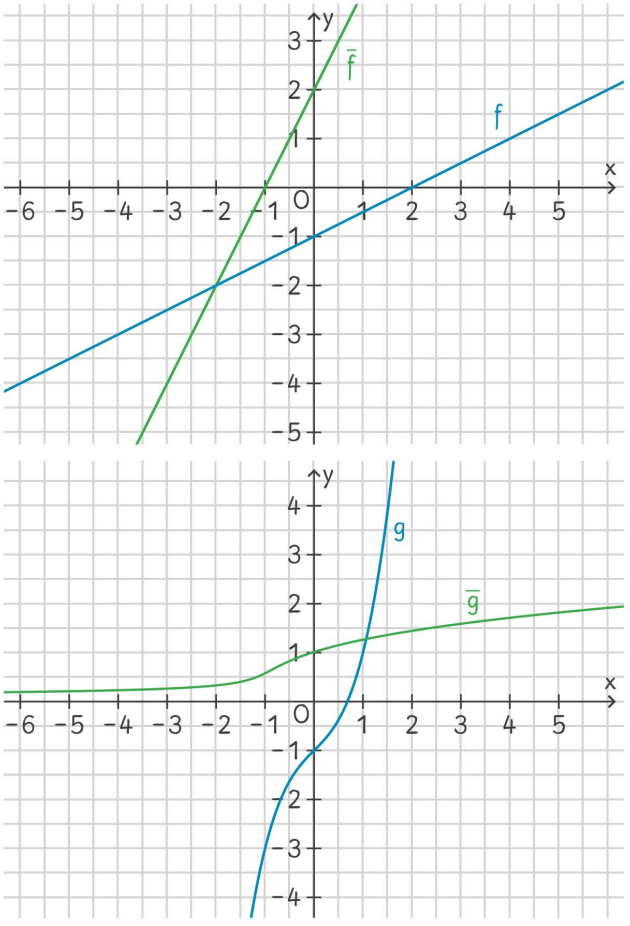
$\approx 104{,}41\,\text{cm}^2$

Seite 31

5

a) Die Funktionen f und g sind im abgebildeten Bereich streng monoton steigend und damit umkehrbar.

b)



6

a) Die Umkehrfunktion $\bar{f}$ ordnet jeder Temperatur (in °C) den zugehörigen Zeitpunkt (in min nach der Zubereitung) zu. Das heißt, dass das Heißgetränk zu diesem Zeitpunkt die vorgegebene Temperatur annimmt.

b) A Das Heißgetränk hat 5 Minuten nach dem Zubereiten eine Temperatur von 78,5 °C.
B Die Temperatur von 60 °C nimmt das Heißgetränk 14,5 Minuten nach der Zubereitung an.
C Eine halbe Stunde nach der Zubereitung sinkt die Temperatur des Heißgetränks innerhalb der folgenden 10 Minuten um 1,5 °C.

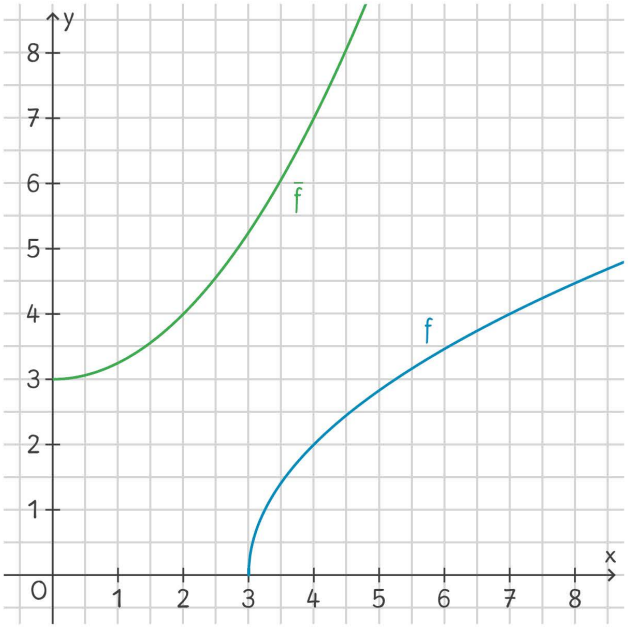
Seite 32

11

a) Es gilt $D_f = \mathbb{R}^{\geq 3}$ und $W_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$. Daraus folgt $D_{\bar{f}} = W_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$ und $W_{\bar{f}} = D_f = \mathbb{R}^{\geq 3}$.

b) Der Graph von f entsteht, indem man den Graphen von h um 3 Einheiten nach rechts verschiebt und in y-Richtung mit dem Faktor 2 streckt.

c)



G **14**

Für das Volumen eines Kegels gilt $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Für den neuen Kegel gilt $h_{neu} = \frac{1}{2}h$ und $r_{neu} = 2r$.

Daraus folgt für das Volumen des neuen Kegels

$V_{neu} = \frac{1}{3}\pi \cdot r_{neu}^2 \cdot h_{neu} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4r^2 \cdot \frac{1}{2}h = \frac{2}{3}\pi r^2 h = 2V$.

Das Volumen verdoppelt sich.

Seite 35

5

a) Ableitung: $f'(x) = -3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{x^2}$

Steigungen: $f'(0{,}5) = \frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12$; $f'(1) = \frac{3}{1^2} = \frac{3}{1} = 3$;

$f'(2) = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$

Steigungswinkel der Tangenten:

$x_1 = 0{,}5$: $\alpha = \tan^{-1}(12) \approx 85{,}2°$

$x_2 = 1$: $\alpha = \tan^{-1}(3) \approx 71{,}6°$

$x_3 = 2$: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36{,}9°$

b) Ableitung: $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Steigungen: $f'(0{,}5) = \frac{1}{\sqrt{0{,}5}} \approx 1{,}414$; $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$;

$f'(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$

Steigungswinkel der Tangenten:

$x_1 = 0{,}5$: $\alpha = \tan^{-1}(1{,}414) \approx 54{,}7°$

$x_2 = 1$: $\alpha = \tan^{-1}(1) = 45°$

$x_3 = 2$: $\alpha = \tan^{-1}(0{,}707) \approx 35{,}3°$

c) Ableitung: $f'(x) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}$

Steigungen: $f'(0{,}5) = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$; $f'(1) = \frac{2}{1^2} = \frac{2}{1} = 2$;

$f'(2) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$

Steigungswinkel der Tangenten:

$x_1 = 0{,}5$: $\alpha = \tan^{-1}(8) \approx 82{,}9°$

$x_2 = 1$: $\alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63{,}4°$

$x_3 = 2$: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}6°$

d) Es gilt $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}$ und daher $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{x}$.

Steigungen: $f'(0{,}5) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}530$; $f'(1) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{1} = \frac{3}{4}$;

$f'(2) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}061$

Steigungswinkel der Tangenten:

$x_1 = 0{,}5$: $\alpha = \tan^{-1}(0{,}530) \approx 27{,}9°$

$x_2 = 1$: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36{,}9°$

$x_3 = 2$: $\alpha = \tan^{-1}(1{,}061) \approx 46{,}7°$

Seite 37

13

Ableitungen: $f'(x) = -1$; $g'(x) = -\frac{a}{x^2}$

Es muss gelten: (1) $f(1) = g(1)$

$-1 + 5 = \frac{a}{1} + b$

$4 = a + b$

(2) $f'(1) = g'(1)$

$-1 = -\frac{a}{1^2} \quad | : (-1)$

$1 = a$

Einsetzen von $a = 1$ in (1) liefert: $4 = 1 + b \quad | -1$

$3 = b$

Man erhält die Funktionsgleichung $g(x) = \frac{1}{x} + 3$.

G **16**

Für den Inhalt der Grundfläche des Prismas gilt

$G_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot 3\,cm \cdot 2\,cm = 3\,cm^2$.

Für das Volumen V des zusammengesetzten Körpers gilt

$V = V_{Kegel} + V_{Prisma}$

$= \frac{1}{3}\pi \cdot r_{Kegel}^2 \cdot h_{Kegel} + G_{Prisma} \cdot h_{Prisma}$

$= \frac{1}{3}\pi \cdot 9\,cm^2 \cdot 8\,cm + 3\,cm^2 \cdot 7\,cm$

$= \pi \cdot 24\,cm^3 + 21\,cm^3 \approx 96{,}40\,cm^3$.

Die Grundfläche des Prismas ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $b = 3\,cm$ und der Höhe $h_b = 2\,cm$.

Für die Länge a eines Schenkels der Grundfläche des Prismas gilt $a = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h_b^2} = \sqrt{2{,}25\,cm^2 + 4\,cm^2} = \sqrt{6{,}25\,cm^2} = 2{,}5\,cm$.

Damit erhält man für den Mantelflächeninhalt des Prismas $M_{Prisma} = (3\,cm + 2{,}5\,cm + 2{,}5\,cm) \cdot 7\,cm = 56\,cm^2$.

Für den Mantelflächeninhalt des Kegels gilt $M_{Kegel} = \pi r s$ mit $s = \sqrt{r^2 + h_{Kegel}^2} = \sqrt{9\,cm^2 + 64\,cm^2} = \sqrt{73\,cm^2} \approx 8{,}5440\,cm$.

$M_{Kegel} = \pi r s \approx \pi \cdot 3\,cm \cdot 8{,}5440\,cm = \pi \cdot 25{,}6320\,cm^2$
$\approx 80{,}53\,cm^2$

Für den Oberflächeninhalt des Kegels gilt

$O_{Kegel} = \pi r^2 + M_{Kegel} \approx \pi \cdot 9\,cm^2 + \pi \cdot 25{,}6320\,cm^2$
$= \pi \cdot 34{,}6320\,cm^2 \approx 108{,}80\,cm^2$.

Für den Oberflächeninhalt O des zusammengesetzten Körpers gilt $O = O_{Kegel} - G_{Prisma} + M_{Prisma} + G_{Prisma} = O_{Kegel} + M_{Prisma}$
$\approx 108{,}80\,cm^2 + 56\,cm^2 = 164{,}80\,cm^2$.

Seite 38

Klausurtraining

1

a) Die Aussage ist falsch. Begründung: Es gilt $g'(0) \neq 0$.

b) Die Aussage ist wahr. Begründung: Der Graph von g' hat an der Stelle $x = 2$ einen Tiefpunkt und ist linksgekrümmt. Dementsprechend gilt $g''(2) = 0$ und $g'''(2) > 0$.

c) Die Aussage ist wahr. Begründung: Es gilt $g'(x) > 0$ für alle $x \in]-1; 2[$ und alle $x \in]2; 3[$. Damit ist g sowohl im Intervall $]-1; 2[$ als auch im Intervall $]2; 3[$ streng monoton zunehmend; für $x = 2$ ist $g'(x) = 0$, damit ist g im gesamten Intervall $[-1; 3]$ monoton zunehmend.

d) Die Aussage ist falsch. Begründung: Die Funktion g' weist im Intervall $[-2; 3]$ lediglich einen Vorzeichenwechsel von − zu +, aber keinen Vorzeichenwechsel von + zu − auf. Daher hat der Graph von g im Intervall $[-2; 3]$ einen Tiefpunkt, aber keinen Hochpunkt.

2

a) Ableitungen: $f'(x) = -2x + 6$; $f''(x) = -2$

Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$-2x + 6 = 0 \quad | -6$

$-2x = -6 \quad | :(-2)$

$x = 3$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen prüfen:

Es gilt $f''(3) = -2 < 0$, somit ist $x = 3$ eine Maximalstelle von f.

Aus $f(3) = -9 + 18 - 5 = 4$ folgt, dass $H(3|4)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist.

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $-2 = 0$

Da diese Gleichung keine Lösung hat, hat der Graph von f keine Wendepunkte.

b) Ableitungen: $f'(x) = 9x^2 + 9x = 9x(x + 1)$; $f''(x) = 18x + 9$; $f'''(x) = 18$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $9x(x + 1) = 0$

$x_1 = 0$ und $x_2 = -1$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_1 = 0$ prüfen:

Es gilt $f''(0) = 9 > 0$, somit ist $x_1 = 0$ eine Minimalstelle von f.

Aus $f(0) = 1{,}5$ folgt, dass $T(0|1{,}5)$ ein Tiefpunkt des Graphen von f ist.

Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_2 = -1$ prüfen:

Es gilt $f''(-1) = -9 < 0$, somit ist $x_2 = -1$ eine Maximalstelle von f.

Mit $f(-1) = -3 + 4{,}5 + 1{,}5 = 3$ folgt, dass $H(-1|3)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist.

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$18x + 9 = 0 \quad | -9$

$18x = -9 \quad | :18$

$x = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

Es gilt $f'''\left(-\frac{1}{2}\right) = 18 \neq 0$, somit ist $x_3 = -\frac{1}{2}$ eine Wendestelle von f.

Aus $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 4{,}5 \cdot \frac{1}{4} + 1{,}5 = -\frac{3}{8} + \frac{9}{8} + \frac{12}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$
$= 2{,}25$

folgt, dass $W(-0{,}5|2{,}25)$ ein Wendepunkt des Graphen von f ist.

c) Ableitungen: $f'(x) = \frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x - 3$; $f''(x) = \frac{6}{5}x + \frac{12}{5}$; $f'''(x) = \frac{6}{5}$

Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$\frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x - 3 = 0 \quad \left| : \left(\frac{3}{5}\right)\right.$

$x^2 + \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{3}x - 3 \cdot \frac{5}{3} = 0$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 + 5} = -2 \pm \sqrt{9}$

$x_1 = -2 + 3 = 1$ und $x_2 = -2 - 3 = -5$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_1 = 1$ prüfen:

Es gilt $f''(1) = \frac{6}{5} + \frac{12}{5} = \frac{18}{5} > 0$, somit ist $x_1 = 1$ eine Minimalstelle von f.

Aus $f(1) = \frac{1}{5} + \frac{6}{5} - 3 + 1 = \frac{7}{5} - 2 = -\frac{3}{5} = -0{,}6$ folgt, dass $T(1\,|\,-0{,}6)$ ein Tiefpunkt des Graphen von f ist.

Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_2 = -5$ prüfen:

Es gilt $f''(-5) = \frac{6}{5} \cdot (-5) + \frac{12}{5} = -\frac{30}{5} + \frac{12}{5} = -\frac{18}{5} < 0$, somit ist $x_2 = -5$ eine Maximalstelle von f.

Aus $f(-5) = \frac{1}{5} \cdot (-125) + \frac{6}{5} \cdot 25 + 15 + 1 = -25 + 30 + 15 + 1 = 21$ folgt, dass $H(-5\,|\,21)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist.

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$\frac{6}{5}x + \frac{12}{5} = 0 \quad \left| : \frac{6}{5}\right.$

$x + \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{6} = 0$

$x + 2 = 0 \quad | - 2$

$x = -2$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen prüfen:

Es gilt $f'''(-2) = \frac{6}{5} \neq 0$, somit ist $x_3 = -2$ eine Wendestelle von f.

Mit $f(-2) = \frac{1}{5} \cdot (-8) + \frac{6}{5} \cdot 4 + 6 + 1 = -\frac{8}{5} + \frac{24}{5} + \frac{35}{5} = \frac{51}{5} = 10{,}2$ folgt, dass $W(-2\,|\,10{,}2)$ ein Wendepunkt des Graphen von f ist.

3

a) $x^4 + 6x^2 - 7 = 0$ | Substitution $z = x^2$

$z^2 + 6z - 7 = 0$ | pq-Formel anwenden

$z_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9 + 7} = -3 \pm \sqrt{16}$

$z = -3 + 4 = 1$ oder

$z = -3 - 4 = -7$ | Rücksubstitution $x^2 = z$

$x^2 = 1$ oder $x^2 = -7$ | Wurzel ziehen, falls möglich

Die Nullstellen von f sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ | Substitution $z = x^2$

$z^2 - 5z + 4 = 0$ | pq-Formel anwenden

$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$

$z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$ oder

$z = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ | Rücksubstitution $x^2 = z$

$x^2 = 4$ oder $x^2 = 1$ | Wurzel ziehen, falls möglich

Die Nullstellen von f sind $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ und $x_4 = -1$.

c) $-2x^5 + 8x^3 - 6x = 0$ | ausklammern

$-2x(x^4 - 4x^2 + 3) = 0$

$x = 0$ oder $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ | Substitution $z = x^2$

$z^2 - 4z + 3 = 0$ | pq-Formel anwenden

$z_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm \sqrt{1}$

$z = 2 + 1 = 3$ oder

$z = 2 - 1 = 1$ | Rücksubstitution $x^2 = z$

$x^2 = 3$ oder $x^2 = 1$ | Wurzel ziehen, falls möglich

Die Nullstellen von f sind $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$, $x_4 = 1$ und $x_5 = -1$.

d) $\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3 = 0$ | $\cdot 27$

$x^4 - 18x^2 + 81 = 0$ | Substitution $z = x^2$

$z^2 - 18z + 81 = 0$ | binomische Formel anwenden

$(z - 9)^2 = 0$

$z = 9$ | Rücksubstitution $x^2 = z$

$x^2 = 9$ | Wurzel ziehen, falls möglich

Die Nullstellen von f sind $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$.

e) $x^2(x^4 + 0{,}5x^2 + 4) = 0$

$x = 0$ oder $x^4 + 0{,}5x^2 + 4 = 0$ | Substitution $z = x^2$

$z^2 + 0{,}5z + 4 = 0$ | pq-Formel anwenden

$z_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{16} - 4}_{< 0}}$

Da für z keine Lösungen existieren, ist $x = 0$ die einzige Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Die Nullstelle von f ist $x = 0$.

f) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ | Substitution $z = x^3$

$z^2 + 7z - 8 = 0$ | pq-Formel anwenden

$z_{1/2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 8} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{32}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$

$z = -\frac{7}{2} + \frac{9}{2} = \frac{2}{2} = 1$ oder

$z = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{16}{2} = -8$ | Rücksubstitution $x^2 = z$

$x^3 = 1$ oder $x^3 = -8$ | Wurzel ziehen, falls möglich

$x_1 = \sqrt[3]{1} = 1$ und $x_2 = \sqrt[3]{-8} = -2$

Die Nullstellen von f sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$.

4

a) Für den Flächeninhalt A des Rechtecks gilt die Formel $A = 2a \cdot b$.

Nebenbedingung: $b = -a^2 + 16$

Durch Einsetzen in die Formel erhält man

$A = 2a \cdot b = 2a \cdot (-a^2 + 16) = -2a^3 + 32a$.

Da der Graph von f die x-Achse an den Stellen $x = -4$ und $x = 4$ schneidet, muss $a < 4$ sein.

Zielfunktion: $A(a) = -2a^3 + 32a$ mit $D_A =]0; 4[$

b) Ableitungen: $A'(a) = -6a^2 + 32$; $A''(a) = -12a$
Notwendige Bedingung für Extremstellen: $-6a^2 + 32 = 0$
Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man die Lösungen $a_1 = \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 2{,}3$ und $a_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{3} \approx -2{,}3 \notin D_A$.
Hinreichende Bedingung für Extremstellen prüfen:
Es gilt $A''\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) = -16\sqrt{3} < 0$, somit ist $a_1 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ eine Maximalstelle von A.
Aus $A(0) = A(4) = 0$ folgt, dass $A\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{256}{9} \cdot \sqrt{3} \approx 49{,}3$ das absolute Maximum von A ist.
In dieser Situation gilt
$b = -\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 + 16 = -\frac{16}{3} + \frac{48}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3} \approx 10{,}7$.
Somit ist der Inhalt des Rechtecks mit ca. 49,3 cm² maximal, wenn die Seitenlängen etwa $2 \cdot 2{,}3\,\text{cm} = 4{,}6\,\text{cm}$ und 10,7 cm betragen. Die Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks sind in diesem Fall $A\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3} \mid 0\right)$, $B\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} \mid 0\right)$, $C\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} \mid 10\frac{2}{3}\right)$ und $D\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3} \mid 10\frac{2}{3}\right)$.

5

Für die Länge der markierten Linie gilt die Formel $b = 2h + \pi r$.
Nebenbedingung: $\frac{1}{2}\pi r^2 + rh = 45$
Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man $h = \frac{-\pi r^2 + 90}{2r}$.
Durch Einsetzen in die Formel erhält man
$b = 2 \cdot \left(\frac{-\pi r^2 + 90}{2r}\right) + \pi r = \frac{90}{r}$.
Der maximal mögliche Radius tritt offensichtlich dann auf, wenn die Höhe h null beträgt, also der Halbkreis die komplette Querschnittsfläche mit 45 m² einnimmt, also $\frac{1}{2}\pi r^2 = 45$ und damit $r = \sqrt{\frac{90}{\pi}} \approx 5{,}35$.
Zielfunktion: $b(r) = \frac{90}{r}$ mit $D_b = \left]0; \sqrt{\frac{90}{\pi}}\right]$
Da der Graph von b streng monoton abnehmend ist, wird das Minimum an der Stelle $r = \sqrt{\frac{90}{\pi}}$ angenommen und beträgt $b\left(\sqrt{\frac{90}{\pi}}\right) = \sqrt{90\pi} \approx 16{,}81$. In dieser Situation ist $h = 0$.
Bei einem Radius von ca. 5,35 m und einer Höhe von 0 m ist die Länge der gekennzeichneten Linie mit etwa 16,81 m minimal.

6

a) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$
Bedingungen: $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f(1) = 0$; $f(2) = 4$
Gleichungen aufstellen:
$f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d$, also $d = 0$
$f'(0) = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = c$, also $c = 0$
$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d$, also
$a + b + c + d = 0$
$f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 8a + 4b + 2c + d$, also
$8a + 4b + 2c + d = 4$

Einsetzen von $d = 0$ und $c = 0$ liefert das Gleichungssystem:

I	$a + b = 0$	$\mid \cdot(-4)$
II	$8a + 4b = 4$	
I_a	$-4a - 4b = 0$	
II	$8a + 4b = 4$	
I_a + II	$4a = 4$	$\mid : 4$
	$a = 1$	
$a = 1$ in I:	$1 + b = 0$	$\mid -1$
	$b = -1$	

Man erhält die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - x^2$.
Hinreichende Bedingungen für die Existenz des Hochpunkts prüfen:
Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 2x$; $f''(x) = 6x - 2$
Es gilt $f''(0) = -2 < 0$. Der Graph hat den Hochpunkt $T(0 \mid 0)$.

b) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$; $f'(x) = 3ax^2 + b$; $f''(x) = 6ax$
Bedingungen: $f(3) = 54$; $f'(3) = 0$
Gleichungen aufstellen:
$f(3) = a \cdot 3^3 + b \cdot 3 = 27a + 3b$, also $27a + 3b = 54$
$f'(3) = 3a \cdot 3^2 + b = 27a + b$, also $27a + b = 0$
Man erhält das Gleichungssystem:

I	$27a + 3b = 54$	$\mid \cdot(-1)$
II	$27a + b = 0$	
I_a	$-27a - 3b = -54$	
II	$27a + b = 0$	
I_a + II	$-2b = -54$	$\mid : (-2)$
	$b = 27$	
$b = 27$ in II:	$27a + 27 = 0$	$\mid -27$
	$27a = -27$	$\mid : (-27)$
	$a = -1$	

Man erhält die Funktionsgleichung $f(x) = -x^3 + 27x$.

7

a) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$
Bedingungen: $f(1) = -1$; $f''(1) = 0$; $f(0) = 1$; $f(3) = 1$
Gleichungen aufstellen:
$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d$,
also $a + b + c + d = -1$
$f''(1) = 6a \cdot 1 + 2b = 6a + 2b$, also $6a + 2b = 0$
$f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d$, also $d = 1$
$f(3) = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 27a + 9b + 3c + d$,
also $27a + 9b + 3c + d = 1$
Einsetzen von $d = 1$ liefert das Gleichungssystem:

I	$a +$	$b +$	$c + 1$	$=$	-1
II	$6a +$	$2b$		$=$	0
III	$27a +$	$9b +$	$3c + 1$	$=$	1

Mit einem MMS erhält man die Lösung $a = 1$, $b = -3$ und $c = 0$.
Es ergibt sich die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
Hinreichende Bedingungen für die Existenz des Wendepunkts prüfen:

Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$; $f'''(x) = -6$
Es gilt $f'''(1) = -6 \neq 0$. Der Graph hat den Wendepunkt $W(1|-1)$.

b) Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$; $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$
Bedingungen: $f(2) = -14$; $f'(2) = 0$; $f(1) = -5$
Gleichungen aufstellen:
$f(2) = a \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 + c = 16a + 4b + c$, also
$16a + 4b + c = -14$
$f'(2) = 4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2 = 32a + 4b$, also $32a + 4b = 0$
$f(1) = a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 + c = a + b + c$, also $a + b + c = -5$
Man erhält das Gleichungssystem:

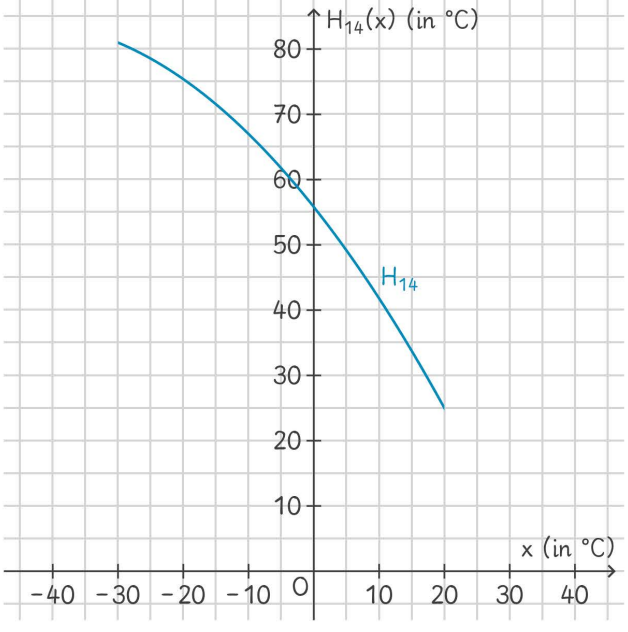
I $16a + 4b + c = -14$
II $32a + 4b = 0$
III $a + b + c = -5$

Mit einem MMS erhält man die Lösung $a = 1$, $b = -8$ und $c = 2$.
Es ergibt sich die Funktionsgleichung $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$.
Hinreichende Bedingung für die Existenz des Tiefpunkts prüfen:
Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 - 16x$; $f''(x) = 12x^2$
Es gilt $f''(2) = 12 \cdot 4 = 48 > 0$. Der Graph hat den Tiefpunkt $T(2|-14)$.

Seite 39

8

a)



b) Eine Erhöhung von s bewirkt einen Anstieg der Heizkesseltemperaturen, wenn die Außentemperatur unter 20 °C ist. Je niedriger die Außentemperatur ist, umso deutlicher ist dieser Anstieg.

c) Es gilt $H_{14}(0) = 55{,}8$ und $H_{14}(-15) = 71{,}55$.
Bei Werkseinstellung ist der Heizkessel bei einer Außentemperatur von 0 °C ca. 56 °C heiß und bei einer Außentemperatur von −15 °C ca. 72 °C heiß.

d) Die Gleichung $H_s(-10) = 60$ hat die Lösung $s = \frac{35}{3} \approx 11{,}7$.
Bei einer Einstellung von $s \approx 11{,}7$ ist der Heizkessel bei einer Außentemperatur von −10 °C ca. 60 °C heiß.

9

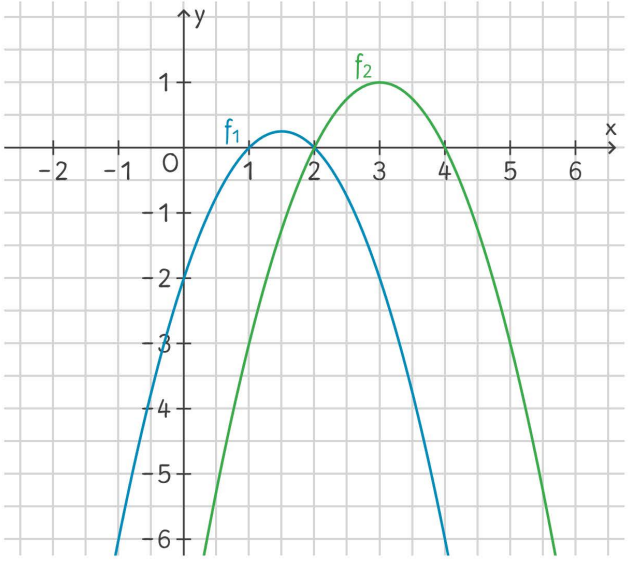
a) Es gilt $f_a(2) = -2^2 + 3a \cdot 2 - 6a + 4 = -4 + 6a - 6a + 4 = 0$.
Alle Graphen von f_a verlaufen durch den Punkt $P(2|0)$.

b) Notwendige Bedingung für Extremstellen:
$f_a'(x) = 0$
$x = \frac{3}{2}a$

Überprüfung der hinreichenden Bedingung für Extremstellen:
Es gilt $f_a''\left(\frac{3}{2}a\right) = -2 < 0$, somit liegt an der Stelle $x = \frac{3}{2}a$ ein Maximalstelle vor.

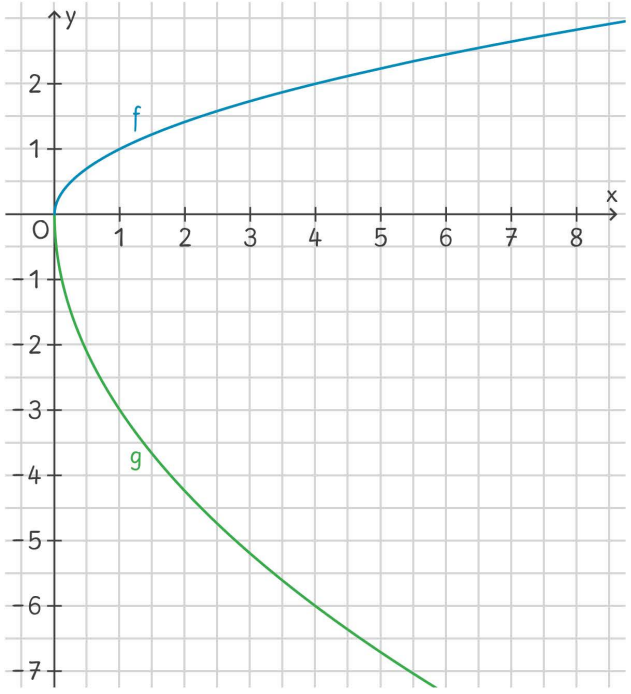
c) Aus Teilaufgabe b) und $f_a\left(\frac{3}{2}a\right) = \frac{9}{4}a^2 - 6a + 4$ folgt, dass $H\left(\frac{3}{2}a \,\middle|\, \frac{9}{4}a^2 - 6a + 4\right)$ der einzige Hochpunkt des Graphen von f_a ist.
Die Gleichung $\frac{3}{2}a = 0$ hat die Lösung $a = 0$. Daher hat nur der Graph von f_0 einen Hochpunkt, der auf der y-Achse liegt.
Die Gleichung $\frac{9}{4}a^2 - 6a + 4 = 0$ hat die Lösung $a = \frac{4}{3}$.
Daher hat nur der Graph von $f_{\frac{4}{3}}$ einen Hochpunkt, der auf der x-Achse liegt.

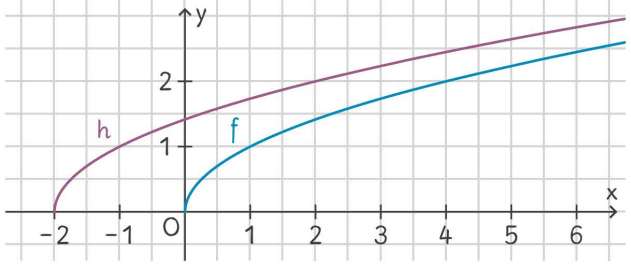
d)



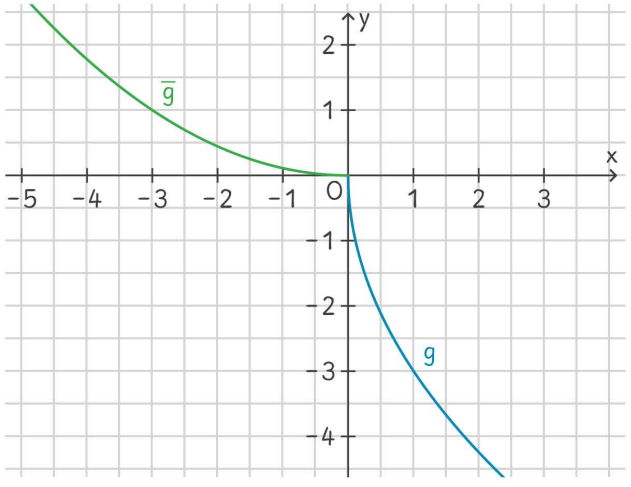
10

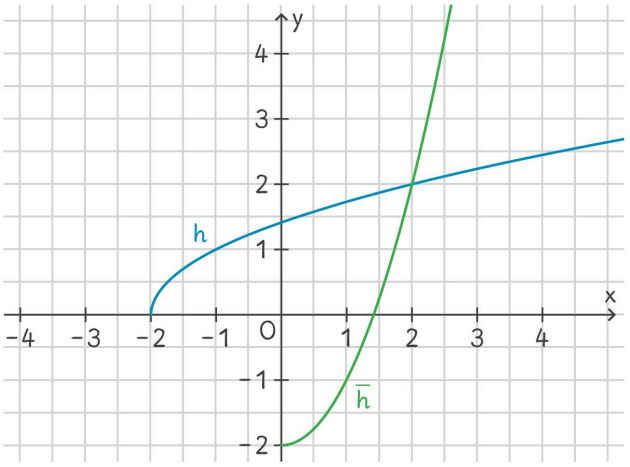
a) Der Graph von g geht aus dem Graphen von f hervor, indem man ihn mit dem Faktor 3 in y-Richtung streckt und an der x-Achse spiegelt.
Der Graph von h geht aus dem Graphen von f hervor, indem man ihn um 2 Einheiten nach links verschiebt.
Skizzen:





b)





c) Für g gilt $D_g = \mathbb{R}^{\geq 0}$ und $W_g = \mathbb{R}^{\leq 0}$. Daraus folgt $D_{\bar{g}} = W_g = \mathbb{R}^{\leq 0}$ und $W_{\bar{g}} = D_g = \mathbb{R}^{\geq 0}$.
Für h gilt $D_h = \mathbb{R}^{\geq -2}$ und $W_h = \mathbb{R}^{\geq 0}$. Daraus folgt $D_{\bar{h}} = W_h = \mathbb{R}^{\geq 0}$ und $W_{\bar{h}} = D_h = \mathbb{R}^{\geq -2}$.

11

a) Die Aussage ist wahr. Begründung: Es gilt
$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{4} + 2} - 3 = 2\sqrt{\frac{9}{4}} - 3 = 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = 3 - 3 = 0$.

b) Die Aussage ist falsch. Begründung:
Es gilt $f(7) = 2\sqrt{7 + 2} - 3 = 2\sqrt{9} - 3 = 2 \cdot 3 - 3 = 3$. Daher verläuft der Graph von f durch den Punkt $P(7|3)$ und nicht durch den Punkt $Q(7|1)$. Folglich kann der Graph von $\bar{f}$ nicht durch $A(1|7)$ verlaufen.

c) Die Aussage ist wahr. Begründung: Es gilt
$f(-1) = 2\sqrt{-1 + 2} - 3 = 2\sqrt{1} - 3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$ und damit auch $\bar{f}(-1) = -1$.

12

a) $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$ und $g'(x) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}$

b) Steigungen: $f'(1) = \frac{3}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $f'(2) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}06$;
$g'(1) = \frac{2}{1^2} = 2$; $g'(2) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Stelle	Steigungswinkel der Tangente	
	Graph von f	Graph von g
$x_1 = 1$	$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56{,}3°$	$\alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63{,}4°$
$x_2 = 2$	$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \approx 46{,}7°$	$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}6°$

13

a) $D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$
Ableitung: $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$
Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 &= 0 \quad |+1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} &= 1 \quad |\cdot\sqrt{x} \\ 1 &= \sqrt{x} \quad |(\,)^2 \\ 1 &= x \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen prüfen:

Es gilt: $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$ und

$f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

	$x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	−
Monotonie des Graphen von f	↗	→	↘

Aus $f(1) = 2\sqrt{1} - 1 = 2 - 1 = 1$ folgt, dass $H(1|1)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist.

b) $D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$

Ableitung: $f'(x) = 3x^2 + 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $\underbrace{3x^2}_{>0} + \underbrace{\frac{3}{\sqrt{x}}}_{>0} = 0$

Da beide Summanden positiv sind, kann die Summe nicht 0 sein. Es kann keine Extremstellen geben.

c) $D_f = \mathbb{R}^{\neq 0}$

Ableitung: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad | + \frac{1}{x^2}$

$1 = \frac{1}{x^2} \quad | \cdot x^2$

$x^2 = 1 \quad |$ Wurzel ziehen

$x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_1 = 1$ prüfen:

Es gilt $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 - 4 = -3$ und

$f'(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	−	0	+
Monotonie des Graphen von f	↘	→	↗

Aus $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$ folgt, dass $T(1|2)$ ein Tiefpunkt des Graphen von f ist.

Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_2 = -1$ prüfen:

Es gilt $f'(-2) = 1 - \frac{1}{(-2)^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ und

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 - 4 = -3$.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$
$f'(x)$	+	0	−
Monotonie des Graphen von f	↗	→	↘

Aus $f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$ folgt, dass $H(-1|-2)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist.

d) $D_f = \mathbb{R}^{\neq 0}$

Es gilt $f(x) = -2x + \frac{2}{3} \cdot x^{-3}$, also

$f'(x) = -2 + \frac{2}{3} \cdot (-3x^{-4}) = -2 - \frac{2}{x^4}$.

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $-2 - \frac{2}{x^4} = 0$

Da $x^4 > 0$ ist, gilt $-2 - \frac{2}{x^4} < 0$, und die Gleichung hat keine Lösung. Es kann also keine Extremstellen geben.

Seite 40

14

a) $f_a\left(\frac{3}{2}\right) = -2a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 20 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)$

$= -2a \cdot \frac{27}{8} + 3a \cdot \frac{9}{4} + 30 = -\frac{27}{4}a + \frac{27}{4}a + 30 = 30$

Daher verlaufen alle Graphen von f_a durch den Punkt $P\left(\frac{3}{2}\middle|30\right)$.

b) Ableitungen: $f_a'(t) = -6at^2 + 6at + 20$; $f_a''(t) = -12at + 6a$; $f_a'''(t) = -12a$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$-12at + 6a = 0 \quad | - 6a$

$-12at = -6a \quad | : (-12a)$ [möglich, da $a \neq 0$]

$t = \frac{-6a}{-12a} = \frac{1}{2}$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen prüfen:

Es gilt $f_a'''\left(\frac{1}{2}\right) = -12a \neq 0$ (da $a > 0$), somit ist $t = \frac{1}{2}$ eine Wendestelle von f_a.

c) Anhand des Summanden $-2at^3$ kann man erkennen, dass $-2a = -42$ gelten muss, also $a = 21$.

Es gilt $f_{21}(t) = -2 \cdot 21t^3 + 3 \cdot 21t^2 + 20t$

$= -42t^3 + 63t^2 + 20t = f(t)$.

d) Der Wendepunkt des Graphen von f ist $W\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{41}{2}\right)$.

Am Wendepunkt ist die Steigung des Graphen von f maximal. Im Sachkontext heißt das, dass der Radprofi eine halbe Stunde nach dem Start des Rennens mit der höchsten Geschwindigkeit fährt.

e) Mit $f'(t) = -126t^2 + 126t + 20$ erhält man $f'(0{,}25) = 43{,}625$ und $f'(0{,}5) = 51{,}5$.

Eine Viertelstunde nach Beginn des Rennens hat der Radprofi eine Geschwindigkeit von ca. 43,6 $\frac{km}{h}$, eine halbe Stunde nach Beginn des Rennens beträgt sie 51,5 $\frac{km}{h}$.

f) Die unterschiedlichen Geschwindigkeiten im Laufe eines Rennens können beispielsweise durch mögliche Steigungen auf der Strecke oder durch die Taktik des Radprofis erklärt werden.

g) Der Graph von f hat bei $t \approx 1{,}14$ einen Hochpunkt. Würde man f über diesen Zeitpunkt hinaus als Modellfunktion verwenden, hieße das im Sachkontext, dass die zurückgelegte Strecke mit der Zeit wieder abnimmt. Das ergibt keinen Sinn.
Wegen $f(1) = 41$ hat der Radprofi nach einer Stunde 41 km zurückgelegt, seine Durchschnittsgeschwindigkeit liegt innerhalb der ersten Stunde des Rennens also bei $41\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Verwendet man g als Modellfunktion zur Beschreibung der zurückgelegten Strecke, geht man von einer konstanten Geschwindigkeit von $41\frac{\text{km}}{\text{h}}$ im gesamten Rennverlauf aus.
Die geringen Schwankungen in der Steigung des Graphen von f im Intervall $[0; 1]$ zeigen, dass die Geschwindigkeit des Radprofis tatsächlich ungefähr konstant ist. Die Verwendung der Modellfunktion g kann also eine sinnvolle Prognose über den Zeitraum der ersten Stunde hinaus liefern. Es kann jedoch sein, dass der tatsächliche Rennverlauf durch einen Zwischenfall wie einen Sturz oder einen Defekt am Fahrrad, aber auch durch starke Steigungen auf der Rennstrecke oder einen Zwischen- oder Endspurt des Radprofis deutlich von dieser Prognose abweicht.

15

a) Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$; $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$; $f''(x) = 12ax^2 + 2b$
Bedingungen: $f(0) = 0$; $f(2) = -20$; $f''(2) = 0$
Gleichungen aufstellen:
$f(0) = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c = c$, also $c = 0$
$f(2) = a \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 + c = 16a + 4b + c$, also
$16a + 4b + c = -20$
$f''(2) = 12a \cdot 2^2 + 2b = 48a + 2b$, also $48a + 2b = 0$
Einsetzen von $c = 0$ liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 16a & + 4b & = -20 \\ \text{II} & 48a & + 2b & = 0 \end{array}$$

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man die Lösung $a = \frac{1}{4}$ und $b = -6$.
Es ergibt sich die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2$.
Mit einer Rechnung oder einem MMS prüft man, dass $W(2\,|\,-20)$ ein Wendepunkt des Graphen von f ist.

b) Die Nullstellen von f sind die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^4 - 6x^2 = 0$.
Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man $x_1 = -2\sqrt{6}$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2\sqrt{6}$.

c) Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OQ} \cdot \overline{QP}$, wobei $\overline{OQ} = x$
Der Abbildung kann man entnehmen, dass der Graph von f im Intervall $]0; 2\sqrt{6}[$ unterhalb der x-Achse verläuft.
Daher gilt die zweite Nebenbedingung $\overline{QP} = -f(x)$.
Einsetzen in die Formel liefert
$A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (-f(x)) = -\frac{1}{2}x \cdot f(x) = -\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x^4 - 6x^2\right) = -\frac{1}{8}x^5 + 3x^3$.
Zielfunktion: $A(x) = -\frac{1}{8}x^5 + 3x^3$ mit $D_A =]0; 2\sqrt{6}[$
Mit einem MMS erhält man in $[0; 2\sqrt{6}]$ das Maximum $A \approx 65{,}57$ an der Stelle $x \approx 3{,}79$.
Daher wird der Flächeninhalt für $x \approx 3{,}79$ maximal.

d) Für die Tangente im Punkt $B(x_b\,|\,f(x_b))$ gilt $y = f'(x_b) \cdot x + n_b$, wobei n_b der y-Achsenabschnitt der Tangente ist.
Durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes $B(x_b\,|\,f(x_b))$ erhält man:

$$\begin{array}{rcl} f(x_b) & = & f'(x_b) \cdot x_b + n_b \quad \big| - f'(x_b) \cdot x_b \\ -f'(x_b) \cdot x_b + f(x_b) & = & n_b \end{array}$$

Gesucht sind daher alle Werte von x_b, für die $n_b = 0$ ist.
Man sucht also die Lösung der Gleichung $-f'(x) \cdot x + f(x) = 0$.
Durch Einsetzen der entsprechenden Funktionsterme für $f(x)$ und $f'(x)$ erhält man die Gleichung
$(-x^3 + 12x) \cdot x + \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 = 0$ oder vereinfacht
$x^2 \cdot \left(\frac{3}{4}x^2 + 6\right) = 0$. Als Lösungen der Gleichung $-f'(x_b) \cdot x_b + f(x_b) = 0$ erhält man mit einer Rechnung oder einem MMS $x_1 = -2\sqrt{2}$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2\sqrt{2}$.
Somit haben die Tangenten an den Stellen $x_1 = -2\sqrt{2} \approx -2{,}83$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ eine Gleichung der Form $g_m(x) = mx$.
Durch Plotten des Graphen von f und Eintragen der Punkte $B_1(x_1\,|\,f(x_1))$, $B_2(x_2\,|\,f(x_2))$ und $B_3(x_3\,|\,f(x_3))$ sowie der zugehörigen Tangenten an den Graphen von f erhält man deren Steigungen $m_1 \approx 11{,}3$, $m_2 = 0$ und $m_3 \approx -11{,}3$.

16

a) (1) Formel für den Flächeninhalt der rechteckigen Grundfläche: $A = a \cdot b$, wobei b die Länge der im Modell parallel zur y-Achse verlaufenden Rechteckseiten ist.
Die Gerade durch die Punkte $(0\,|\,60)$ und $(80\,|\,0)$ hat die Gleichung $y = -\frac{3}{4}x + 60$.
Daher gilt die Nebenbedingung $b = -\frac{3}{4}a + 60$.
Durch Einsetzen in die Formel erhält man den gefragten Funktionsterm:
$A = a \cdot \left(-\frac{3}{4}a + 60\right) = -\frac{3}{4}a^2 + 60a = -0{,}75a^2 + 60a$.
(2) Der Zeichnung entnimmt man, dass $a \in]0; 80[$ sein muss.
Die Funktion A mit $A(a) = -0{,}75a^2 + 60a$ hat im Intervall $]0; 80[$ das globale Maximum $A = 1200$ an der Stelle $a = 40$.
Der Grundflächeninhalt der Lagerhalle ist mit $1200\,\text{m}^2$ maximal, wenn die Seite a 40 m lang ist.
Das dreieckige Grundstück hat den Flächeninhalt $A_D = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 60 = 2400\,[\text{m}^2]$. Dementsprechend würde die Lagerhalle in diesem Fall 50 % der Grundstücksfläche einnehmen.

b) (1) c = Länge der im Modell parallel zur Geraden g verlaufenden Rechteckseite
d = Länge der im Modell senkrecht zur Geraden g verlaufenden Rechteckseite
Formel für den Flächeninhalt der rechteckigen Grundfläche:
$A = c \cdot d$
Nebenbedingungen: $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$ und
$\cos(\beta) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{d}{80 - a}$
Durch Auflösen der Gleichungen nach c bzw. d erhält man
$c = \frac{a}{\cos(\alpha)}$ bzw. $d = \cos(\beta) \cdot (80 - a)$.
Durch Einsetzen in die Formel erhält man den gefragten Funktionsterm:
$A = \frac{a}{\cos(\alpha)} \cdot \cos(\beta) \cdot (80 - a) = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \cdot a(80 - a)$
(2) Der Winkel β ist der Steigungswinkel einer Geraden, die senkrecht zu g verläuft.
Für deren Steigung gilt daher $m = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$.
Für die Größe von β erhält man $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}13°$.
Damit ergibt sich $\alpha = 180° - 90° - \beta \approx 90° - 53{,}13° = 36{,}87°$.
(3) Durch Einsetzen der Näherungswerte $\alpha \approx 36{,}87°$ und $\beta = 53{,}13°$ erhält man die Zielfunktion A mit
$A(a) = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \cdot a(80 - a) \approx \frac{\cos(53{,}13)}{\cos(36{,}87)} \cdot a(80 - a)$
$\approx \frac{0{,}6}{0{,}8} \cdot (80a - a^2) = 60a - \frac{3}{4}a^2$
mit $D_A =]0; 80[$.
Die Funktion A hat im Intervall $]0; 80[$ das globale Maximum $A = 1200$ an der Stelle $a = 40$.
Also ist der Grundflächeninhalt der Lagerhalle auch in diesem Fall mit $1200\,m^2$ maximal, wenn a 40 m lang ist.
In dieser Situation betragen die Seitenlängen der Grundfläche $c = \frac{a}{\cos(\alpha)} \approx \frac{40}{\cos(36{,}87°)} \approx 50\,[m]$ bzw.
$d = \cos(\beta) \cdot (80 - a) \approx \cos(53{,}13°) \cdot (80 - 40) \approx 24\,[m]$.

Seite 41

17

a) Der Graph von f verläuft durch den Punkt $(0|4)$, daher muss $4 = f(0) = \sqrt{b - a \cdot 0^2} = \sqrt{b}$, also $b = 16$ gelten.
Außerdem verläuft der Graph durch den Punkt $(2|3)$.
Dementsprechend gilt $3 = f(2) = \sqrt{16 - a \cdot 2^2} = \sqrt{16 - 4a}$.
Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man die Lösung $a = \frac{7}{4}$ dieser Gleichung.

b) Mit $f'(-2) = \frac{7}{6}$ erhält man für die Größe des Steigungswinkels $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{7}{6}\right) \approx 49{,}40°$.

c) Im Modell würde die Tür von der Stelle $x_1 = -1{,}3$ bis zur Stelle $x_2 = 1{,}3$ reichen.
Dementsprechend dürfte sie $f(-1{,}3) = f(1{,}3) \approx 3{,}61\,[m]$ hoch sein.

18

a) Nullstellen von f_a: $\frac{1}{6}x^3 - \frac{a^2}{4}x^2 = 0$ | ausklammern
$\frac{1}{6}x^2\left(x - \frac{3a^2}{2}\right) = 0$
$x = 0$ oder $x = \frac{3a^2}{2}$
Nullstellen von g_a: $-\frac{1}{a}x^2 + \frac{3a}{2}x = 0$ | ausklammern
$-\frac{1}{a}x\left(x - \frac{3a^2}{2}\right) = 0$
$x = 0$ oder $x = \frac{3a^2}{2}$
Die Nullstellen von f_a und g_a sind $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{3a^2}{2}$ und stimmen damit überein.

b) Ableitungen: $f_a'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{a^2}{2}x$; $f_a''(x) = x - \frac{a^2}{2}$
Notwendige Bedingung für Extremstellen:
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{a^2}{2}x = 0$ | ausklammern
$\frac{1}{2}x(x - a^2) = 0$
$x_1 = 0$ und $x_2 = a^2$
Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_1 = 0$ prüfen:
Es gilt $f_a''(0) = 0 - \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{2} < 0$, somit ist $x_1 = 0$ eine Maximalstelle von f_a und der Graph von f_a hat einen Hochpunkt.
Hinreichende Bedingung für Extremstellen für $x_2 = a^2$ prüfen:
Es gilt $f_a''(a^2) = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} > 0$, somit ist $x_2 = a^2$ eine Minimalstelle von f_a und der Graph von f_a hat einen Tiefpunkt.

c) Aus Teilaufgabe b) und
$f_a(a^2) = \frac{1}{6}a^6 - \frac{a^2}{4} \cdot a^4 = \frac{2}{12}a^6 - \frac{3}{12}a^6 = -\frac{1}{12}a^6$ folgt, dass
$T_a\left(a^2 \middle| -\frac{1}{12}a^6\right)$ ein Tiefpunkt des Graphen von f_a ist.
Für alle $a > 0$ gilt $h(a^2) = -\frac{1}{12}(a^2)^3 = -\frac{1}{12}a^6$, also liegen alle Tiefpunkte $T_a\left(a^2 \middle| -\frac{1}{12}a^6\right)$ auf dem Graphen von h.

d) Zunächst müssen die Hochpunkte der Graphen von g_a ermittelt werden.
Ableitungen: $g_a'(x) = -\frac{2}{a}x + \frac{3a}{2}$; $g_a''(x) = -\frac{2}{a}$
Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$$-\frac{2}{a}x + \frac{3a}{2} = 0 \quad \left| -\frac{3a}{2} \right.$$
$$-\frac{2}{a}x = -\frac{3a}{2} \quad \left| : \left(-\frac{2}{a}\right) \right.$$
$$x = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a^2}{4}$$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen prüfen:
Es gilt $g_a''\left(\frac{3a^2}{4}\right) = -\frac{2}{a} < 0$, somit ist $x = \frac{3a^2}{4}$ eine Maximalstelle von f_a.

Mit $g_a\left(\frac{3a^2}{4}\right) = -\frac{1}{a}\left(\frac{3a^2}{4}\right)^2 + \frac{3a}{2} \cdot \frac{3a^2}{4} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{9a^4}{16} + \frac{9a^3}{8}$
$= -\frac{9a^3}{16} + \frac{18a^3}{16} = \frac{9a^3}{16}$
folgt, dass $H_a\left(\frac{3}{4}a^2 \middle| \frac{9}{16}a^3\right)$ ein Hochpunkt des Graphen von g_a ist.

$$\frac{9}{16}a^3 = 4{,}5 \quad \left| \cdot \frac{16}{9} \right.$$
$$a^3 = \frac{4{,}5 \cdot 16}{9} = \frac{16}{2} = 8 \quad \left| ( )^{\frac{1}{3}} \right.$$
$$a = 2$$

Die Funktion h mit $h(a) = \frac{9}{16}a^3$ ist für $a > 0$ streng monoton zunehmend, denn es gilt $h'(a) = \frac{27}{16}a^2 > 0$.
Damit ergibt sich $\frac{9}{16}a^3 > 4{,}5$ für alle $a > 2$.
Für alle $a > 2$ liegt der Hochpunkt von g_a oberhalb der Geraden g.

19

a) Ansatz: $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Bedingungen: $g(0) = 2$; $g'(0) = 0$; $g(2) = 0$; $g'(2) = -1$
Gleichungen aufstellen:
$g(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d$, also $d = 2$
$g'(0) = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = c$, also $c = 0$.
$g(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 8a + 4b + 2c + d$, also
$8a + 4b + 2c + d = 0$
$g'(2) = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 12a + 4b + c$, also
$12a + 4b + c = -1$
Einsetzen von $d = 2$ und $c = 0$ liefert das Gleichungssystem:
I $\quad 8a + 4b + 2 = 0$
II $\quad 12a + 4b = -1$
Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man die Lösung $a = \frac{1}{4}$ und $b = -1$.
Man erhält die Funktionsgleichung $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 2$.
Im Sachkontext wird die Funktion im Definitionsbereich $D_g = [0; 2]$ betrachtet.

b) Ableitungen: $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x$; $g''(x) = \frac{3}{2}x - 2$; $g'''(x) = \frac{3}{2}$
Notwendige Bedingung für Extremstellen von g':

$$\frac{3}{2}x - 2 = 0 \quad | + 2$$
$$\frac{3}{2}x = 2 \quad \left| : \frac{3}{2} \right.$$
$$x = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen von g' prüfen:
Es gilt $g'''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2} > 0$, somit ist $x = \frac{4}{3}$ eine Minimalstelle von g'.
Mit $g'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$, $g'(0) = 0$ und $g'(2) = -1$ folgt, dass das globale Minimum von g' im Intervall $[0; 2]$ an der Stelle $x = \frac{4}{3}$ liegt und $-\frac{4}{3}$ beträgt. Im Sachkontext bedeutet das, dass die Achterbahntrasse an der entsprechenden Stelle mit einer Steigung von $m = -\frac{4}{3}$ am steilsten abwärts geht.

20

a) Im Punkt R ändert sich das Krümmungsverhalten des Papierstreifens. Links von R ist der Papierstreifen linksgekrümmt, rechts von R wird er durch das Gewicht des Streifens nach unten gedrückt und ist rechtsgekrümmt.

b) Die Funktion f muss mindestens vom Grad 4 sein, denn ihr Graph hat einen Hochpunkt in L, einen Tiefpunkt zwischen L und R und einen Hochpunkt rechts von R. Dass der Graph ohne weitere Extrempunkte rechts von R gegen $+\infty$ strebt, ist aufgrund der dort vorhandenen Rechtskrümmung ausgeschlossen.

c) Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$;
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$; $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
Bedingungen: $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f(10) = -1{,}5$; $f(20) = 0$; $f''(20) = 0$
Gleichungen aufstellen:
$f(0) = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = e$, also $e = 0$
$f'(0) = 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d$, also $d = 0$
$f(10) = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$
$= 10\,000a + 1000b + 100c + 10d + e$,
also $10\,000a + 1000b + 100c + 10d + e = -1{,}5$
$f(20) = a \cdot 20^4 + b \cdot 20^3 + c \cdot 20^2 + d \cdot 20 + e$
$= 160\,000a + 8000b + 400c + 20d + e$,
also $160\,000a + 8000b + 400c + 20d + e = 0$
$f''(20) = 12a \cdot 20^2 + 6b \cdot 20 + 2c = 4800a + 120b + 2c$,
also $4800a + 120b + 2c = 0$
Einsetzen von $e = 0$ und $d = 0$ liefert das Gleichungssystem:
I $\quad 10\,000a + 1000b + 100c = -1{,}5$
II $\quad 160\,000a + 8000b + 400c = 0$
III $\quad 4800a + 120b + 2c = 0$
Mit einem MMS erhält man die Lösung $a = -0{,}000\,075$, $b = 0{,}003\,75$ und $c = -0{,}045$.
Es ergibt sich die Funktionsgleichung
$f(x) = -0{,}000\,075x^4 + 0{,}003\,75x^3 - 0{,}045x^2$.
Durch Plotten der Funktion erkennt man, dass der Graph tatsächlich den gefragten Tiefpunkt und den gefragten Wendepunkt hat.

d) Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS ermittelt man, dass der Graph von f zwischen den Punkten L und R etwa den Tiefpunkt $T(11{,}57\,|\,-1{,}56)$ hat.
Somit hängt der Papierstreifen laut Modell maximal etwa 1,56 cm durch.

II Integralrechnung

Seite 49

Check-in

1

a) $\frac{s(2)-s(0)}{2-0} = \frac{5\cdot 2^2 - 5\cdot 0^2}{2} = \frac{20}{2} = 10$

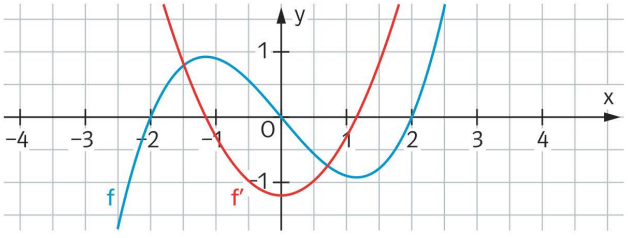
Die Durchschnittsgeschwindigkeit innerhalb der ersten zwei Sekunden beträgt $10\,\frac{m}{s}$.

b) $f'(x) = 10t$; $f'(2) = 10\cdot 2 = 20$

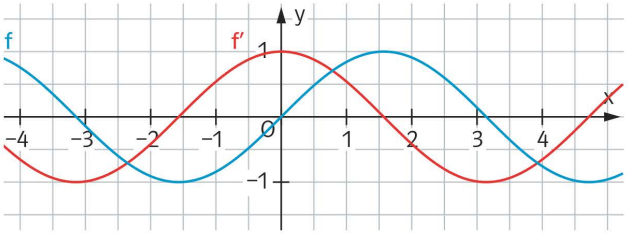
Die momentane Geschwindigkeit nach zwei Sekunden beträgt $20\,\frac{m}{s}$.

2

a)



b)



3

a) Die Aussage ist falsch. Begründung: Die Ableitung ändert ihr Vorzeichen an der Stelle $x = 0$ von − zu +. Daher hat der Graph von f an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt.

b) Die Aussage ist falsch. Begründung: Die Ableitung ändert ihr Vorzeichen im abgebildeten Bereich zweimal von + zu −. Daher hat der Graph von f im abgebildeten Bereich zwei Hochpunkte.

c) Die Aussage ist wahr. Begründung: Der Graph von f' hat zwei Extrempunkte. An den beiden Stellen, an denen der Graph von f' Extrempunkte hat, liegen die Wendestellen von f.

4

a) (1) $x^2 + 5x + 4 = 0$

$(x+4)(x+1) = 0$

Nullstellen: $x_1 = -4$ und $x_2 = -1$

(2) $2x^2 - 8x + 6 = 0$

$2\cdot(x^2 - 4x + 3) = 0$

$2\cdot(x-1)(x-3) = 0$

Nullstellen: $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$

(3) $-\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 2x = 0$

$-\frac{1}{2}x\cdot(x^2 - 4x + 4) = 0$

$-\frac{1}{2}x\cdot(x-2)^2 = 0$

Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ (doppelte Nullstelle)

b) (1) $x^2 - 2x + 2 = x \;|-x$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

$x_1 = 1$ und $x_2 = 2$

$f(1) = 1$; $f(2) = 2$

Die Graphen schneiden sich in den Punkten $S_1(1\,|\,1)$ und $S_2(2\,|\,2)$.

(2) $x^3 - x = -x^2 + 5x \;|+x^2 - 5x$

$x^3 + x^2 - 6x = 0$

$x\cdot(x^2 + x - 6) = 0$

$x(x-2)(x+3) = 0$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$

$f(0) = 0$; $f(2) = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$;

$f(-3) = (-3)^3 - (-3) = -27 + 3 = -24$

Die Graphen schneiden sich in den Punkten $S_1(0\,|\,0)$, $S_2(2\,|\,6)$ und $S_3(-3\,|\,-24)$.

5

a) $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2$

b) $f'(x) = 4\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$

Seite 54

6

a) Die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse lässt sich in ein Trapez und ein Dreieck einteilen. Für den Flächeninhalt gilt: $A = \frac{6+8}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4 = 14 + 12 = 26$

Am Ende des Füllprozesses sind $36\,m^3$ Flüssigkeit im Tank.

b) $36 : 3 = 12$

Es dauert 12 Minuten bis der Tank leer ist.

Seite 55

11

a) Die Aussage ist falsch. Begründung: Die Höhenveränderung beträgt zu Beginn und am Ende des Zeitraums $0\,\frac{m}{s}$. In der dazwischenliegenden Zeit ist sie stets positiv. Der Aufzug ist nach 25 Sekunden höher als zu Beginn.

b) Die Aussage ist falsch. Begründung: Die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse kann in zwei Dreiecke und ein Quadrat eingeteilt werden. Für den Flächeninhalt gilt:

$A = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5 + 5\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5 = 25 + 25 + 25 = 75$

Der Aufzug erreicht eine maximale Höhe von 75 Metern.

G **13**

a) Für das Guthaben nach t Jahren gilt $G(t) = 10\,000\cdot 1{,}025^t$.
$G(5) = 10\,000\cdot 1{,}025^5 \approx 11\,314{,}08$
Das Guthaben nach 5 Jahren beträgt 11 314,08 €.

b) Frieda hat nicht recht.
Mit $G_{NEU}(t) = 10\,000\cdot 1{,}05^t$ erhält man
$G_{NEU}(5) = 10\,000\cdot 1{,}05^5 \approx 12\,762{,}82$.
Bei einem Zinssatz von 5 % erhält man 2762,82 € Zinsen.
Bei 2,5 % sind es 1314,08 €, somit berechnet man $\frac{2762{,}82}{1314{,}08} \approx 2{,}1$.
Man erhält somit mehr als das Doppelte an Zinsen.

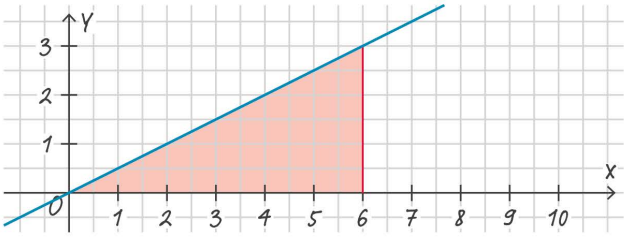
Seite 59

6

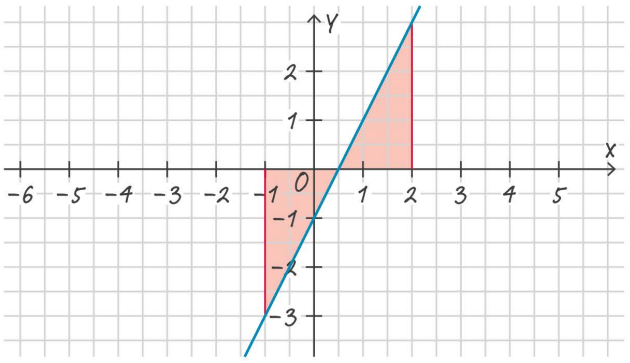
$A_1: \int_{-2}^{0} g(x)\,dx$ $\quad A_2: \int_{0}^{2} g(x)\,dx$ $\quad A_3: \int_{2}^{2{,}5} g(x)\,dx$

7

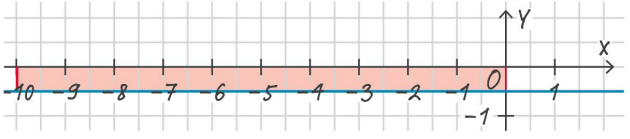
a) $\int_0^6 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3 = 9$



b) $\int_{-1}^{2} (2x - 1)\,dx = 0$



c) $\int_{-10}^{0} -0{,}5\,dx = -(0{,}5\cdot 10) = -5$



Seite 61

19

a) Länge des Weges: $\int_0^{12} v(t)\,dt \approx 36{,}6$ (ca. 18,3 Kästchen, 1 Kästchen entspricht 2 m).
Das Fahrzeug legt in den ersten 12 Sekunden ca. 36,6 m zurück.

b) 14 m entsprechen 7 Kästchen. Zwischen $t = 4$ und $t = 8$ liegen ca. 7 Kästchen zwischen dem Graphen und der x-Achse.
Im Zeitraum von 4 bis 8 Sekunden legt das Fahrzeug ca. 14 m zurück.

G **23**

Die weitere Entwicklung des Werts soll mit der Funktion f mit $f(t) = 7000\cdot 0{,}94^t$ modelliert werden.

a) $f(5) = 7000\cdot 0{,}94^5 \approx 5137{,}33$
Man geht aufgrund der Modellierung davon aus, dass der Wert des Autos in 5 Jahren ca. 5140 € beträgt.

b) Als Lösung für die Gleichung $7000\cdot 0{,}94^t = 2000$ erhält man $t \approx 20{,}25$.
Bei Zugrundelegung dieses Modells würde der Wert des Autos nach etwas mehr als 20 Jahren unter 2000 € sinken.

Seite 65

7

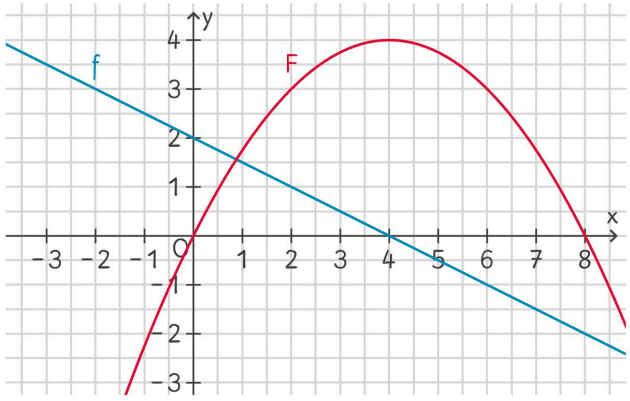
a) $F'(x) = 0{,}4x^3 = \frac{2}{5}x^3 = h(x)$; F ist eine Stammfunktion von h.

$G'(x) = \frac{8}{20}x^3 = \frac{2}{5}x^3 = h(x)$; G ist eine Stammfunktion von h.

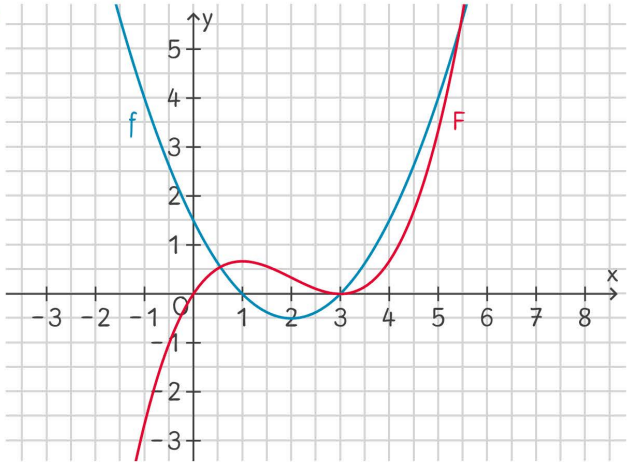
b) $\int_0^{10} \frac{2}{5}x^3\,dx = \left[\frac{2}{20}x^4\right]_0^{10} = \left[\frac{1}{10}x^4\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\cdot 10^4 - 0 = 10^3 = 1000$

8

a)



b)



Seite 67

15

$h(a) = 0$ und $h(c) = 0$, da der Graph von h die x-Achse an diesen Stellen berührt bzw. schneidet. $h(b) > 0$, da der Graph an dieser Stelle oberhalb der x-Achse liegt.

$h'(a) = 0$ und $h'(b) = 0$, da der Graph von h an diesen Stellen Extremstellen hat.

$h'(c) < 0$, da der Graph von h an dieser Stelle monoton fällt.

$H(a) > 0$, da laut Aufgabenstellung $H(a) = 5$ gilt.

Es gilt $\int_a^b h(x)\,dx = H(b) - H(a) = H(b) - 5$ und

$\int_a^c h(x)\,dx = H(c) - H(a) = H(c) - 5$.

Da die zugehörigen Flächen oberhalb der x-Achse liegen, müssen die Integrale $\int_a^b h(x)\,dx$ und $\int_a^c h(x)\,dx$ positiv sein.

Daher sind $H(b) > 5$ und $H(c) > 5$ und somit positiv.

G 18

a) $x = \log_3(20) \approx 2{,}73$

b) $x = \log_4\left(\frac{11}{2}\right) \approx 1{,}23$

c) $x = \log_{0{,}5}(5) \approx -2{,}32$

d) $x = \log_2\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0{,}58$

Seite 70

6

a) $F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2$

b) $F(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{3}x^3$

c) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$

d) $F(x) = 7x$

7

a) $\int_1^3 (0{,}5x + 2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + 2x\right]_1^3 = \frac{1}{4}\cdot 3^2 + 2\cdot 3 - \left(\frac{1}{4}\cdot 1^2 + 2\cdot 1\right) = 6$;

$A = 6\,FE$

b) $\int_1^2 (-x^2 + 0{,}5x + 3)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x\right]_1^2$

$= -\frac{1}{3}\cdot 2^3 + \frac{1}{4}\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - \left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right) = \frac{17}{12}$; $A = \frac{17}{12}\,FE$

c) $\int_{-1}^0 (0{,}5x^2 - x + 1)\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^0$

$= 0 - \left(\frac{1}{6}\cdot(-1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 - 1\right) = \frac{5}{3}$; $A = \frac{5}{3}\,FE$

Seite 72

17

a) $\int_0^{10} 0{,}1t^2\,dt = \int_0^{10} \frac{1}{10}t^2\,dt = \left[\frac{1}{30}t^3\right]_0^{10} = \frac{1}{30}\cdot 10^3 - \frac{1}{30}\cdot 0^3 = \frac{1000}{30} = \frac{100}{3}$

Die Flüssigkeitsmenge in dem Gefäß erhöht sich im Zeitraum von 0 bis 10 Minuten um etwa $33{,}3\,dm^3 = 33{,}3$ Liter.

b) Nach 10 Minuten befinden sich etwa 73,3 Liter in dem Gefäß.

G 22

a) Es handelt sich um exponentielles Wachstum, da der Bestand jede Woche um den Faktor 1,04 zunimmt.

b) Es handelt sich um lineares Wachstum, da der Preis jedes Jahr um den gleichen Betrag steigt. Die Preissteigerung in x Jahren beträgt dann $0{,}1\cdot x$.

Seite 75

6

Nullstellen von f: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$

$A = \int_0^4 f(x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}$; $A = \frac{32}{3}\,FE$

7

a) Schnittstellen der Graphen von f und g: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$

$\int_{-2}^1 (x^2 + x - 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^1 = -\frac{7}{6} - \frac{10}{3} = -\frac{27}{6} = -\frac{9}{2}$;

$A = \frac{9}{2}\,FE$

b) Schnittstellen der Graphen von f und g: $x_1 = -3$; $x_2 = 3$

$\int_{-3}^3 (x^2 - 9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_{-3}^3 = -18 - 18 = -36$; $A = 36\,FE$

Seite 77

14

a) $\int_0^3 g(x)\,dx = 6{,}75;\ A = 6{,}75\,FE$

b) $A = \int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = 1\frac{1}{3};\ A = 1\frac{1}{3}\,FE$

c) $A = 8 - \int_0^2 f(x)\,dx = 8 - 5\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3};\ A = 2\frac{2}{3}\,FE$

G 18

a) $\frac{12}{10} = \frac{14{,}4}{12} = \frac{17{,}28}{14{,}4} = 1{,}2$

Die Funktionswerte nehmen immer um den Faktor 1,2 zu.
Es liegt somit exponentielles Wachstum vor.
$f(n) = 10 \cdot 1{,}2^n$
$f(10) = 10 \cdot 1{,}2^{10} \approx 61{,}92$

b) Die Funktionswerte nehmen immer um den Wert 6 zu.
Es liegt somit lineares Wachstum vor.
$f(n) = 50 + 6n$
$f(10) = 50 + 6 \cdot 10 = 110$

Seite 80

4

$\int_{0{,}5}^{a} \frac{4}{x^3}\,dx = \left[-\frac{2}{x^2}\right]_{0{,}5}^{a} = 8 - \frac{2}{a^2};$ für $a \to +\infty$ gilt $\frac{2}{a^2} \to 0$

Somit ist der Flächeninhalt endlich und beträgt 8 Flächeneinheiten.

5

Linke Fläche: $\int_z^3 \frac{2}{\sqrt{3x}}\,dx = \left[\frac{4}{3}\sqrt{3x}\right]_z^3 = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{3z};$ für $z \to 0$ gilt $\sqrt{3z} \to 0$, also existiert das uneigentliche Integral und es ist $\int_0^3 \frac{2}{\sqrt{3x}}\,dx = 4$. Die Fläche hat den endlichen Inhalt 4 FE.

Rechte Fläche: $\int_3^z \frac{2}{\sqrt{3x}}\,dx = \left[\frac{4}{3}\sqrt{3x}\right]_3^z = \frac{4}{3}\sqrt{3z} - 4;$ für $z \to +\infty$ gilt $\sqrt{3z} \to +\infty$, also existiert das uneigentliche Integral nicht. Die Fläche hat keinen endlichen Inhalt.

9

$A(z) = \int_z^1 \left(x + \frac{1}{4\sqrt{x}} - 0{,}5\right) dx = \left[\frac{x^2 + \sqrt{x} - x}{2}\right]_z^1 = \frac{1}{2} - \frac{z^2 + \sqrt{z} - z}{2}$

Für $z \to 0$ gilt auch $\frac{z^2 + \sqrt{z} - z}{2} \to 0$. Die unbegrenzte Fläche hat den Inhalt $A = 1\,FE$.

G 11

a) Die Anzahl der Bewertungen steigt jedes Jahr um den Wert 1000.
Modellfunktion: $f(t) = 10\,000 + 1000\,t$
$f(5) = 10\,000 + 1000 \cdot 5 = 15\,000$
Wenn man von linearem Wachstum ausgeht, hat das Café in fünf Jahren 15 000 Bewertungen.

b) Die Anzahl der Bewertungen nimmt jedes Jahr um den Faktor 1,1 zu.
Modellfunktion: $f(t) = 10\,000 \cdot 1{,}1^t$
$f(5) = 10\,000 \cdot 1{,}1^5 \approx 16\,105{,}1$
Wenn man von exponentiellem Wachstum ausgeht, hat das Café in fünf Jahren über 16 000 Bewertungen.

Seite 83

5

a) $V = \pi \int_{-3}^{3} (-x^2 + 9)^2\,dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81x\right]_{-3}^{3} = \frac{1296}{5}\pi \approx 814{,}3;$
$V \approx 814{,}3\,VE$

b) $V = \pi \int_{-2}^{2} (x + 2)\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{2} = \pi \cdot 8 \approx 25{,}1;\ V \approx 25{,}1\,VE$

Seite 84

14

a) $V = \pi \int_1^4 (g(x))^2\,dx \approx 31{,}81$

Es passen ca. $31{,}8\,cm^3 = 31{,}8\,ml$ Wasser in die Schale.

b) $V = \pi \int_0^4 (f(x))^2\,dx - \pi \int_1^4 (g(x))^2\,dx \approx 54{,}454 - 31{,}809$
$= 22{,}645$

Es werden ca. $22{,}65\,cm^3$ Glas benötigt.

G 17

$1{,}02^{12} \approx 1{,}268$
Bei einer monatlichen Zunahme um 2 % beträgt die jährliche Zunahme ca. 26,8 %.
$1{,}002^{365} \approx 2{,}07$
Bei einer täglichen Zunahme um 0,2 % beträgt die jährliche Zunahme ca. 107 %.
Die stärkste Zunahme ist somit die tägliche Zunahme um 0,2 %. Es folgt die monatliche Zunahme um 2 %. Am geringsten ist die jährliche Zunahme um 25 %.

Seite 85

Klausurtraining

1

a) Höhenveränderung im Zeitraum $[0; 20]$: $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 + 10 \cdot 2 = 30$

Die Flughöhe nach 20 Sekunden beträgt ca. 430 m.

Höhenveränderung im Zeitraum $[0; 45]$:

$30 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 = 25$

Die Flughöhe nach 45 Sekunden beträgt ca. 425 m.

b) Das Flugzeug erreicht seine maximale Flughöhe nach 30 Sekunden.

c) Der Inhalt der Fläche im Intervall $[30; t]$ unter der x-Achse muss 60 Flächeneinheiten betragen. Dies ist für $t = 60$ der Fall, denn $\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 4 = 60$.

Nach 60 Sekunden fliegt das Flugzeug auf einer Höhe von 380 m.

2

individuelle Lösung, zum Beispiel:

a) $[0; 4]$; $[-1; 3]$

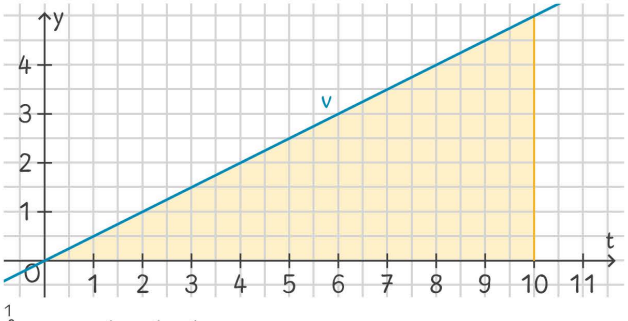
b) $[0; 4]$; $[-3; 5]$

c) $[-4; 0]$; $[-5; 3]$

d) $[2; 6]$; $[-1; 7]$

3

a)



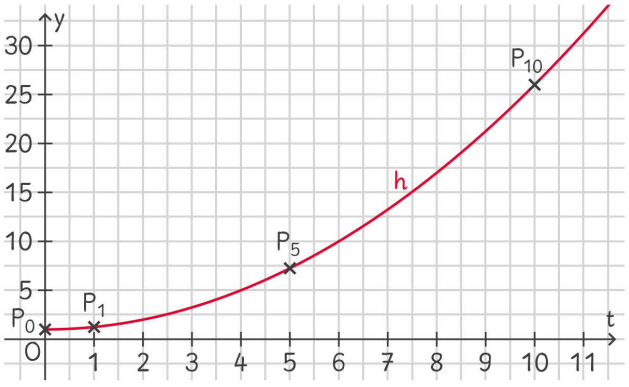
$\int_0^1 v(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$\int_0^5 v(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4} = 6{,}25$

$\int_0^{10} v(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{10}{2} = 25$

Der Aufzug steigt in der ersten Sekunde um 0,25 m, in den ersten fünf Sekunden um 6,25 m und in den ersten 10 Sekunden um 25 m.

b)



4

Höhe der Birke nach 50 Jahren in Metern:

$2 + \int_0^{50} 0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}25t + 9}\,dt \approx 2 + 19{,}3844 \approx 21{,}38$

5

a) Es gilt $F'(x) = f(x)$. $f(x)$ ist somit positiv, wenn die Tangenten an den Graphen von F eine positive Steigung haben, also im Intervall $]-1; 3[$.

b) Der Graph von F verläuft durch den Punkt $T(-1|0)$, somit gilt $F(-1) = 0$.

Der Graph von F hat im Punkt T einen Tiefpunkt, somit gilt $F'(-1) = f(-1) = 0$.

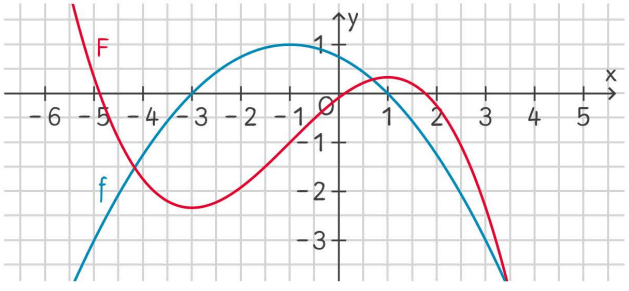
Also gilt $F(-1) = f(-1) = 0$.

c) $\int_1^3 f(x)\,dx = F(3) - F(1) = 2 - 1 = 1$

d) Die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion F im Punkt $P(1|1)$ beträgt ungefähr 0,75. Somit ist $f(1) \approx 0{,}75$.

6

a)

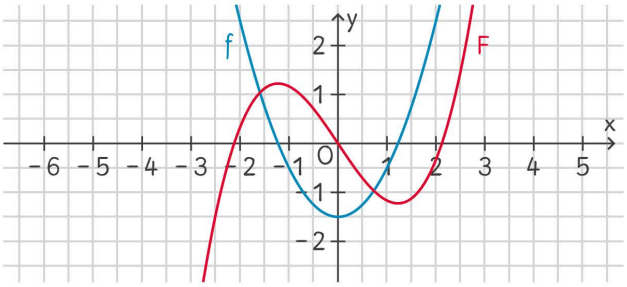


$f(-3) = 0$ und VZW von − nach + $\rightarrow$ F hat ein Minimum bei $x = -3$

$f(1) = 0$ und VZW von + nach − $\rightarrow$ F hat ein Maximum bei $x = 1$

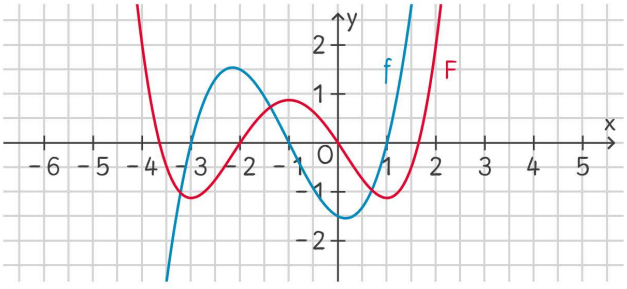
Hochpunkt bei $(-1|f(-1))$ $\rightarrow$ F hat eine Wendestelle bei $x = -1$

b)



$f(-1{,}25) \approx 0$ und VZW von + nach − $\rightarrow$ F hat ein Maximum bei $x \approx -1{,}25$;
$f(1{,}25) \approx 0$ und VZW von − nach + $\rightarrow$ F hat ein Minimum bei $x \approx 1{,}25$;
Tiefpunkt bei $(0\,|\,f(0))$ $\rightarrow$ F hat eine Wendestelle bei $x = 0$

c)



$f(-3) = 0$ und VZW von − nach + $\rightarrow$ F hat ein Minimum bei $x = -3$
$f(-1) = 0$ und VZW von + nach − $\rightarrow$ F hat ein Maximum bei $x = -1$
$f(1) = 0$ und VZW von − nach + $\rightarrow$ F hat ein Minimum bei $x = 1$
Hochpunkt ca. bei $(-2\,|\,f(-2))$ $\rightarrow$ F hat eine Wendestelle bei $x \approx -2$
Tiefpunkt ca. bei $(0\,|\,f(0))$ $\rightarrow$ F hat eine Wendestelle bei $x \approx 0$

d) Die Graphen der Stammfunktionen derselben Funktion können nur durch eine Verschiebung nach oben oder nach unten auseinander hervorgehen, da für zwei Stammfunktionen F und G derselben Funktion f stets $F(x) = G(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt. Jana muss also prüfen, ob der Graph durch Verschiebung des Graphen einer bekannten Lösung nach oben oder unten entsteht.

Seite 86

7

a) $F(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2$; $G(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2$

b) $F(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^3$; $G(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^3 + 2$

c) $F(x) = 2x^5 + 0{,}15x^2$; $G(x) = 2x^5 + 0{,}15x^2 + 2$

d) $F(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{2}x$; $G(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{2}x + 2$

8

a) $\int_{-2}^{-1}(x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{4} - 2 - (4 - 8) = 2{,}25$

b) $\int_{-1}^{1}(x^4 + 3x^3 + 2x)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 + x^2\right]_{-1}^{1}$
$= \frac{1}{5} + \frac{3}{4} + 1 - \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{4} + 1\right) = \frac{2}{5}$

c) $\int_{1}^{2}6(x^3 + x)\,dx = 6 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2} = 6 \cdot \left(4 + 2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\right)$
$= 6 \cdot \frac{21}{4} = \frac{63}{2} = 31{,}5$

d) $\int_{1}^{2}(x + 2)^2\,dx = \int_{1}^{2}(x^2 + 4x + 4)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right]_{1}^{2}$
$= \frac{8}{3} + 8 + 8 - \left(\frac{1}{3} + 2 + 4\right) = 12\frac{1}{3}$

9

$130\frac{km}{h} \approx 36\frac{m}{s}$; $22\frac{km}{h} \approx 6\frac{m}{s}$; $v(0) = 36$; $v(20) = 6$

$s = \int_{0}^{20} v(t)\,dt = 320\,(m)$

10

a) $\int_{0}^{3}\left(\frac{1}{3}x^3 - 3x\right)dx = \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} = \frac{81}{12} - \frac{27}{2} = -\frac{27}{4}$; $A = \frac{27}{4}\,FE$

b) $\int_{-2}^{0}(-x + 1 - (x^2 + x + 1))\,dx = \int_{-2}^{0}(-x^2 - 2x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{0}$
$= 0 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}$; $A = \frac{4}{3}\,FE$

c) $\int_{-2}^{0}(0{,}5x^2 - (0{,}5x^2 - 4))\,dx = \int_{-2}^{0}4\,dx = [4x]_{-2}^{0} = 8$; $A = 8\,FE$

11

a) Nullstellen: $0{,}5x^2(x^2 - 4) = 0$, also $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$, wobei $f(x) \leq 0$ für $-2 \leq x \leq 2$;
Flächeninhalt: 4,27 FE, denn $\int_{-2}^{2}f(x)\,dx \approx -4{,}27$

b) Schnittpunkte von f mit der Geraden $y = -2$:
$S_1(-\sqrt{2}\,|\,-2)$ und $S_2(\sqrt{2}\,|\,-2)$
Flächeninhalt: 3,02 FE, denn $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(f(x) - (-2))\,dx \approx 3{,}02$

c) Schnittpunkte von f mit der Geraden $y = -1{,}5$:
$S_1(-1{,}73\,|\,-1{,}5)$, $S_2(-1\,|\,-1{,}5)$, $S_3(1\,|\,-1{,}5)$ und $S_4(1{,}73\,|\,-1{,}5)$
Flächeninhalt: ca. 3,79 FE, denn
$\left|\int_{-2}^{2}f(x)\,dx\right| - \int_{-1{,}73}^{-1}(-1{,}5 - f(x))\,dx - \int_{1}^{1{,}73}(-1{,}5 - f(x))\,dx$
$\approx 4{,}27 - 0{,}241 - 0{,}241 = 3{,}788$

12

$\int_{a}^{1}(f(x) - g(x))\,dx = \int_{a}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{a}^{1} = 2 - 2\sqrt{a}$

Für $a \rightarrow 0$ strebt $2 - 2\sqrt{a} \rightarrow 2$.
Somit ist der Inhalt der Fläche zwischen f und g im Intervall $[a; 1]$ für $a \rightarrow 0$ endlich.

$\int_1^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^b = 2\sqrt{b} - 2$

Für $b \to +\infty$ strebt $2\sqrt{b} - 2 \to +\infty$.

Somit ist der Inhalt der Fläche zwischen f und g im Intervall $[1; b]$ für $b \to +\infty$ nicht endlich.

13

$\int_1^a \frac{t}{x^2}\,dx = \left[-\frac{t}{x}\right]_1^a = -\frac{t}{a} + t$

Für $a \to +\infty$ strebt $-\frac{t}{a} + t \to t = A_t$.

Für $t = 5$ erhält man $A_t = 5\,\text{FE}$.

14

a) Der Körper ergibt einen Ring oder ein Rohrstück. Das Rohrstück ist 5 LE lang, hat einen Innenradius von 1,5 LE, einen Außenradius von 2 LE und eine Wanddicke von 0,5 LE.

b) Der Körper entspricht z. B. dem Oberteil eines Sektglases und hat eine Höhe von 2 LE. Der Radius des oberen Randes beträgt $\sqrt{2}$ LE.

c) Der Körper ähnelt einem American Football, der vier Längeneinheiten lang ist.

15

a) $\pi\int_0^b \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^b x^{\frac{2}{3}}\,dx = \pi\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^b = \pi\cdot\frac{3}{5}b^{\frac{5}{3}}$

Als Lösung der Gleichung $\frac{3\pi}{5}b^{\frac{5}{3}} = 30$ erhält man $b \approx 5{,}26$.

Die Höhe beträgt ca. 5,26 Längeneinheiten.

b) $\pi\int_0^{10} \left(a\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^{10} a^2 x^{\frac{2}{3}}\,dx = \pi\left[a^2\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^{10} = \pi a^2\cdot\frac{3}{5}\sqrt[3]{100\,000}$

Als Lösung der Gleichung $\pi a^2\cdot\frac{3}{5}\sqrt[3]{100\,000} = 30$ erhält man $a \approx 0{,}586$.

Für $a \approx 0{,}586$ beträgt das Volumen 30 Volumeneinheiten.

Seite 87

16

a) (1) Die Aussage ist wahr. Begründung: $F'(x) = f(x) > 0$ im Intervall $[-1; 0[$.

(2) Die Aussage ist falsch. Begründung:
Bei $x = 2$ hat der Graph von F einen Tiefpunkt, da das Vorzeichen von f an der Stelle $x = 2$ von − zu + wechselt.
Da $F(0) = 0$ gelten soll, muss der Tiefpunkt des Graphen von F unterhalb der x-Achse liegen.

(3) Die Aussage ist wahr. Begründung: Das Vorzeichen von f ändert sich zweimal (bei $x = 0$ und $x = 2$). Dementsprechend muss F zwei Extremstellen haben.

(4) Die Aussage ist wahr. Begründung: Der Graph von f hat an der Stelle $x = 1$ einen Tiefpunkt.

b) (1) $f(x) = ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 2ax + b$
Mit $f(0) = 0$ erhält man $c = 0$.
Mit $f'(1) = 0$ erhält man $2a + b = 0$.
Mit $f(1) = -0{,}5$ erhält man $a + b = -0{,}5$.
Lösung des Gleichungssystems: $a = 0{,}5$ und $b = -1$
Also ist die Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}5x^2 - x$.
Hinweis: Man kann die Funktionsgleichung auch direkt aus dem Graphen bestimmen und erhält die Scheitelpunktform mit $f(x) = 0{,}5(x - 1)^2 - 0{,}5$.

(2) $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2$
$\int_0^2 f(x)\,dx = -\frac{2}{3}$, also $A = \frac{2}{3}\,\text{FE}$

(3) $A(x) = \int_2^x f(t)\,dt = \left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right]_2^x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}$

17

a) $f(-1) = \frac{1}{4}\cdot(-1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-1) = \frac{1}{4}$; $g(-1) = \frac{1}{4}\cdot(-1)^2 = \frac{1}{4}$
$f(0) = g(0) = 0$
$f(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$; $g(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^2 = 1$
Somit verlaufen beide Graphen durch die Punkte $A\left(-1\,\middle|\,\frac{1}{4}\right)$, $B(0\,|\,0)$ und $C(2\,|\,1)$.

b) $A_1 = \int_{-1}^0 f(x)\,dx - \int_{-1}^0 g(x)\,dx = \frac{5}{48}$; $A = \frac{5}{48}\,\text{FE}$

$A_2 = \int_0^2 g(x)\,dx - \int_0^2 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$; $A = \frac{2}{3}\,\text{FE}$

c) Es soll gelten $\int_0^a (g(x) - f(x))\,dx = \int_a^2 (g(x) - f(x))\,dx$.
Als Lösung der Gleichung erhält man $a \approx 1{,}12$.

18

a) (1) $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$
$f''(x) = x^2 - 4x + 3$
$f'''(x) = 2x - 4$
Nullstellen der ersten Ableitung: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$ (doppelte Nullstelle)
$f''(0) = 3$; $f(0) = 0$, also Tiefpunkt $T(0\,|\,0)$
$f''(3) = 0$; $f'''(3) = 2$, also Sattelstelle (und keine Extremstelle) bei $x_2 = 3$
Nullstellen der zweiten Ableitung: $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$
$f'''(1) = -2$; $f(1) = \frac{11}{12}$, also Wendepunkt $W_1\left(1\,\middle|\,\frac{11}{12}\right)$
$f'''(3) = 2$; $f(3) = 2{,}25$, also Wendepunkt $W_2(3\,|\,2{,}25)$
(2) W_2 ist ein Sattelpunkt, da $f'(3) = 0$, $f''(3) = 0$ und $f'''(3) \neq 0$ ist.

b) (1) $f'(1) = \frac{4}{3}$

Mit $W_1\left(1 \middle| \frac{11}{12}\right)$ erhält man $\frac{4}{3} \cdot 1 + b = \frac{11}{12}$ und somit $b = -\frac{5}{12}$

bzw. $t_1(x) = \frac{4}{3}x - \frac{5}{12}$.

$f'(3) = 0$

Mit $W_1\left(3 \middle| \frac{9}{4}\right)$ erhält man $t_2(x) = \frac{9}{4}$.

(2) Schnittpunkt von t_1 und t_2

$\frac{4}{3}x - \frac{5}{12} = \frac{9}{4}$ liefert $x = 2$.

$A = \int_1^2 (t_1(x) - f(x))\,dx + \int_2^3 (t_2(x) - f(x))\,dx = \frac{2}{15}$, also $A = \frac{2}{15}$ FE

19

a) $f'(x) = 3x^2 - 1$

Nullstellen der ersten Ableitung: $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f''(x) = 6x$

$f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$; $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} + c$,

also Tiefpunkt $T\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \middle| -\frac{2\sqrt{3}}{9} + c\right)$

Für $c < \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}385$ liegt der Tiefpunkt unterhalb der x-Achse.

$f''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$, somit Hochpunkt bei $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Die Flächen sind gleich groß, wenn $\int_0^2 f_c(x)\,dx = 0$ ist.

Mit $\int_0^2 f_c(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + cx\right]_0^2 = 2 + 2c = 0$ erhält man $c = -1$.

Seite 88

20

a) $f_a(1) = \frac{a}{1^2} = a$; $g_a(1) = 1 - 1 + a = a$

Die Graphen schneiden sich im Punkt $P(1\,|\,a)$.

b) $\int_1^b \frac{a}{x^2}\,dx = \left[-\frac{a}{x}\right]_1^b = -\frac{a}{b} + a$

Für $b \to +\infty$ strebt $-\frac{a}{b} + a \to a$.

c) (1) $\int_0^1 g_a(x)\,dx + \int_1^b \frac{a}{x^2}\,dx = -\frac{1}{4} + a - \frac{a}{b} + a = 2a - \frac{1}{4} - \frac{a}{b}$

Für $b \to +\infty$ strebt $2a - \frac{1}{4} - \frac{a}{b} \to 2a - \frac{1}{4} = A(a)$.

(2) Als Lösung der Gleichung $2a - \frac{1}{4} = 10$ erhält man $a = \frac{41}{8}$.

21

a) Das Maximum der Funktion f im Intervall $[0; 3{,}25]$ ist bei $t = 1$. Die höchste Anrufrate wird somit um 21 Uhr erreicht.

b) Das Maximum der Ableitung f' im Intervall $[0; 3{,}25]$ wird zu Beginn des Zeitraums bei $t = 0$ erreicht. Das Minimum der Ableitung f' im Intervall $[0; 3{,}25]$ wird bei $t = 2{,}\overline{4}$ erreicht. Die Anrufsrate steigt somit zu Beginn des Zeitraums (um 20 Uhr) am stärksten an und nimmt um ca. 22:27 Uhr am stärksten ab.

c) $\int_0^{3{,}25} f(t)\,dt \approx 8{,}597$

Im Zeitraum von 20 Uhr bis 23:15 Uhr wird das Spendentelefon ca. 85 970 Mal angerufen.

d) Als Lösung der Gleichung $\int_0^a f(t)\,dt = 5$ erhält man $t \approx 1{,}418$.

Ab ca. 21:26 Uhr übersteigt die Anzahl der Anrufe die Anzahl von 50 000.

22

a) Maximum von v bei $t = 6$; d.h., nach 6 s ist die Geschwindigkeit maximal.

b) Stillstand: Nullstellen von v bei 0 und 12, d.h., nach 12 s kommt das Fahrzeug zum Stillstand. Zurückgelegter Weg

$s(12) = \int_0^{12} v(t)\,dt = 144$; d.h., das Fahrzeug legt bis dahin 144 m zurück.

c) $\int_0^{10} v(t)\,dt = 133{,}\overline{3}$

In 10 Sekunden werden ca. 133 Meter zurückgelegt.
Die Durchschnittsgeschwindigkeit innerhalb der ersten 10 Sekunden beträgt somit ca. $\frac{133\,\text{m}}{10\,\text{s}} = 13{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

d) Integralfreier Term für s: $s(t) = \int_0^t v(x)\,dx = 3t^2 - \frac{1}{6}t^3$

e) Maximalgeschwindigkeit bei $t = 6$, also Tangente bei $t = 8$: $y = -2t + 32$; Nullstelle bei $t = 16$; zurückgelegter Weg s bis $t = 16$: $s = \int_0^8 v(t)\,dt + \int_8^{16} (-2t + 32)\,dt = \frac{512}{3} \approx 170{,}67$

Unter diesen Umständen fährt das Fahrzeug etwa 170,7 m weit.

23

a) $V = \pi \int_0^6 \left(\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}\right)^2 dx = \pi\left[\frac{1}{48}x^3 + \frac{7}{8}x^2 + \frac{49}{4}x\right]_0^6 = \pi \cdot \frac{219}{2} \approx 344{,}00$

Die Füllmenge ist etwa $344\,\text{cm}^3 = 344\,\text{ml}$.

b) Volumen der Kühlsteine: $V_K = 3 \cdot 2{,}5^3\,\text{cm}^3 = 46{,}875\,\text{cm}^3 = 46{,}875\,\text{ml}$

Volumen des ganzen Teeglases:

$V = \pi \int_0^8 \left(\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}\right)^2 dx = \pi\left[\frac{1}{48}x^3 + \frac{7}{8}x^2 + \frac{49}{4}x\right]_0^8 \approx 517{,}32$

Im Teeglas ist noch Platz für etwa
$(517{,}32 - 344{,}00)\,\text{ml} = 173{,}32\,\text{ml}$.
Die Kühlsteine bringen die Tasse mit ihrem Volumen von 46,875 ml daher nicht zum Überlaufen.

c) $V(h) = \pi \int_0^h \left(\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}\right)^2 dx = \pi\left[\frac{1}{48}x^3 + \frac{7}{8}x^2 + \frac{49}{4}x\right]_0^h$

Volumen mit Kühlsteinen: $V \approx 344{,}00 + 46{,}875 = 390{,}875$
Gleichung für die gesuchte Höhe h:

$\frac{1}{48}h^3 + \frac{7}{8}h^2 + \frac{49}{4}h = \frac{390{,}875}{\pi}$

Seite 89

24

a) $\int_0^2 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{150}x^6 - 0{,}32x^2\right]_0^2 = \frac{32}{75} - 1{,}28 = -\frac{64}{75}$

Da der Graph von f punktsymmetrisch ist, gilt für den Inhalt der gesuchten Fläche $A = 2\cdot\left|-\frac{64}{75}\right| = \frac{128}{75} \approx 1{,}7067$ [FE].

b) $f'(x) = 0{,}2x^4 - 0{,}64$

$f''(x) = 0{,}8x^3$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0$

$0{,}2x^4 - 0{,}64 = 0 \quad | + 0{,}64$

$0{,}2x^4 = 0{,}64 \quad | : 0{,}2$

$x^4 = 3{,}2$

$x_1 = \sqrt[4]{3{,}2} \approx 1{,}337$ und $x_2 = -\sqrt[4]{3{,}2} \approx -1{,}337$

Hinreichende Bedingung $f''(x) \neq 0$ für $x_1 = \sqrt[4]{3{,}2}$ und $x_2 = -\sqrt[4]{3{,}2}$ prüfen:

$f''\left(\sqrt[4]{3{,}2}\right) = 0{,}8\cdot\sqrt[4]{3{,}2} > 0$; also Tiefpunkt bei $x_1 = \sqrt[4]{3{,}2}$

$f\left(\sqrt[4]{3{,}2}\right) \approx -0{,}6848 \Rightarrow T\left(\sqrt[4]{3{,}2}\,|\,-0{,}6848\right)$

Aufgrund der Punktsymmetrie ergibt sich der Hochpunkt $H\left(-\sqrt[4]{3{,}2}\,|\,0{,}6848\right)$.

Die notwendige Bedingung für Wendestellen $(f''(x) = 0)$ wird für $x = 0$ erfüllt. Außerdem hat f'' an der Stelle $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel (hinreichende Bedingung für Wendestellen), denn $f''(x) < 0$ für $x < 0$ und $f''(x) > 0$ für $x > 0$.

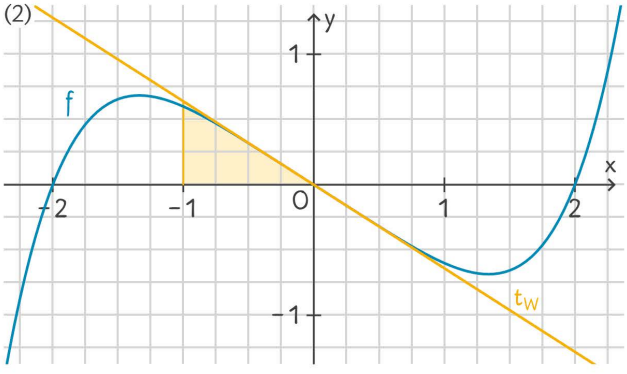
Mit $f(0) = 0$ erhält man den Wendepunkt $W(0\,|\,0)$.

c) (1) $m_t = f'(0) = -0{,}64$, also $t(x) = -0{,}64x$

$t(-1) = 0{,}64$

Der Punkt $P(-1\,|\,0{,}64)$ liegt auf der Tangente t_W.

(2)



Da der Graph von f im Intervall $[-1; 0]$ fast geradlinig verläuft, erhält man durch die Berechnung des Inhalts der dreieckigen Fläche zwischen der x-Achse und der Tangente im Intervall $[-1; 0]$ einen Näherungswert für $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Für die dreieckige Fläche gilt $A = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot t(-1) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}64 = 0{,}32$.

(3) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{47}{150} = 0{,}313\overline{3}$

$\frac{0{,}32}{0{,}313\overline{3}} \approx 1{,}0213$

Der Näherungswert weicht um ca. 2% vom exakten Wert ab.

d) $\int_0^b (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^b 0{,}64x\,dx = [0{,}32x^2]_0^b = 0{,}32b^2$

Als Lösung der Gleichung $0{,}32b^2 = 250$ mit $b > 0$ erhält man $b = \frac{25\sqrt{5}}{2} \approx 27{,}95$.

Für $b > \frac{25\sqrt{5}}{2}$ ist die Fläche größer als 250 Flächeneinheiten.

e) (1) $g_a(0) = 0 - 0 = 0$

$g_a(2) = 32a - 32a = 0$

$g_a(-2) = -32a + 32a = 0$

Die Graphen von g_a verlaufen alle durch die Punkte $N_1(-2\,|\,0)$, $N_2(0\,|\,0)$ und $N_3(2\,|\,0)$.

(2) $25a\int_0^2 f(x) = \int_0^2 (25a\cdot 0{,}04x^5 - 25a\cdot 0{,}64x)\,dx$

$= \int_0^2 (ax^5 - 16ax)\,dx = \int_0^2 g_a(x)\,dx$

(3) $A = \left|\int_0^2 g_a(x)\,dx\right| = 25a\cdot\frac{64}{75} = \frac{64}{3}a \quad (a > 0)$

Als Lösung der Gleichung $\frac{64}{3}a = 10$ erhält man $a = \frac{15}{32}$.

25

a) Die Exponenten von x sind alle ungerade und es gilt $f(0) = 0$. Daher ist der Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

b) $f'(x) = -x^2 + 4$

$f''(x) = -2x$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0$

$-x^2 + 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen prüfen:

$f''(2) = -4 < 0$; $f(2) = \frac{16}{3}$, also Hochpunkt $H\left(2\,|\,\frac{16}{3}\right)$

Aufgrund der Punktsymmetrie erhält man den Tiefpunkt $T\left(-2\,|\,-\frac{16}{3}\right)$.

c) (1) Tangente im Hochpunkt: $t(x) = \frac{16}{3}$

$f(-4) = -\frac{1}{3}(-4)^3 + 4\cdot(-4) = \frac{16}{3} = t(-4)$

(2) $\int_{-4}^{2} (t(x) - f(x))\,dx = \left[\frac{16}{3}x + \frac{1}{12}x^4 - 2x^2\right]_{-4}^{2} = 4 + 32 = 36$,

also $A = 36$ FE

d) (1) f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades. f' ist somit eine quadratische Funktion und f'' eine lineare Funktion. Somit hat f'' nur eine Nullstelle. Die notwendige Bedingung für Wendestellen wird nur für einen x-Wert erfüllt und f hat nur eine Wendestelle.

(2) $f'(0) = 4$; $t_w(x) = 4x$

$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{4}$, also $n_w(x) = -\frac{1}{4}x$

(3) $-\frac{1}{3}x^3 + 4x = -\frac{1}{4}x \quad | + \frac{1}{4}x$

$-\frac{1}{3}x^3 + \frac{17}{4}x = 0$

$-\frac{1}{3}x \cdot \left(x^2 - \frac{51}{4}\right) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\sqrt{51}}{2}$ und $x_3 = -\frac{\sqrt{51}}{2}$

$A_1 + A_2 = 2 \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{51}}{2}} (n_w(x) - f(x))\,dx \approx 27{,}1$

Die Summe der beiden Flächen ist mit ca. 27,1 FE kleiner als der in Teilaufgabe c) berechnete Flächeninhalt.

e) Bei Streckung um den Faktor a in y-Richtung erhält man $f_a(x) = a \cdot f(x)$, den Hochpunkt $H\left(2 \middle| a \cdot \frac{16}{3}\right)$ und somit für die Tangente im Hochpunkt $t_a(x) = a\frac{16}{3} = a \cdot t(x)$. Die Tangente schneidet den Graphen weiterhin stets bei $x = -4$, da nur in y-Richtung gestreckt wird.

Für den betrachteten Flächeninhalt gilt dann

$A = \int_{-4}^{0} (t_a(x) - f_a(x))\,dx = \int_{-4}^{0} (a \cdot t(x) - a \cdot f(x))\,dx$

$= a \cdot \int_{-4}^{0} (t(x) - f(x))\,dx.$

Bei einer Streckung der Funktion f um den Faktor a in y-Richtung vervielfacht sich der Inhalt der Fläche zwischen der Tangente im Hochpunkt und dem Graphen von f somit um den Faktor a.

III Exponentialfunktionen

Seite 97

Check-in

1

a) $x^5 \cdot x^3 = x^8$

b) $x^4 \cdot x^{-6} = x^{-2}$

c) $\frac{x^{-2}}{x^{-3}} = x^{-2} : x^{-3} = x$

d) $(x^2)^3 \cdot x^{-2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 = x^6 \cdot x^{-2} \cdot \frac{1}{x^3} = x^4 \cdot x^{-3} = x$

e) $x^5 \cdot (x^{-7})^2 \cdot x = x^5 \cdot x^{-14} \cdot x = x^{-9} \cdot x = x^{-8}$

f) $x^n \cdot x^{-3n} = x^{-2n}$

2

a) $\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{3^3 - 3 + 2 - ((-1)^3 - (-1) + 2)}{4} = \frac{26 - 2}{4} = \frac{24}{4} = 6$

b) $\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 - \left(\frac{1}{2} \cdot (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)\right)}{4}$

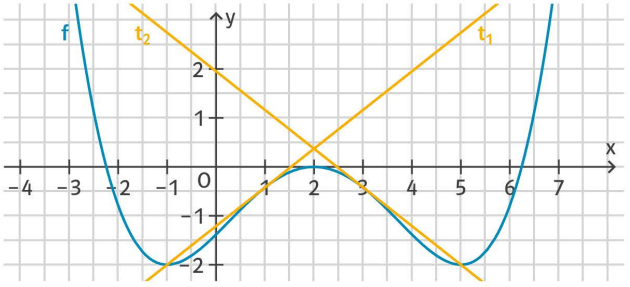
$= \frac{127{,}5 + 4{,}5}{4} = \frac{132}{4} = 33$

c) $\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{2 \cdot 3^2(3 + 2) - (2 \cdot (-1)^2 \cdot (-1 + 2))}{4} = \frac{90 - 2}{4} = \frac{88}{4} = 22$

3

a) $\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{0 - (-2)}{3} = \frac{2}{3}$

b)



$f'(1) = 0{,}8$; $f'(3) = -0{,}8$

c) $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ und $x_3 = 5$

4

a) $f'(x) = 2x - 2$
$f'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$
$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$
$t(x) = 0 \cdot x + n$
$-1 = 0 \cdot 1 + n = n$
$t(x) = -1$

b) $f'(x) = 12x^2$
$f'(0{,}5) = 12 \cdot 0{,}5^2 = 3$
$f(0{,}5) = 4 \cdot 0{,}5^3 + 2 = 2{,}5$
$t(x) = 3 \cdot x + n$
$2{,}5 = 3 \cdot 0{,}5 + n$
$2{,}5 = 1{,}5 + n \quad | - 1{,}5$
$1 = n$
$t(x) = 3x + 1$

c) $f'(x) = -3x^2 + 2x$
$f'(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -5$
$f(-1) = -(-1)^3 + (-1)^2 = 2$
$t(x) = -5x + n$
$2 = -5 \cdot (-1) + n$
$2 = 5 + n \quad | - 5$
$-3 = n$
$t(x) = -5x - 3$

5

a) $0 = x^3 - 2x$
$x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = 0$ und $x_3 = \sqrt{2}$
$\int_0^{\sqrt{2}} (x^3 - 2x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2\right]_0^{\sqrt{2}} = -1 - 0 = -1$; $A = 1\,\text{FE}$

b) $0 = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$
$x_1 = 2$ und $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$
$2 \cdot \int_{-2}^{0} \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^2\right) dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{0} = 2 \cdot \frac{16}{15} = \frac{32}{15} \approx 2{,}13$;
$A \approx 2{,}13\,\text{FE}$

c) $\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x = \frac{1}{2}x^2 \quad | -\frac{1}{2}x^2$

$\frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 3x = 0$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ und $x_3 = 6$

$\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 3x\right) dx$

$= \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{5}{3}$; $A = \frac{5}{3}$ FE

Seite 102

5

a) $f(0) = c \cdot a^0 = 1$

$c = 1$

$f(x) = a^x$

$a^{-2} = 81 \quad | (\,)^{-\frac{1}{2}}$

$a = 81^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}$

$f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$

$\left(\frac{1}{9}\right)^x = 243 \quad | \log_{\frac{1}{9}}(\,)$

$x = \log_{\frac{1}{9}}(243) = -2{,}5$

b) $f(0) = c \cdot a^0 = 2$

$c = 2$

$f(x) = 2 \cdot a^x$

$2 \cdot a^{-4} = 162 \quad | : 2$

$a^{-4} = 81 \quad | (\,)^{-\frac{1}{4}}$

$a = 81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 243 \quad | : 2$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 121{,}5 \quad | \log_{\frac{1}{3}}(\,)$

$x = \log_{\frac{1}{3}}(121{,}5) \approx -4{,}37$

c) $f(0) = c \cdot a^0 = 3$

$c = 3$

$f(x) = 3 \cdot a^x$

$3 \cdot a^5 = 729 \quad | : 3$

$a^5 = 243 \quad | (\,)^{\frac{1}{5}}$

$a = (243)^{\frac{1}{5}} = 3$

$f(x) = 3 \cdot 3^x$

$3 \cdot 3^x = 243 \quad | : 3$

$3^x = 81 \quad | \log_3(\,)$

$x = \log_3(81) = 4$

Seite 103

10

a) $f(x) = 0{,}98^x$

b) $f(17) = 0{,}98^{17} \approx 0{,}71$

Ca. 71 % der Signalstärke können eine 17 cm dicke Wand durchdringen.

c) $0{,}98^x > 0{,}75 \quad | \log_{0{,}98}(\,)$

$x < \log_{0{,}98}(0{,}75) \approx 14{,}24$

Eine Mauer darf maximal 14,24 cm dick sein, sodass weniger als 25 % der ursprünglichen Signalstärke eingebüßt werden.

G **13**

a) $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi$ und $x_3 = 2\pi$

b) $x = \frac{1}{2}\pi$

c) $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{\pi}{2}$ und $x_3 = \pi$ und $x_4 = \frac{3}{2}\pi$ und $x_5 = 2\pi$

d) $x = \frac{3}{2}\pi$

Seite 106

6

a) $f'(x) = 3{,}5e^x$; $F(x) = 3{,}5e^x - 5x$

b) $f'(x) = -e^x + 4x^3$; $F(x) = -e^x + \frac{1}{5}x^5$

c) $f'(x) = 0{,}5e^x + \frac{1}{2}x$; $F(x) = 0{,}5e^x + \frac{1}{12}x^3$

7

a) $x = \ln(0{,}5) \approx -0{,}69$

b) Die Gleichung ist unlösbar, d.h. $L = \{\ \}$.

c) $x = \ln\left(\frac{10}{4}\right) \approx 0{,}92$

d) $x = \ln(33) \approx 3{,}50$

Seite 107

13

$f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$

$f'(2) = e^2$

$t(x) = e^2 \cdot x + b$

$e^2 = e^2 \cdot 2 + b \quad | - 2e^2$

$-e^2 = b$

$t(x) = e^2 \cdot x - e^2$

$t(0) = e^2 \cdot 0 - e^2 = -e^2$

$0 = e^2 \cdot x - e^2$

$e^2 = e^2 \cdot x \quad | : e^2$

$1 = x$

$S_y(0\,|\,-e^2)$; $S_x(1\,|\,0)$

14

a) $f'(x) = e^x - 1$; $f''(x) = e^x$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$e^x - 1 = 0$

$e^x = 1 \quad | \ln(\,)$

$x = 0$

hinreichende Bedingung prüfen:

$f''(x) \neq 0$

Es gilt $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Der Graph von f hat keine Wendepunkte, da $f''(x) = 0$ (notwendige Bedingung) gelten muss. Allerdings ist $f''(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

G **17**

individuelle Lösungen, zum Beispiel:
periodisch mit der Periode $p = 2\pi$; Amplitude 1
auf $I = [-2\pi; 2\pi]$ größte Werte bei $x = -\frac{3\pi}{2}$ bzw. $x = \frac{\pi}{2}$
Der größte y-Wert beträgt $y = 1$.
auf $I = [-2\pi; 2\pi]$ kleinste Werte bei $x = -\frac{\pi}{2}$ bzw. $x = \frac{3\pi}{2}$
Der kleinste y-Wert beträgt $y = -1$.
auf $I = [-2\pi; 2\pi]$ Nullstellen bei $x = -2\pi$; $x = -\pi$; $x = 0$; $x = \pi$ bzw. $x = 2\pi$

Seite 110

6

a) $f'(x) = 0{,}5e^{0{,}5x}$; $F_1(x) = 2e^{0{,}5x}$; $F_2(x) = 2e^{0{,}5x} + 1$

b) $f'(x) = 6e^{3x+1}$; $F_1(x) = \frac{2}{3}e^{3x+1}$; $F_2(x) = \frac{2}{3}e^{3x+1} + 1$

c) $f'(x) = -e^{-x}$; $F_1(x) = -e^{-x} + 4x$; $F_2(x) = -e^{-x} + 4x + 1$

7

a) $\int_0^4 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^4 = \frac{1}{2}e^8 - \frac{1}{2}$ [FE]

b) $\int_1^3 f(x)\,dx = \left[2e^{x-1}\right]_1^3 = 2e^2 - 2$ [FE]

c) $\int_{-4}^0 f(x)\,dx = \left[2e^{0{,}5x+2}\right]_{-4}^0 = 2e^2 - 2$ [FE]

Seite 111

12

a) $f(0) = 12\,000$
Laut Modell besteht die Heuschreckenpopulation zu Beobachtungsbeginn aus 12 000 Heuschrecken.

b) $f(3) = 12\,000 \cdot e^{0{,}058 \cdot 3} \approx 14\,280{,}67$
Laut Modell besteht die Population nach 3 Wochen aus ca. 14 281 Heuschrecken.

c)
$e^{0{,}058t} = 2 \quad | \ln(\,)$
$0{,}058t = \ln(2) \quad | : 0{,}058$
$t = \frac{\ln(2)}{0{,}058} \approx 11{,}95$
Die Verdopplungszeit der Heuschreckenpopulation liegt bei ca. 12 Wochen.

d) $f'(t) = 12\,000 \cdot 0{,}058 \cdot e^{0{,}058t} = 696 \cdot e^{0{,}058t}$
$696 \cdot e^{0{,}058t} = 1000 \quad | : 696$
$e^{0{,}058t} = \frac{1000}{696} \quad | \ln(\,)$
$0{,}058t = \ln\left(\frac{1000}{696}\right) \quad | : 0{,}058$
$t = \ln\left(\frac{1000}{696}\right) : 0{,}058 \approx 6{,}25$
Nach ca. 6 Wochen nimmt die Population mit einer Geschwindigkeit von 1000 Heuschrecken pro Woche zu.

G **15**

a) Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung, Verschiebung um 2 Einheiten nach oben
$A = 2$; $p = 2\pi$

b) $g(x) = \sin(3x - 3) = \sin(3(x - 1))$
Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ in x-Richtung, Verschiebung um 1 Einheit nach rechts
$A = 1$; $p = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

c) $g(x) = \sin(2x + 1) - 0{,}5 = \sin(2(x + 0{,}5)) - 0{,}5$
Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung, Verschiebung um 0,5 Einheiten nach links und um 0,5 Einheiten nach unten
$A = 1$; $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

d) Streckung mit dem Faktor 0,5 in y-Richtung, Verschiebung um π Einheiten nach rechts und um 1,5 Einheiten nach oben
$A = 0{,}5$; $p = 2\pi$

Seite 114

5

a) $f(1) = 2^1 = 2$
$f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$; $f'(1) = \ln(2) \cdot 2 \approx 1{,}39$
$t(x) = 1{,}39 \cdot x + b$
$2 = 1{,}39 \cdot 1 + b \quad | - 1{,}39$
$0{,}61 = b$
$t(x) = 1{,}39 \cdot x + 0{,}61$

b) $f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
$f'(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $f'(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \approx -0{,}17$
$t(x) = -0{,}17x + b$
$\frac{1}{4} = -0{,}17 \cdot 2 + b \quad | + 0{,}34$
$0{,}59 = b$
$t(x) = -0{,}17x + 0{,}59$

c) $f(0) = 3 \cdot 4^0 = 3$
$f'(x) = 3 \cdot \ln(4) \cdot 4^x$; $f'(0) = 3 \cdot \ln(4) \approx 4{,}16$
$t(x) = 4{,}16x + b$
$3 = 4{,}16 \cdot 0 + b = b$
$t(x) = 4{,}16x + 3$

6

a) $\int_0^2 2{,}5^x\,dx = \left[\frac{1}{\ln(2{,}5)} \cdot 2{,}5^x\right]_0^2 = \frac{6{,}25}{\ln(2{,}5)} - \frac{1}{\ln(2{,}5)} = \frac{5{,}25}{\ln(2{,}5)} \approx 5{,}73$ [FE]

b) $\int_{-1}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^x dx = \left[\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x\right]_{-1}^2 = \frac{1}{16 \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right)} - \frac{4}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{-63}{16 \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right)}$
$\approx 2{,}84$ [FE]

c) $\int_0^3 2 \cdot 0{,}6^x\,dx = \left[\frac{2}{\ln(0{,}6)} \cdot (0{,}6)^x\right]_0^3 = \frac{0{,}432}{\ln(0{,}6)} - \frac{2}{\ln(0{,}6)} = \frac{-1{,}568}{\ln(0{,}6)}$
$\approx 3{,}07$ [FE]

Seite 115

10

a) $f(3) = 800 \cdot 1{,}2^3 = 1382{,}4$
$f(-3) = 800 \cdot 1{,}2^{-3} \approx 462{,}96$
Die erwartete Bakterienanzahl liegt drei Stunden nach der Messung bei ca. 1382. Drei Stunden vor der Messung lag sie bei ca. 463.

b) $1{,}2^t = 2 \quad | \log_{1,2}(\,)$
$t = \log_{1,2}(2) \approx 3{,}80$
Nach ca. 3,8 Stunden, also 3 Stunden und 48 Minuten, müsste sich die Bakterienkultur verdoppelt haben.

c) $f'(t) = 800 \cdot \ln(1{,}2) \cdot 1{,}2^t \approx 145{,}86 \cdot 1{,}2^t$

d) $f'(0) = 145{,}86 \cdot 1{,}2^0 = 145{,}86$
$f'(5) = 145{,}86 \cdot 1{,}2^5 \approx 362{,}95$
Zu Beobachtungsbeginn wächst die Bakterienkultur mit einer Geschwindigkeit von ca. 146 Bakterien pro Stunde. Nach 5 Stunden hat sich die Wachstumsgeschwindigkeit mit ungefähr 363 Bakterien pro Stunde weit mehr als verdoppelt.

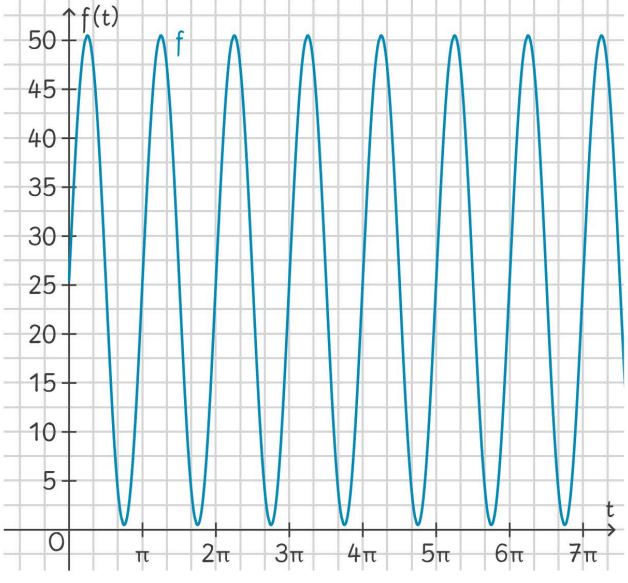
e) $145{,}86 \cdot 1{,}2^t = 1000$
$1{,}2^t = \frac{1000}{145{,}86}$
$t = \log_{1,2}\left(\frac{1000}{145{,}86}\right) \approx 10{,}56$
Nach etwa 10,5 Stunden nimmt die Bakterienkultur um mehr als 1000 Bakterien pro Stunde zu.

G **12**

a) $A = 25;\ d = 25{,}5$
$25 + 25{,}5 = 50{,}5$
Die Gondel erreicht eine maximale Höhe von 50,5 m.

b) $p = \pi \approx 3{,}14$
Die Dauer einer ganzen Drehung beträgt ca. 3,14 min.

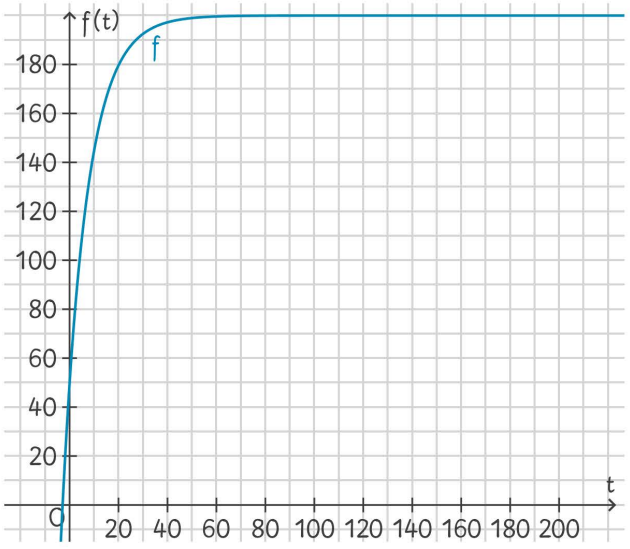
c)



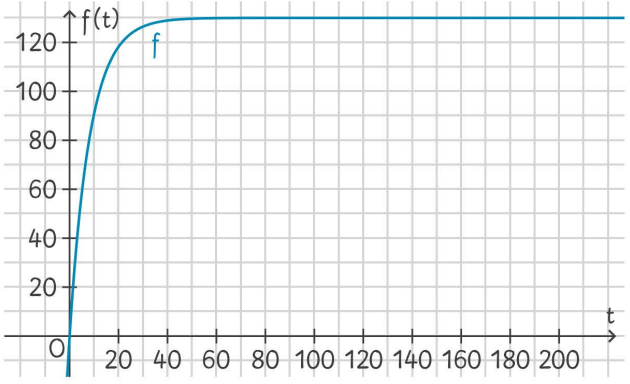
Seite 118

5

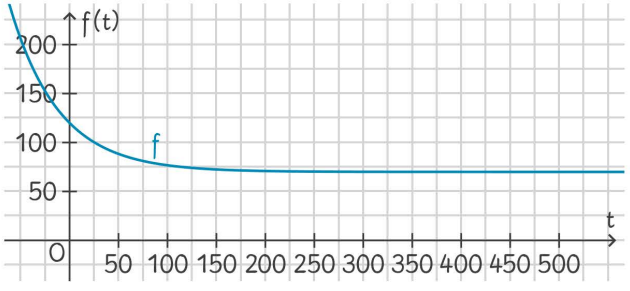
a) (1) $f(0) = 200 - 150e^0 = 50;\ S = 200$



(2) $f(0) = 130 - 130e^0 = 0;\ S = 130$



(3) $f(0) = 70 + 50e^0 = 120;\ S = 70$



b) Eine Woche entspricht 7 Tagen.
(1) $f(7) = 200 - 150e^{-0{,}1 \cdot 7} \approx 125{,}51$
(2) $f(7) = 130 - 130e^{-0{,}12 \cdot 7} \approx 73{,}88$
(3) $f(7) = 70 + 50e^{-0{,}02 \cdot 7} \approx 113{,}47$

c) (1) $f'(t) = 15e^{-0,1t}$
$f'(7) = 15e^{-0,1\cdot 7} \approx 7,45$
(2) $f'(t) = 15,6e^{-0,12t}$
$f'(7) = 15,6e^{-0,12\cdot 7} \approx 6,73$
(3) $f'(t) = -e^{-0,02t}$
$f'(7) = -e^{-0,02\cdot 7} \approx -0,87$

Seite 119

9

a) $f(t) = 800 - c\cdot e^{-kt}$
$f(0) = 800 - c\cdot e^{0} = 320$
$c = 800 - 320 = 480$
Somit ist $f(t) = 800 - 480\cdot e^{-kt}$.
$397 = 800 - 480\cdot e^{-k}$
$k \approx 0,1748$
$f(t) = 800 - 480e^{-0,1748\cdot t}$

$f(2) \approx 461,61$	$f(3) \approx 515,88$	$f(4) \approx 561,45$
$f(5) \approx 599,71$	$f(6) \approx 631,83$	$f(7) \approx 658,80$
$f(8) \approx 681,44$	$f(9) \approx 700,46$	$f(10) \approx 716,42$

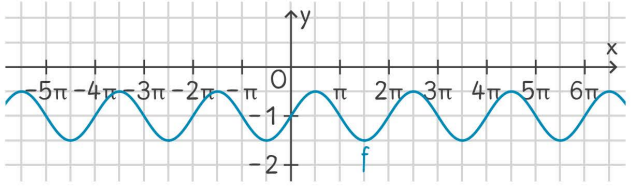
Die Daten in der Tabelle weichen nur geringfügig von den errechneten Daten ab. Man kann daher davon ausgehen, dass sich die Masse des Bestands nach dem Modell des begrenzten Wachstums entwickelt.

b) $f(t) - f(t-1) = 2$
$800 - 480e^{-0,1748t} - (800 - 480e^{-0,1748(t-1)}) = 2$
$800 - 480e^{-0,1748t} - 800 + 480e^{-0,1748t}\cdot e^{0,1748} = 2$
$480e^{-0,1748t}\cdot(-1 + e^{0,1748}) = 2 \quad | : (-1 + e^{0,1748})$
$480^{-0,1748t} = \frac{2}{-1 + e^{0,1748}}$

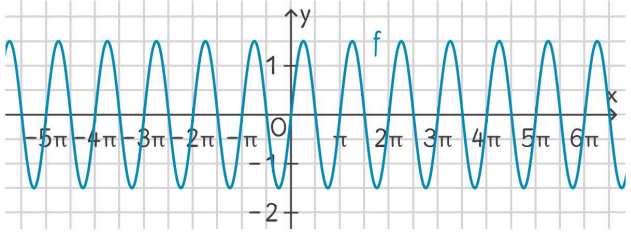
Weitere Äquivalenzumformungen sowie die Anwendung des natürlichen Logarithmus führen zum Ergebnis $t \approx 21,88$. Zwischen dem 21. und dem 22. Tag nach Beobachtungsbeginn vergrößert sich die Masse des Bestands innerhalb eines Tages um 2 mg.

G **12**

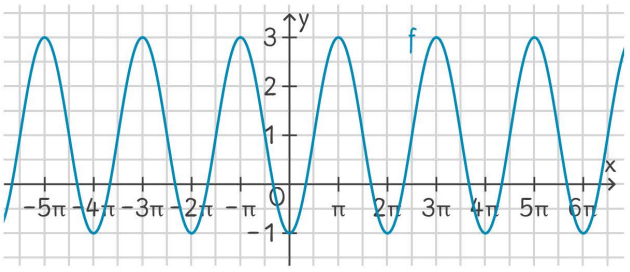
a)



b)



c)



Seite 122

6

a) $f'(x) = \frac{1}{x}$ **b)** $f'(x) = \frac{2}{x}$

c) $f'(x) = 3e^{3x} + \frac{1}{x}$ **d)** $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$

Seite 123

12

a) Die Aussage ist wahr. Begründung: $\bar{f}$ mit $\bar{f}(x) = e^{x+2}$ ist die Umkehrfunktion der Funktion f. Es gilt $e^{x+2} > 0$ für alle $x \in D_{\bar{f}}$ $(D_f = \mathbb{R}^+ = W_{\bar{f}})$.

b) Die Aussage ist falsch. Begründung: Da $\bar{f}'(x) = e^{x+2} = \bar{f}(x)$ gilt, ist $\bar{f}'(x) > 0$ für alle $x \in D_{\bar{f}}$.

c) Die Aussage ist wahr. Begründung: Da $\bar{f}''(x) = \bar{f}'(x) = e^{x+2}$ ist, gilt $\bar{f}''(x) > 0$.

G **15**

$A = \frac{16,5 - 8}{2} = \frac{8,5}{2} = 4,25$, also ist $a = 4,25$.

$d = 8 + 4,25 = 12,25$

$p = 365$, also ist $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{365} \approx 0,0172$.

Wäre $c = 0$, würde die maximale Tageslänge bei $t = \frac{365}{4}$ auftreten. Da die maximale Tageslänge aber bei $t = 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 21 = 172$ auftritt, gilt $c = 172 - \frac{365}{4} = 80,75$.

Es folgt $f(x) = 4,25\cdot\sin(0,0172(x - 80,75)) + 12,25$.

Seite 124

Klausurtraining

1

a) $f(3) = 3^3 = 27 \Rightarrow P(3\,|\,27)$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$
$x = -4 \Rightarrow P(-4\,|\,16)$

c) $\frac{1}{4}\cdot 2^x = \frac{1}{32} \quad | \cdot 4$
$2^x = \frac{1}{8}$
$x = -3 \Rightarrow P\left(-3\,\middle|\,\frac{1}{32}\right)$

2

$f(x) \to G_4$ $\quad g(x) \to G_1$ $\quad h(x) \to G_5$
$i(x) \to G_2$ $\quad k(x) \to G_3$

3

a) $e^x = 20 \quad | \ln(\,)$
$x = \ln(20) \approx 2{,}996$

b) $2e^x = 5 \quad | : 2$
$e^x = 2{,}5$
$x = \ln(2{,}5) \approx 0{,}916$

c) $0{,}5e^x = 8 \quad | \cdot 2$
$e^x = 16 \quad | \ln(\,)$
$x = \ln(16) \approx 2{,}773$

d) $3e^x = 18{,}2 \quad | : 3$
$e^x = \frac{18{,}2}{3}$
$x = \ln\left(\frac{18{,}2}{3}\right) \approx 1{,}803$

e) $\frac{1}{4}e^x = 3{,}7 \quad | \cdot 4$
$e^x = 14{,}8$
$x = \ln(14{,}8) \approx 2{,}695$

f) $4e^x = 4 \quad | : 4$
$e^x = 1 \quad | \ln(\,)$
$x = \ln(1) = 0$

4

$f'(x) = e^x$
$e^x = 10 \quad | \ln(\,)$
$x = \ln(10) \approx 2{,}303$

5

a) $\int_{-4}^{0}(e^x - x - 1)\,dx = \left[e^x - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-4}^{0} = 1 - (e^{-4} - 4)$
$= 5 - e^{-4} \approx 4{,}98;\ A \approx 4{,}98\,\text{FE}$

b) $\int_{0}^{2}(e^x - x^2 - e^x + 2x)\,dx = \int_{0}^{2}(-x^2 + 2x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{0}^{2}$
$= \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3};\ A = \frac{4}{3}\,\text{FE}$

6

a) $f'(x) = -3e^x;\ F_1(x) = -3e^x;\ F_2(x) = -3e^x + 2$

b) $f'(x) = 0{,}5 \cdot 2e^{0{,}5x+3} = e^{0{,}5x+3};\ F_1(x) = \frac{2}{0{,}5}e^{0{,}5x+3} = 4e^{0{,}5x+3};$
$F_2(x) = 4e^{0{,}5x+3} - 1$

c) $f'(x) = \frac{3}{2}e^{x+3} - 1;\ F_1(x) = \frac{3}{2}e^{x+3} - \frac{1}{2}x^2;$
$F_2(x) = \frac{3}{2}e^{x+3} - \frac{1}{2}x^2 + 1$

d) $f'(x) = -2 \cdot 4e^{-2x} = -8e^{-2x};\ F_1(x) = \frac{4}{-2}e^{-2x} = -2e^{-2x};$
$F_2(x) = -2e^{-2x} + 1$

7

a) $f'(x) = 0{,}5e^{0{,}5x} - 1;\ f''(x) = 0{,}25e^{0{,}5x}$
notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
$0{,}5e^{0{,}5x} - 1 = 0 \quad | + 1$
$0{,}5e^{0{,}5x} = 1 \quad | \cdot 2$
$e^{0{,}5x} = 2 \quad | \ln(\,)$
$0{,}5x = \ln(2)$
$x = 2 \cdot \ln(2) \approx 1{,}39$

hinreichende Bedingung prüfen: $f''(x) \neq 0$
$0{,}25e^{0{,}5 \cdot 1{,}39} \approx 0{,}50 > 0$, es liegt ein Tiefpunkt vor.
$f(1{,}39) = e^{0{,}5 \cdot 1{,}39} - 1{,}39 \approx 0{,}614$
Die Koordinaten des Tiefpunkts lauten $T(1{,}39\,|\,0{,}614)$.

b) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
Es gilt $0{,}25 \cdot e^{0{,}5x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Daher kann der Graph von f keinen Wendepunkt haben.

8

a) $A = \int_{0}^{2}e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{0}^{2} = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \approx 26{,}8\,[\text{FE}]$

b) $A = \int_{-2}^{0}e^{-0{,}5x}\,dx = \left[\frac{1}{-0{,}5} \cdot e^{-0{,}5x}\right]_{-2}^{0} = -2e^0 - (-2 \cdot e^1)$
$= -2 + 2e \approx 3{,}4\,[\text{FE}]$

c) $A = \int_{-1}^{3}e^{3x+1}\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x+1}\right]_{-1}^{3} = \frac{1}{3}e^{10} - \frac{1}{3}e^{-2} \approx 7342{,}1\,[\text{FE}]$

9

a) $f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x;\ f''(x) = \ln(5)^2 \cdot 5^x$

b) $f'(x) = 3 \cdot \ln(1{,}2) \cdot 1{,}2^x;\ f''(x) = 3 \cdot \ln(1{,}2)^2 \cdot 1{,}2^x$

c) $f'(x) = -2\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x;\ f''(x) = -2\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Seite 125

10

a) $F(x) = \frac{1}{\ln(4)} \cdot 4^x$
$A = \int_{0}^{3}4^x\,dx = \left[\frac{1}{\ln(4)} \cdot 4^x\right]_{0}^{3} = \frac{63}{\ln(4)} \approx 45{,}44\,[\text{FE}]$

b) $F(x) = \frac{1}{\ln(0{,}25)} \cdot 0{,}25^x$
$A = \int_{-1}^{2}0{,}25^x\,dx = \left[\frac{1}{\ln(0{,}25)} \cdot 0{,}25^x\right]_{-1}^{2} = \frac{63}{16\ln(4)} \approx 2{,}84\,[\text{FE}]$

c) $F(x) = \frac{3}{\ln(2{,}5)} \cdot 2{,}5^x$
$A = \int_{-5}^{0}3 \cdot 2{,}5^x\,dx = \left[\frac{3}{\ln(2{,}5)} \cdot 2{,}5^x\right]_{-5}^{0} \approx 3{,}24\,[\text{FE}]$

11

a) $f(0) = 300$ und $a = 1{,}4$, also

$f(x) = 300 \cdot 1{,}4^x = 300 \cdot e^{\ln(1{,}4)x} = 300 \cdot e^{0{,}34x}$

b) $f(0) = 4000$, also $f(x) = 4000 \cdot a^x$

$4000 \cdot a^6 = 512 \quad | : 4000$

$a^6 = \frac{512}{4000} \quad | (\,)^{\frac{1}{6}}$

$a \approx 0{,}71$

$f(x) = 4000 \cdot 0{,}71^x = 4000 \cdot e^{\ln(0{,}71)x} = 4000 \cdot e^{-0{,}34x}$

c) $f(0) = 40$, also $f(x) = 40 \cdot a^x$

$40 \cdot a^{-3} = 120 \quad | : 40$

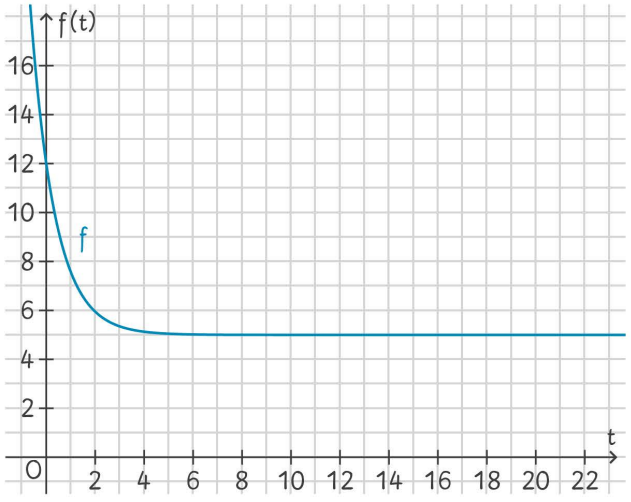
$a^{-3} = 3 \quad | (\,)^{-\frac{1}{3}}$

$a \approx 0{,}69$

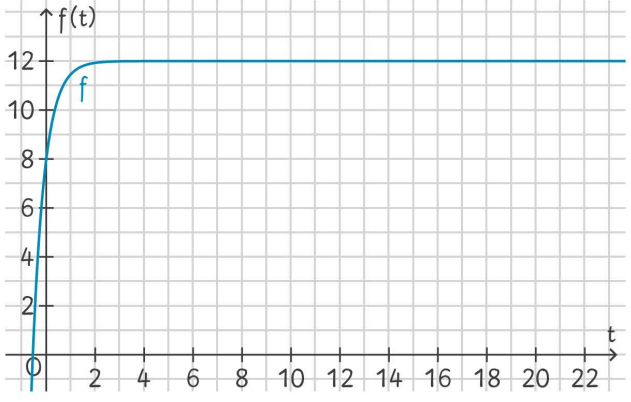
$f(x) = 40 \cdot 0{,}69^x = 40 \cdot e^{\ln(0{,}69)x} = 40 \cdot e^{-0{,}37x}$

12

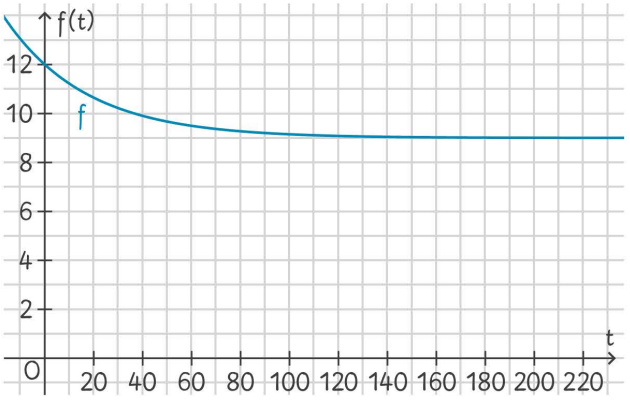
a) (1) $f(0) = 5 + 7e^0 = 12$; $S = 5$



(2) $f(0) = 12 - 4e^0 = 8$; $S = 12$



(3) $f(0) = 9 + 3e^0 = 12$; $S = 9$



b) (1) $f(5) = 5 + 7e^{-5} \approx 5{,}047$

(2) $f(5) = 12 - 4e^{-2 \cdot 5} \approx 12$

(3) $f(5) = 9 + 3e^{-0{,}03 \cdot 5} \approx 11{,}58$

c) (1)

$5 + 7e^{-t} = 10 \quad | - 5$

$7e^{-t} = 5 \quad | : 7$

$e^{-t} = \frac{5}{7} \quad | \ln(\,)$

$-t = \ln\left(\frac{5}{7}\right) \quad | \cdot (-1)$

$t = -\ln\left(\frac{5}{7}\right) \approx 0{,}34$

(2)

$12 - 4e^{-2t} = 10 \quad | - 12$

$-4e^{-2t} = -2 \quad | : (-4)$

$e^{-2t} = \frac{1}{2} \quad | \ln(\,)$

$-2t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad | : (-2)$

$t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) : (-2) \approx 0{,}35$

(3)

$9 + 3e^{-0{,}03 \cdot t} = 10 \quad | - 9$

$3e^{-0{,}03 \cdot t} = 1 \quad | : 3$

$e^{-0{,}03 \cdot t} = \frac{1}{3} \quad | \ln(\,)$

$-0{,}03t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad | : (-0{,}03)$

$t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) : (-0{,}03) \approx 36{,}62$

d) (1) $f'(t) = -7e^{-t}$, $f'(2) = -7e^{-2} \approx -0{,}95$

Die Wachstumsgeschwindigkeit nach 2 Tagen liegt bei ca. $-0{,}95$ Individuen pro Tag.

(2) $f'(t) = 8e^{-2t}$, $f'(2) = 8e^{-4} \approx 0{,}15$

Die Wachstumsgeschwindigkeit nach 2 Tagen liegt bei ca. 0,15 Individuen pro Tag.

(3) $f'(t) = -0{,}09e^{-0{,}03t}$, $f'(2) = -0{,}09e^{-0{,}06} \approx -0{,}08$

Die Wachstumsgeschwindigkeit nach 2 Tagen liegt bei ca. $-0{,}08$ Individuen pro Tag.

13

a) $f(t) = S - ce^{-kt}$

$f(0) = 0;\ S = 30;\ P(1|10)$

$f(0) = 30 - ce^0 = 30 - c = 0,$ also $c = 30$

$30 - 30e^{-k\cdot 1} = 10 \quad | -30$

$-30e^{-k} = -20 \quad | :(-30)$

$e^{-k} = \frac{2}{3} \quad | \ln(\,)$

$-k = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad | \cdot(-1)$

$k = -\ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0{,}41$

$f(t) = 30 - 30e^{-0{,}41t}$

b) $f(6) = 30 - 30e^{-0{,}41\cdot 6} \approx 27{,}44$

Die Mitarbeiterin hat recht. Laut Modell wird der Marktanteil nach einem halben Jahr bei ca. 27,44 % liegen.

c) $f'(t) = 0{,}41\cdot 30e^{-0{,}41t} = 12{,}3e^{-0{,}41t}$

$f'(6) = 12{,}3e^{-0{,}41\cdot 6} \approx 1{,}05$

Nach einem halben Jahr steigt der Marktanteil mit einer Geschwindigkeit von ca. 1,05 % pro Monat.

14

a) $\ln(x) = 10 \quad | e^{(\,)}$

$x = e^{10} \approx 22\,026{,}47$

b) $f'(x) = \frac{1}{x};\ f'(2) = \frac{1}{2}$

$t(x) = \frac{1}{2}x + b$

$\ln(2) = \frac{1}{2}\cdot 2 + n \quad | -1$

$\ln(2) - 1 = n$

$t(x) = \frac{1}{2}x + \ln(2) - 1$

c) $f'(x) = \frac{1}{x} = 0{,}01 \quad | \cdot x$

$1 = 0{,}01x \quad | :0{,}01$

$100 = x$

15

a) $D_f = \mathbb{R}^+;\ W_f = \mathbb{R}$

b) $f'(x) = 4\cdot\frac{1}{x} = \frac{4}{x} > 0$ für alle $x \in D_f$

$y = 4\ln(x)$

$x = 4\ln(y) \quad | :4$

$\frac{1}{4}x = \ln(y) \quad | e^{(\,)}$

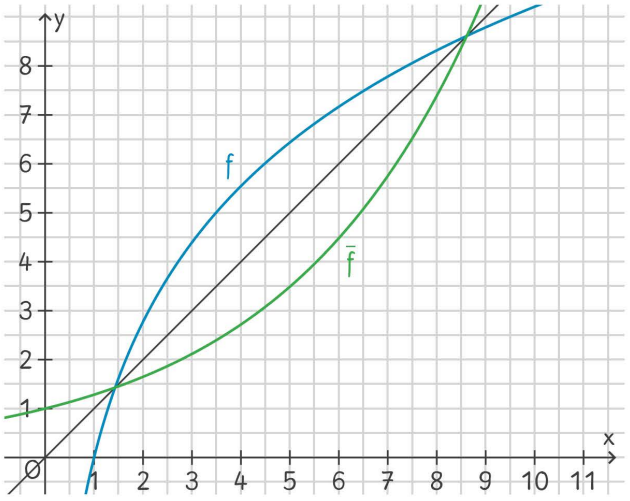
$e^{\frac{1}{4}x} = y$

$\bar{f}(x) = e^{\frac{1}{4}x}$

c) $f''(x) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2} < 0$ für alle $x \in D_f$, also ist der Graph von f rechtsgekrümmt.

d) (1) Für $x \to -\infty$ gilt $\bar{f}(x) \to 0$. Also nähert sich der Graph von f für $x \to 0$ der y-Achse an.

(2) Für $x \to +\infty$ gilt $\bar{f}(x) \to +\infty$. Daher folgt: für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$



16

a) A: $D_f = \mathbb{R};\ W_f = (-1; +\infty)$

B: $D_f = \mathbb{R};\ W_f = \mathbb{R}^+$

C: $D_f = \mathbb{R};\ W_f = \mathbb{R}^+$

b) A: $f'(x) = 4e^{4x} > 0$ für alle $x \in D_f$.

Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend und damit umkehrbar auf $\mathbb{R}$.

$y = e^{4x} - 1$

$x = e^{4y} - 1 \quad | +1$

$x + 1 = e^{4y} \quad | \ln(\,)$

$\ln(x + 1) = 4y \quad | :4$

$\frac{1}{4}\ln(x + 1) = y$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{4}\ln(x + 1)$ mit $D_{\bar{f}} (-1; +\infty)$ und $W_{\bar{f}} = \mathbb{R}$

B: $f'(x) = 0{,}5e^{0{,}5x + 1} > 0$ für alle $x \in D_f$

Die Funktion f ist streng monoton steigend und damit umkehrbar auf $\mathbb{R}$.

$y = e^{0{,}5x + 1}$

$x = e^{0{,}5y + 1} \quad | \ln(\,)$

$\ln(x) = 0{,}5y + 1 \quad | -1$

$\ln(x) - 1 = 0{,}5y \quad | \cdot 2$

$2\ln(x) - 2 = y$

$\bar{f}(x) = 2\ln(x) - 2$ mit $D_{\bar{f}} = \mathbb{R}^+$ und $W_{\bar{f}} = \mathbb{R}$

C: $f'(x) = -2e^{-2x + 3} < 0$ für alle $x \in D_f$

Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton fallend und damit umkehrbar auf $\mathbb{R}$.

$y = e^{-2x + 3}$

$x = e^{-2y + 3} \quad | \ln(\,)$

$\ln(x) = -2y + 3 \quad | -3$

$\ln(x) - 3 = -2y \quad | :(-2)$

$-\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{3}{2} = y$

$\bar{f}(x) = -\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{3}{2}$ mit $D_{\bar{f}} = \mathbb{R}^+$ und $W_{\bar{f}} = \mathbb{R}$

Seite 126

17

a) $0 = 2 - e^{-x+3}$

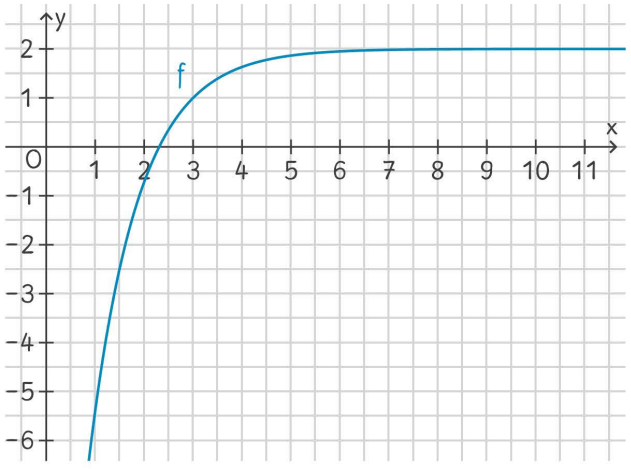
$x = -\ln(2) + 3 \approx 2{,}31$

b) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

Da $f'(x) = e^{-x+3} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, hat die Funktion f keine Extremstellen.

c) $f''(x) = -e^{-x+3} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph von f ist rechtsgekrümmt.

d)



e) $f(3) = 2 - e^{-3+3} = 1$

$f'(3) = e^{-3+3} = 1$

$t(x) = 1 \cdot x + b$

$1 = 1 \cdot 3 + b \quad | -3$

$-2 = b$

$t(x) = x - 2$

$0 = x - 2 \quad | +2$

$x = 2$

$V = \pi \cdot \int_0^2 (x-2)^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) \, dx$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right]_0^2 = \frac{8}{3}\pi;\ V = \frac{8}{3}\pi \text{ VE}$

18

a) Die Aussage ist falsch. Begründung:

$e^{-2x} - 1 = 0$

$e^{-2x} = 1$

$-2x = \ln(1) = 0$

Der Graph von f schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 0$.

b) Die Aussage ist wahr. Begründung: $f'(x) = -2e^{-2x}$, $f''(x) = 4e^{-2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f' ist monoton steigend.

c) Die Aussage ist wahr. Begründung: $f'(x) \neq 0$, da $-2e^{-2x} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) Die Aussage ist falsch. Begründung: $f'''(x) = -8e^{-2x} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f' ist rechtsgekrümmt.

19

a) $0 = -e^x + 2x + 2$

$x_1 = -0{,}77$ und $x_2 \approx 1{,}68$

b) $\int_{-0{,}77}^{1{,}68} (-e^x + 2x + 2) \, dx = \left[-e^x + x^2 - 2x\right]_{-0{,}77}^{1{,}68} \approx 2{,}23 \text{ [FE]}$

c) $f'(x) = -e^x + 2$; $f''(x) = -e^x$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$0 = -e^x + 2 \quad | +e^x$

$e^x = 2 \quad | \ln(\,)$

$x = \ln(2)$

hinreichende Bedingung prüfen: $f''(x) \neq 0$

$f''(\ln(2)) = -e^{\ln(2)} = -2 < 0$

$f(\ln(2)) = -e^{\ln(2)} + 2 \cdot \ln(2) + 2 = 2\ln(2) \Rightarrow H(\ln(2) \,|\, 2\ln(2))$

d) $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot (1{,}68 - (-0{,}77)) \cdot 2 \cdot \ln(2) = 2{,}45 \cdot \ln(2) \approx 1{,}70$

$\frac{1{,}70}{2{,}23} = 0{,}76$

Die Fläche des Dreiecks ist um ca. 24 % kleiner.

20

a) Es gilt $c = 200$. Laut Modell befinden sich 200 Kröten zu Beobachtungsbeginn im Biotop. Da die Wachstumskonstante $k = 0{,}07$ positiv ist, geht man von einem Wachstum des Bestands aus.

b) $e^{0{,}07} \approx 1{,}0725$

Der Krötenbestand wächst jährlich um ca. 7,25 %.

c) $f(3) = 200\,e^{0{,}07 \cdot 3} \approx 246{,}74$

Laut Modell leben nach 3 Jahren ca. 247 Kröten im Biotop.

d) $200 \cdot e^{0{,}07 \cdot t} = 280 \quad | : 200$

$e^{0{,}07 \cdot t} = 1{,}4 \quad | \ln(\,)$

$0{,}07t = \ln(1{,}4) \quad | : 0{,}07$

$t = \ln(1{,}4) : 0{,}07 \approx 4{,}81$

Nach knapp 5 Jahren ist im Biotop mit einer Krötenanzahl von 280 Kröten zu rechnen.

e) $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{246{,}74 - 200}{3} = 15{,}58$

Die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit des Krötenbestands in den ersten 3 Jahren liegt bei ca. 16 Kröten pro Jahr.

f) $f'(t) = 14\,e^{0{,}07t}$

$f'(3) = 14\,e^{0{,}07 \cdot 3} \approx 17{,}27$

Nach 3 Jahren ist die momentane Wachstumsgeschwindigkeit mit ca. 17,27 Kröten pro Jahr nur minimal größer als die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit innerhalb der ersten drei Jahre.

g) $f(6) = 200 \cdot e^{0{,}07 \cdot 6} \approx 304$

$g(6) = 600 - 455\,e^{-0{,}072 \cdot 6} \approx 304$

$f'(6) = 14\,e^{0{,}07 \cdot 6} \approx 21$

$g'(t) = 32{,}76\,e^{-0{,}072t}$

$g'(6) = 32{,}76\,e^{-0{,}072 \cdot 6} \approx 21$

Damit die Graphen von f und g an der Stelle $t = 6$ knickfrei ineinander übergehen, muss $f(6) = g(6)$ und $f'(6) = g'(6)$ gelten. Der Krötenbestand, der durch die beiden Funktio-

nen f und g beschrieben wird, kann zum Zeitpunkt $t = 6$ keine zwei verschiedenen Werte annehmen. Das gleiche gilt für die Wachstumsgeschwindigkeit, die zum Zeitpunkt $t = 6$ durch die Funktionen f' und g' beschrieben wird.
Hinweis: Durch die Arbeit mit Modellfunktionen wird eine völlige Gleichheit der Werte nicht erreicht.

h) Im exponentiellen Wachstumsmodell wird davon ausgegangen, dass der Krötenbestand immer weiter wächst. Da sich die Wachstumsbedingungen mit größer werdendem Bestand in einem Biotop jedoch verschlechtern (z. B. Platzangebot, Nahrungssituation), muss die Wachstumsrate mit der Zeit geringer werden.
Im Modell gibt es die Schranke $S = 600$. Es wird davon ausgegangen, dass der Bestand nicht endlos wächst und eine Gesamtanzahl von 600 Kröten nicht überschritten wird.

Seite 127

21

a) $l(0) = 3{,}5 - 3{,}1e^{-k\cdot 0} = 0{,}4$
Es wird erwartet, dass ein Tigerpython beim Schlüpfen eine Länge von 40 cm besitzt.

b) $S = 3{,}5$
Laut Modell wird ein ausgewachsener Tigerpython maximal 3,5 m lang.

c)
$$\begin{aligned} l(16) = 3{,}5 - 3{,}1e^{-k\cdot 16} &= 1{,}25 && \mid -3{,}5 \\ -3{,}1e^{-16k} &= -2{,}25 && \mid :(-3{,}1) \\ e^{-16k} &= \frac{45}{62} && \mid \ln(\,) \\ -16k &= \ln\left(\frac{45}{62}\right) && \mid :(-16) \\ k &= \ln\left(\frac{45}{62}\right) : (-16) \approx 0{,}02 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3{,}5 - 3{,}1e^{-0{,}02\cdot t} &= 3 && \mid -3{,}5 \\ -3{,}1e^{-0{,}02\cdot t} &= -0{,}5 && \mid :(-3{,}1) \\ e^{-1{,}02\cdot t} &= \frac{5}{31} && \mid \ln(\,) \\ -0{,}02t &= \ln\left(\frac{5}{31}\right) && \mid :(-0{,}02) \\ t &= \ln\left(\frac{5}{31}\right) : (-0{,}02) \approx 91{,}2 \end{aligned}$$
$91{,}2 : 12 = 7{,}6$
Nach ca. 7,6 Jahren sollte Mareikes Schlange eine Länge von 3 m haben.

e) $l'(t) = 0{,}062e^{-0{,}02x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist die Funktion l streng monoton steigend und somit umkehrbar.
Mit der Umkehrfunktion kann man aus einer gegebenen Länge y (mit $0{,}4 \le y \le 3{,}5$) berechnen, zu welchem Zeitpunkt t die Schlange die Länge y hat.

f) Zu welchem Zeitpunkt t wächst die Schlange in den folgenden zwei Monaten um 3 cm?

g)
$$\begin{aligned} y &= 3{,}5 - 3{,}1e^{-kt} \\ t &= 3{,}5 - 3{,}1e^{-ky} && \mid -3{,}5 \\ t - 3{,}5 &= -3{,}1e^{-ky} && \mid :(-3{,}1) \\ \frac{t-3{,}5}{-3{,}1} &= e^{-ky} && \mid \ln(\,) \\ \ln\left(\frac{t-3{,}5}{-3{,}1}\right) &= -ky && \mid :(-k) \\ -\frac{1}{k}\cdot\ln\left(\frac{3{,}5-t}{3{,}1}\right) &= y \end{aligned}$$
$\bar{l}(t) = -\frac{1}{k}\cdot\ln\left(\frac{3{,}5-t}{3{,}1}\right)$
Für $k = 0{,}02$: $\bar{l}(t) = -50\cdot\ln\left(\frac{3{,}5-t}{3{,}1}\right)$
Die Lösung y der Gleichung $\bar{l}(y + 0{,}03) - \bar{l}(y) = 2$ liefert die Länge der Schlange zu dem Zeitpunkt t, an dem sie in den folgenden zwei Monaten um 3 cm wächst. Der Zeitpunkt t in der Fragestellung von Teilaufgabe f) ist $t = \bar{l}(y)$.

22

a)
$$\begin{aligned} 8 - 8e^{-0{,}5t} &= 4 && \mid -8 \\ -8e^{-1{,}5t} &= -4 && \mid :(-8) \\ e^{-0{,}5t} &= 0{,}5 && \mid \ln(\,) \\ -0{,}5t &= \ln(0{,}5) && \mid :(-0{,}5) \\ t &\approx 1{,}39 \end{aligned}$$
Nach etwa 1,4 Sekunden ist die Durchflussgeschwindigkeit $4\frac{l}{s}$.

b) Die Funktion f mit $f(t) = 8 - 8e^{-0{,}5t}$ beschreibt ein begrenztes Wachstum mit der oberen Schranke $S = 8$.
Zudem gilt $f'(t) = 4e^{-0{,}5t} > 0$. Die Durchflussgeschwindigkeit nimmt während des Tankprozesses monoton zu.

c)
$$\begin{aligned} f'(t) = 4e^{-0{,}5t} &< 0{,}1 && \mid :4 \\ e^{-0{,}5t} &< 0{,}025 && \mid \ln(\,) \\ -0{,}5t &< \ln(0{,}025) && \mid :(-0{,}5) \\ t &< \ln(0{,}025) : (-0{,}5) \approx 7{,}37 \end{aligned}$$
Nach etwa 7,4 Sekunden nimmt die Durchflussgeschwindigkeit um weniger als $0{,}1\frac{l}{s^2}$ zu.

d) $F'(t) = -0{,}5\cdot 16e^{-0{,}5t} + 8 = -8e^{-0{,}5t} + 8 = f(t)$

e) $F(0) = 16e^0 + 8\cdot 0 = 16$ und $500 - 16 = 484$
$F(t) = 16e^{-0{,}5t} + 8t + 484$

f) $F(t) = 16e^{-0{,}5t} + 8t + 484 = 4800$
$t_1 \approx -11{,}24$ und $t_2 = 539{,}5$
$539{,}5 : 60 \approx 540 : 60 = 9$
Nach etwa 9 Minuten ist der Tank gefüllt.

g) Da $f(x) < 8$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist die Durchflussgeschwindigkeit beim Betanken des ersten Tanks geringer als beim zweiten Tank. Da beide Tanks dieselbe anfängliche Füllmenge aufweisen, ist der zweite Tank schneller gefüllt.

23

a) $f_t'(x) = 0{,}5t - \frac{0{,}5}{x}$; $f_t''(x) = \frac{0{,}5}{x^2}$

notwendige Bedingung: $f_t'(x) = 0$

$0 = 0{,}5t - \frac{0{,}5}{x} \quad \left| + \frac{0{,}5}{x}\right.$

$\frac{0{,}5}{x} = 0{,}5t \quad \left| \cdot x \right. \quad \left| : 0{,}5t \right.$

$\frac{1}{t} = x$

hinreichende Bedingung prüfen: $f_t''(x) \neq 0$

$f_t''\left(\frac{1}{t}\right) = 0{,}5t^2 > 0$

$f_t\left(\frac{1}{t}\right) = 0{,}5t \cdot \frac{1}{t} - 0{,}5\ln\left(\frac{1}{t}\right) = 0{,}5 - 0{,}5\ln\left(\frac{1}{t}\right)$

$T\left(\frac{1}{t} \middle| 0{,}5 - 0{,}5\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)$

(1) $1 = 0{,}5 - 0{,}5\ln\left(\frac{1}{t}\right)$

$e = t$

(2) $0 = 0{,}5 - 0{,}5\ln\left(\frac{1}{t}\right)$

$\frac{1}{e} = t$

b) notwendige Bedingung: $f_t''(x) = 0$

$\frac{0{,}5}{x^2} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{\neq 0}$

Der Graph von f_t hat somit keinen Wendepunkt.

c) $f_0(x) = 0{,}5 \cdot (-\ln(x))$

$0 = -0{,}5 \cdot \ln(x)$

$1 = x$

d)
$$\lim_{a \to 0}\left(\int_a^1 f_0(x)\,dx\right) = \lim_{a \to 0}\left(\int_a^1 0{,}5 \cdot (-\ln(x))\,dx\right)$$
$$= \lim_{a \to 0}\left[0{,}5 \cdot (x - x \cdot \ln(x))\right]_a^1$$
$$= \lim_{a \to 0}\left[0{,}5x - 0{,}5x \cdot \ln(x)\right]_a^1$$
$$= \lim_{a \to 0}\left(0{,}5 - (\underbrace{0{,}5a}_{\to 0} - \underbrace{0{,}5 \cdot a \cdot \ln(a)}_{\to 0})\right) = 0{,}5$$

IV Weitere Funktionen

Seite 135

Check-in

1

a) Man liest die Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ und $x_3 = -1$ ab.
Um die Symmetrie zu prüfen, bildet man $f(-x)$ und vergleicht mit $f(x)$ und $-f(x)$.
$f(x) = x(x^2 - 2x - 3) = x^3 - 2x^2 - 3x$
$f(-x) = -x^3 - 2x^2 + 3x \neq f(x)$
$-f(-x) = x^3 + 2x^2 - 3x \neq f(x)$
Der Graph von f ist weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Koordinatenursprung.
Für $x \to -\infty$ strebt $f(x)$ nach $-\infty$. Für $x \to +\infty$ strebt $f(x)$ nach $+\infty$.

b) $f(x) = x^4 - 6x^2 = x^2(x^2 - 6) = 0$ für $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{6}$ und $x_3 = -\sqrt{6}$
Der Funktionsterm von f hat nur gerade Exponenten, also ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse.
Für $x \to -\infty$ strebt $f(x)$ nach $+\infty$. Für $x \to +\infty$ strebt $f(x)$ nach $+\infty$.

2

a) $f'(x) = 12x^3 - 15x^2$; $f''(x) = 36x^2 - 30x$; $f'''(x) = 72x - 30$
Notwendige Bedingung für Extremstellen:
$f'(x) = 12x^3 - 15x^2 = 3x^2(4x - 5) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 1{,}25$
Hinreichende Bedingung für Extremstellen: $f''(0) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ daher hat f bei $x_1 = 0$ kein Extremum.
$f''(1{,}25) = 36 \cdot 1{,}25^2 - 30 \cdot 1{,}25 = 18{,}75 > 0$, also hat f bei $x_2 = 1{,}25$ ein lokales Minimum.
y-Koordinate: $f(1{,}25) \approx 1{,}86$
Der Graph von f hat den Tiefpunkt $T(1{,}25 \mid 1{,}86)$.
Notwendige Bedingung für Wendestellen:
$f''(x) = 36x^2 - 30x = 6x(6x - 5) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_3 = \frac{5}{6}$
Hinreichende Bedingung für Wendestellen: $f'''(0) = -30 \neq 0$
Da $f'(0) = f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$ gilt, hat der Graph von f bei $x_1 = 0$ den Sattelpunkt $S(0 \mid 4{,}3)$.
$f'''\left(\frac{5}{6}\right) = 72 \cdot \frac{5}{6} - 30 = 30 > 0$, also hat f bei $x_3 = \frac{5}{6}$ eine Wendestelle.
y-Koordinate: $f\left(\frac{5}{6}\right) = 3\left(\frac{5}{6}\right)^4 - 5\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 4{,}3 \approx 2{,}85$
Der Graph von f hat den Wendepunkt $W\left(\frac{5}{6} \middle| 2{,}85\right)$.

b) Die Wendetangente im Sattelpunkt S ist waagerecht, hat also die Steigung 0 und einen Steigungswinkel der Größe 0°.
Wendetangente in W:
$m = f'\left(\frac{5}{6}\right) = 12 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -3{,}47\overline{2}$
$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(-3{,}47\overline{2}) \approx -73{,}9°$
Die Größe des Steigungswinkels beträgt $-73{,}9°$, die Tangente wurde gegenüber der x-Achse um 73,9° im Uhrzeigersinn gedreht.

3

a) individuelle Lösung, zum Beispiel: $A \approx 4\,FE$

b)
$$-\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = -\left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_2^3$$
$$= -\frac{8}{6} + 4 + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{8}{6} - 4\right)$$
$$= \frac{23}{6};\ A = \frac{23}{6}\,FE$$

4

a) $f'(x) = 2{,}5e^{2x}$; $f'(1) = 2{,}5e^2 \approx 18{,}47$

b) $f'(x) = -0{,}3e^{3x+1}$; $f'(1) = -0{,}3e^4 \approx -16{,}38$

c) $f'(x) = -0{,}4 \cdot e^{x+3}$; $f'(1) = -0{,}4 \cdot e^4 \approx -21{,}84$

5

a) $e^{2x} = 2$

$2x = \ln(2)$

$x = 0{,}5 \cdot \ln(2) \approx 0{,}35$

b) $e^{2x+1} = 1$

$2x + 1 = \ln(1) = 0$

$x = -0{,}5$

c) $e^{0{,}5x} = 0{,}5$

$0{,}5x = \ln(0{,}5)$

$x = 2 \cdot \ln(0{,}5) \approx -1{,}39$

6

a) Amplitude $A = 2$, Periode $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$

b) $2\sin(0{,}5x) = 0$

Die Periode von f ist 4π, das heißt, f hat die Nullstellen 0, 2π und 4π im angegebenen Intervall.

c) (1) $g(x) = 2\sin(0{,}5x) - 2$

Da der Graph von g um 2 Einheiten nach unten verschoben ist, ist das Maximum von f eine Nullstelle von g, d.h. $g(x) = 0$ für $x = \pi$.

(2) $g(x) = 2\sin(0{,}5(x - \pi))$

Die Verschiebung bewirkt, dass die Nullstellen von g bei den Extremstellen von f liegen. Dies sind $x = \pi$ und $x = 3\pi$.

Seite 140

4

a) $f'(x) = -3{,}5 \cdot \cos(x)$ **b)** $f'(x) = -0{,}4 \cdot \sin(x)$ **c)** $f'(x) = 1 - \sin(x)$

5

a) $F(x) = 0{,}5\sin(x) + 0{,}5x$

$$A = \int_0^{\pi} f(x)\,dx = [F(x)]_0^{\pi}$$
$$= (0{,}5\sin(\pi) + 0{,}5\pi) - (0{,}5\sin(0) + 0{,}5 \cdot 0)$$
$$= 0{,}5\pi\,[\text{FE}]$$

b) $F(x) = \frac{1}{2}\cos(x) + 0{,}5x$

$$A = \int_{0{,}5\pi}^{2{,}5\pi} f(x)\,dx = [F(x)]_{0{,}5\pi}^{2{,}5\pi}$$
$$= (0{,}5\cos(2{,}5\pi) + 0{,}5 \cdot 2{,}5\pi)$$
$$- (0{,}5\cos(0{,}5\pi) + 0{,}5 \cdot 0{,}5\pi)$$
$$= 0 + 1{,}25\pi - (0 + 0{,}25\pi) = \pi\,[\text{FE}]$$

6

a) $d = 74$, $u = 74 \cdot \pi$

Das Umadum benötigt für eine Umdrehung 30 Minuten, also ist $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15}$.

b) Der Radius des Umadums entspricht der Amplitude, also $r = a = 37$. Die Höhe beträgt 4 m mehr als der Durchmesser des Riesenrades. Daher kommen zum Radius 4 m dazu, um die Verschiebung nach oben darzustellen, also $d = 37 + 4 = 41$.

c) Mit einem MMS ermittelt man die Maximal- und Minimalstellen von h' und erhält $x_1 = 0$, $x_2 = 15$ und $x_3 = 30$.

Seite 142

14

a) $f'(x) = 2\cos(x)$; $g'(x) = 2x$

$2\cos(x) = 2x$

$\cos(x) = x$

$x \approx 0{,}7391$

Die Funktionen f und g haben im angegebenen Intervall in $P(0{,}7391\,|\,1{,}3472)$ und $Q(0{,}7391\,|\,0{,}5462)$ parallele Tangenten.

b) $f'(x) = \cos(x) - 2\sin(x)$; $g'(x) = 3x^2$

$f'(x) = g'(x)$ für $x \approx 0{,}3231$

Die Funktionen f und g haben im angegebenen Intervall in $P(0{,}3231\,|\,2{,}214)$ und $Q(0{,}3231\,|\,0{,}0337)$ parallele Tangenten.

15

a) $L(0) = 12 + 6{,}24 \cdot \sin(0) = 12$

$L(6) = 12 + 6{,}24 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) = 12 + 6{,}24 \cdot \sin(\pi) = 12$

Nach diesem Modell gibt es am 21. März und am 21. September in Stockholm 12 Stunden Tageslicht.

b) Mithilfe eines MMS bestimmt man das Maximum und Minimum der Funktion L.

Nach diesem Modell ist der längste Tag in Stockholm am 21. Juni mit 18,24 Stunden Tageslicht. Das entspricht etwa 18 Stunden und 15 Minuten. Der kürzeste Tag ist nach diesem Modell am 21. Dezember mit 5,76 Stunden Tageslicht. Das entspricht etwa 5 Stunden und 45 Minuten.

c) Mit einem MMS lässt man sich die Extremstellen der Ableitung L' oder die Wendestellen der Funktion L anzeigen und erhält $t_3 = 0$, $t_4 = 6$, $t_5 = 12$ usw.

Das heißt, am 21. März und am 21. September ändert sich die Tageslänge am schnellsten.

Die Tageslänge wurde in Teilaufgabe a) ermittelt.

G **18**

x_2x_3-Ebene: A, B, F, G, J

x_2-Achse: B, F

x_1x_2-Ebene: B, E, F, I, L

negative x_3-Achse: G, J

x_1x_3-Ebene: D, F, G, H, I, J, L

Seite 145

5

a) $u \circ v = u(v(x)) = u(2x) = (2x + 7)^3$

b) $v \circ u = v(u(x)) = v((x + 7)^3) = 2(x + 7)^3$

c) $u \circ w = u(w(x)) = u(\sin(x^2 + 1)) = (\sin(x^2 + 1) + 7)^3$

d) $w \circ v = w(v(x)) = w(2x) = \sin((2x)^2 + 1) = \sin(4x^2 + 1)$

6

individuelle Lösung, zum Beispiel: Man kann für $u \circ v$ folgende Funktionen u und v wählen:

a) $u(x) = x^3$; $v(x) = 2x + 3$

b) $u(x) = \sqrt{x}$; $v(x) = x^2 + 1$

c) $u(x) = e^x$; $v(x) = x^2$

d) $u(x) = \sin(x)$; $v(x) = \pi x - 2$

Seite 146

16

a) Es ist $u_2(x) = \frac{2}{x}$.

Man liest $v(0{,}5) = 2$ ab. Daraus ergibt sich

$f_2(0{,}5) = u_2(v(0{,}5)) = u_2(2) = \frac{2}{2} = 1$.

Weiter liest man $v(2) = 4$ ab. Daraus ergibt sich

$f_2(2) = u_2(v(2)) = u_2(4) = \frac{2}{4} = 0{,}5$.

b) Für die Definitionsmenge von f_a gilt $D_{f_a} = \mathbb{R}^{+0}$. Dies ist unabhängig von a, da nur der Nenner ausschlaggebend ist.

c) Es ist $f_a(x) = \frac{a}{3}$, also ist $\frac{a}{v(x)} = \frac{a}{3}$. Somit sind die Stellen gesucht, für die $v(x) = 3$ gilt.

Man liest $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ ab.

d) $f_a(2) = u_a(4) = \frac{a}{4} = 5$, also ist $a = 5 \cdot 4 = 20$.

G **20**

a) $C(-1|2|0)$, $D(-1|-1|0)$, $S(0{,}5|0{,}5|3)$

b) $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{AD}| = |\vec{b} - \vec{a}|$

$= \sqrt{(2-2)^2 + (2-(-1))^2 + 0} = 3$

$s = |\overline{AS}| = |\overline{BS}| = |\overline{CS}| = |\overline{DS}| = |\vec{d} - \vec{s}|$

$= \sqrt{(-1-0{,}5)^2 + (-1-0{,}5)^2 + 9}$

$= \sqrt{2{,}25 + 2{,}25 + 9} = \sqrt{13{,}5} \approx 3{,}67$

c) $V = G \cdot h = 3^2 \cdot 3 = 27$

Für den Oberflächeninhalt bestimmt man zunächst die Höhe der dreieckigen Seitenflächen mit $h_D = \sqrt{s^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{13{,}5 - 2{,}25} \approx 3{,}35$. Für den Inhalt einer Dreiecksfläche gilt $A_D = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3{,}35 \approx 5{,}03$.

Für den Oberflächeninhalt gilt $O = G + 4 \cdot A_D \approx 9 + 20 = 29$.

Seite 149

7

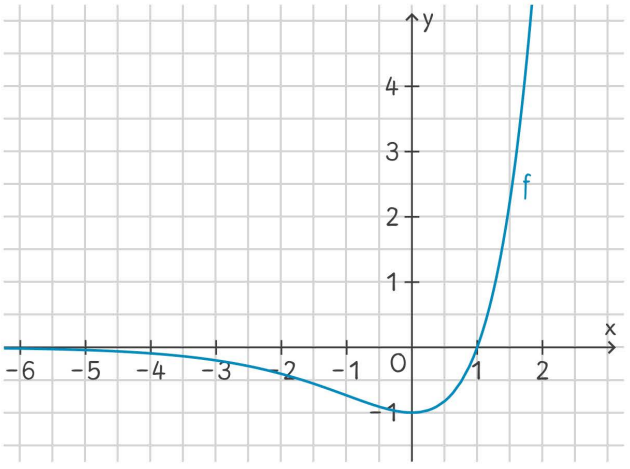
a) Gesucht ist die Nullstelle. $f(x) = 0$, wenn $x - 1 = 0$, da $e^x \neq 0$ für alle x. Also ist $x = 1$.

b) Man nutzt die Produktregel mit $u(x) = x - 1$, $v(x) = e^x$ und $u'(x) = 1$, $v'(x) = e^x$ und erhält $f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x = x \cdot e^x$.

Die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $P(1|f(1))$ ist $m = f'(1) = e^1$.

c) Es gilt $f'(x) = 0$ für $x = 0$. Der Graph von f hat im Punkt $(0|f(0))$, also in $(0|-1)$, eine waagerechte Tangente.

d)



Seite 150

15

a) $u(x) = x$, $v(x) = \sin(x)$ und $u'(x) = 1$, $v'(x) = \cos(x)$

$f'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$f'(0) = \sin(0) + 0 \cdot \cos(0) = 0$

b) Man bestimmt die Ableitung F' von F. Dazu bestimmt man die Ableitung des Terms $x \cdot \cos(x)$ mithilfe der Produktregel: $u(x) = x$, $v(x) = \cos(x)$ und $u'(x) = 1$, $v'(x) = -\sin(x)$ und erhält $(x \cdot \cos(x))' = 1 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x) = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$.

Daraus ergibt sich

$F'(x) = \cos(x) - (\cos(x) - x \cdot \sin(x)) = x \cdot \sin(x) = f(x)$.

c) $A = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) = [\sin(x) - x \cdot \cos(x)]_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = 2\pi$; $A = 2\pi\,\text{FE}$

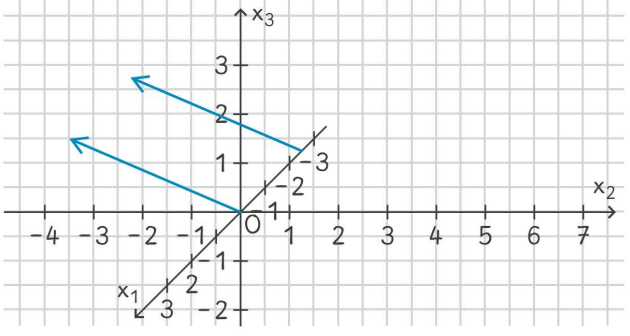
G **18**

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -3-0 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\vec{v}| = \sqrt{1+9+4} \approx 3{,}74$

b) $\vec{d} = \vec{c} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ -2-3 \\ -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der Vektor $\vec{v}$ verschiebt den Punkt C auf den Punkt $D(0|-5|-1)$.

c) individuelle Lösung, zum Beispiel:



Seite 152

6

a) $D_f = \mathbb{R}$

$u(v) = 4\sin(v)$, $v(x) = 0{,}2x$ und $u'(v) = 4\cos(v)$, $v'(x) = 0{,}2$

$f'(x) = 0{,}2 \cdot 4\cos(0{,}2x) = 0{,}8\cos(0{,}2x)$

b) $D_f = \mathbb{R}$

$u(v) = -3\cos(v)$, $v(x) = x^2 + 2$ und $u'(v) = 3\sin(v)$,

$v'(x) = 2x$

$f'(x) = 2x \cdot 3\sin(x^2 + 2) = 6x \cdot \sin(x^2 + 2)$

c) $D_f = \mathbb{R}$

$u(v) = 0{,}7e^v$, $v(x) = -2x + 1$ und $u'(v) = 0{,}7e^v$, $v'(x) = -2$

$f'(x) = -2 \cdot 0{,}7e^{-2x+1} = -1{,}4e^{-2x+1}$

d) $D_f = \mathbb{R}$

$u(v) = e^v$, $v(x) = -0{,}2x + 3$ und $u'(v) = e^v$, $v'(x) = -0{,}2$

$f'(x) = -0{,}2 \cdot e^{-0{,}2x+3}$

e) $D_f = \mathbb{R}^{>-1}$

$u(v) = 3\ln(v)$, $v(x) = x + 1$ und $u'(v) = \frac{3}{v}$, $v'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{3}{x+1}$

f) $D_f = \mathbb{R}^+$; $f(x) = x^{-1} + \ln(3x)$

$u(v) = \ln(v)$, $v(x) = 3x$ und $u'(v) = \frac{1}{v}$, $v'(x) = 3$

$f'(x) = -x^{-2} + 3 \cdot \frac{1}{3x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

7

a) $D_f = \mathbb{R}$

$u(v) = \sqrt{v} = v^{\frac{1}{2}}$, $v(x) = x^2 + 5$ und $u'(v) = \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}$, $v'(x) = 2x$

$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

b) $D_f = \mathbb{R}^{>-0{,}125}$

$u(v) = v^{-\frac{1}{2}}$, $v(x) = 4x + 0{,}5$ und $u'(v) = -\frac{1}{2}v^{-\frac{3}{2}}$, $v'(x) = 4$

$f'(x) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(4x + 0{,}5)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{(4x+0{,}5)^3}}$

c) $D_f = \mathbb{R}^+$

$u(v) = \sqrt{v} = v^{\frac{1}{2}}$, $v(x) = \frac{3}{x} = 3 \cdot x^{-1}$ und $u'(v) = \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}$,

$v'(x) = -3 \cdot x^{-2}$

$f'(x) = -3x^{-2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1{,}5}{x^2 \cdot \sqrt{3x^{-1}}}$

Seite 154

17

a) $D_f = \mathbb{R}$

Schritt 1: e^{x^2-2x} ableiten

$u(v) = e^v$, $u'(v) = e^v$ und $v(x) = x^2 - 2x$, $v'(x) = 2x - 2$

$u'(v(x)) \cdot v'(x) = e^{x^2-2x} \cdot (2x - 2) = (2x - 2)\,e^{x^2-2x}$

Schritt 2: $f(x)$ ableiten

$u(x) = 5x^3$, $u'(x) = 15x^2$ und $v(x) = e^{x^2-2x}$,

$v'(x) = (2x - 2)e^{x^2-2x}$

$f'(x) = 15x^2 \cdot e^{x^2-2x} + 5x^3 \cdot (2x - 2)e^{x^2-2x}$

$= 5(2x^4 - 2x^3 + 3x^2) \cdot e^{x^2-2x}$

b) $D_f = \mathbb{R}$

Schritt 1: $\cos(3x)$ ableiten

$u(v) = \cos(v)$, $u'(v) = -\sin(v)$ und $v(x) = 3x$, $v'(x) = 3$

$u'(v(x)) \cdot v'(x) = -3 \cdot \sin(3x)$

Schritt 2: $f(x)$ ableiten

$u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$ und $v(x) = \cos(3x)$, $v'(x) = -3\sin(3x)$

$f'(x) = 2x \cdot \cos(3x) + x^2 \cdot (-3 \cdot \sin(3x))$

$= 2x \cdot \cos(3x) - 3x^2 \cdot \sin(3x)$

c) $D_f = \mathbb{R}$

$u(v) = \sin(v)$, $u'(v) = \cos(v)$ und $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$

$f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$

d) $D_f = \mathbb{R}$

$u(v) = v^{\frac{2}{3}}$, $u'(v) = \frac{2}{3}v^{-\frac{1}{3}}$ und $v(x) = 2x - 3$, $v'(x) = 2$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{2}{3}(2x - 3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x-3}}$

e) $D_f = \mathbb{R}^{\neq -\frac{1}{3}}$

Schritt 1: $(3x + 1)^{-\frac{1}{5}}$ ableiten

$u(v) = v^{-\frac{1}{5}}$, $u'(v) = -\frac{1}{5}v^{-\frac{6}{5}}$ und $v(x) = 3x + 1$, $v'(x) = 3$

$u'(v(x)) \cdot v'(x) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)(3x + 1)^{-\frac{6}{5}} = -\frac{3}{5\sqrt[5]{(3x+1)^6}}$

Schritt 2: $f(x)$ ableiten

$u(x) = e^x$, $u'(x) = e^x$ und $v(x) = (3x + 1)^{-\frac{1}{5}}$,

$v'(x) = -\frac{3}{5}(3x + 1)^{-\frac{6}{5}}$

$f'(x) = e^x \cdot (3x + 1)^{-\frac{1}{5}} + e^x \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)(3x + 1)^{-\frac{6}{5}}$

$= e^x \cdot \left(\frac{1}{(3x+1)^{\frac{1}{5}}} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{(3x+1)^{\frac{6}{5}}}\right)$

$= e^x \cdot \frac{1}{(3x+1)^{\frac{1}{5}}}\left(1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{(3x+1)^{\frac{5}{5}}}\right)$

$= e^x \cdot (3x + 1)^{-\frac{1}{5}}\left(1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3x+1}\right)$

$= e^x \cdot (3x + 1)^{-\frac{1}{5}}\left(1 - \frac{3}{5(3x+1)}\right)$

f) $D_f = \mathbb{R}^{>\sqrt{2}}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln(x^2 - 2)$

Schritt 1: $\ln(x^2 - 2)$ ableiten

$u(v) = \ln(v)$, $u'(v) = \frac{1}{v}$ und $v(x) = x^2 - 2$, $v'(x) = 2x$

$u'(v(x)) \cdot v'(x) = 2x \cdot \frac{1}{x^2-2} = \frac{2x}{x^2-2}$

Schritt 2: $f(x)$ ableiten

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln(x^2 - 2) + x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2x}{x^2-2} = \frac{\ln(x^2-2)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \frac{2x}{x^2-2}$

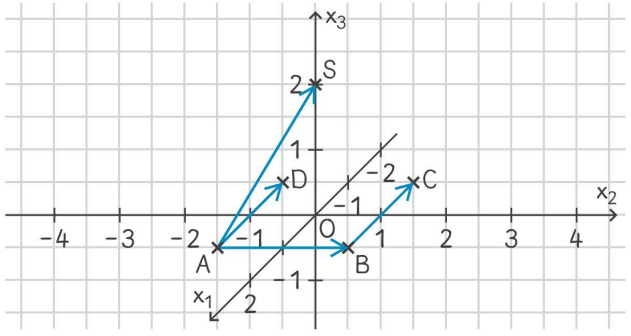
18

a) $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$h'(-1) = f'(g(-1)) \cdot g'(-1)$
Man liest $g(-1) = -1$ und $g'(-1) = 0$ ab, denn der Graph von g hat bei $x = -1$ einen Tiefpunkt, also eine waagerechte Tangente.
$f'(g(-1)) = f'(-1) \neq 0$
Also ist $h'(-1) = f'(-1) \cdot 0 = 0$. Damit ist die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllt.
Außerdem hat h' einen Vorzeichenwechsel bei $x = -1$, denn für $x > -2$ ist $f'(x) < 0$, für $x < -1$ ist $g'(x) < 0$ und für $x > -1$ ist $g'(x) > 0$.
Der Graph von h hat bei $x = -1$ einen Vorzeichenwechsel von + nach − und somit einen Hochpunkt.

b) $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
$k'(-1) = g'(f(-1)) \cdot f'(-1)$
Man liest $f'(-1) = -2$ und $f(-1) = 0$ ab, also ist $g'(f(-1)) = g'(0) = 2$.
Es ist $k'(-1) = g'(f(-1)) \cdot f'(-1) = 2 \cdot (-2) = -4$.

G **21**

a)



Mithilfe einer Skizze ermittelt man B(1|1|0), C(−1|1|0), D(−1|−1|0) und S(0|0|2).

b) Man erkennt leicht, dass die Grundkanten die Seitenlänge 2 haben.
Die Seitenkanten entsprechen der Länge des Vektors $\overrightarrow{AS}$.
$|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{(-1)^2 + 1 + 4} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

c) $V = G \cdot h = 4 \cdot 2 = 8$

Seite 158

6

a) $f(-x) = ((-x)^2 - 4(-x) + 4) \cdot e^{-x} = (x^2 + 4x + 4) \cdot e^{-x} \neq f(x)$, also ist f nicht symmetrisch zur y-Achse.
$-f(-x) = (-x^2 - 4x - 4) \cdot e^{-x} \neq f(x)$, also ist f nicht symmetrisch zum Koordinatenursprung.

b) Nullstellen: $f(x) = 0$
Da $e^x \neq 0$ für alle x gilt, betrachtet man nur $(x^2 - 4x + 4) = 0$.
Mit der zweiten binomischen Formel erhält man $(x^2 - 4x + 4) = (x - 2)^2 = 0$, also ist $f(x) = 0$ für $x = 2$.
Extremstellen: Mit der Produktregel erhält man $f'(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^x$.
Notwendige Bedingung: $f'(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^x = 0 \mid e^x \neq 0$
$x(x - 2) = 0$
$x_1 = 0$ und $x_2 = 2$
Hinreichende Bedingung:
$f''(x) = (2x - 2) \cdot e^x + (x^2 - 2x) \cdot e^x$
$= (x^2 - 2) \cdot e^x$ (Produktregel)
$x_1 = 0$: $f''(0) = -2 \cdot e^0 = -2 < 0$, also hat f bei $x_1 = 0$ ein lokales Maximum.
$x_2 = 2$: $f''(2) = 2 \cdot e^2 > 0$, also hat f bei $x_2 = 2$ ein lokales Minimum.

c) $F'(x) = (2x - 6) \cdot e^x + (x^2 - 6x + 10) \cdot e^x$
$= (x^2 - 4x + 4) \cdot e^x = f(x)$

d) Die Intervallgrenzen wurden in Teilaufgabe b) berechnet.
$A = \int_0^2 f(x)\,dx = [F(x)]_0^2 \approx 4{,}78$; $A \approx 4{,}78$ FE

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 4x + 4) \cdot e^x = 0$, denn $(x^2 - 4x + 4)$ strebt für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ und e^x strebt für $x \to -\infty$ gegen 0.
$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 4) \cdot e^x = +\infty$, denn $(x^2 - 4x + 4)$ strebt für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ und e^x strebt für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$.

Seite 159

14

a) $f_2(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x = 0 \mid e^x \neq 0$, binomische Formel
$(x^2 + 2x + 1) = (x + 1)^2 = 0$
$x = -1$

b) Mit der Produktregel erhält man
$f'(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 3)e^x$.
$f'(-1) = (1 - 4 + 3)e^{-1} = 0$
Es gilt für $x < -1$: $f'(x) < 0$ und für $x > -1$: $f'(x) > 0$.
f' hat daher bei $x = -1$ einen Vorzeichenwechsel von − nach +, also hat der Graph von f einen Tiefpunkt.

c) $f_k'(x) = (2x + k)e^x + (x^2 + kx + 1) \cdot e^x = (x^2 + (2 + k)x + k + 1)e^x$
$f_k'(-1) = (1 - (2 + k) + k + 1)e^{-1} = 0$
$f_k''(x) = (2x + 2 + k)e^x + (x^2 + (2 + k)x + k + 1)e^x$
$= (x^2 + (4 + k)x + 2k + 3)e^x$
$f_k''(-1) = (1 - (4 + k) + 2k + 3)e^{-1} = ke^{-1}$ $\begin{cases} < 0 & \text{für } k < 0 \\ = 0 & \text{für } k = 0 \\ > 0 & \text{für } k > 0 \end{cases}$
Aufgrund dessen hat der Graph von f für $k < 0$ einen Hochpunkt, für $k = 0$ einen Sattelpunkt und für $k > 0$ einen Tiefpunkt.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + kx + 1) \cdot e^x = 0$, denn $(x^2 + kx + 1)$ strebt für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ und e^x strebt für $x \to -\infty$ gegen 0.
$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + kx + 1) \cdot e^x = +\infty$, denn $(x^2 + kx + 1)$ strebt für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ und e^x strebt für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$.

G **17**

a) $\overrightarrow{m} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3-1\\2-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2{,}5\end{pmatrix}$, also $M(2\,|\,2{,}5)$.

b) $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix}2{,}5-2\\4-3\\3-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix}2{,}5\\4\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0{,}5\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$, also $D(3\,|\,5\,|\,2)$

Seite 162

4

a) $k'(x) = 500x\cdot e^{-0{,}5x} - 125x^2\cdot e^{-0{,}5x} = (-125x^2 + 500x)e^{-0{,}5x}$

$k''(x) = (-250x + 500)e^{-0{,}5x} + (62{,}5x^2 - 250x)e^{-0{,}5x}$

$= (62{,}5x^2 - 500x + 500)e^{-0{,}5x}$

Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$k'(x) = (-125x^2 + 500x)e^{-0{,}5x} = 0 \quad | e^{-0{,}5x} \neq 0$ für alle x

$125x(-x + 4) = 0$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 4$

Hinreichende Bedingung:

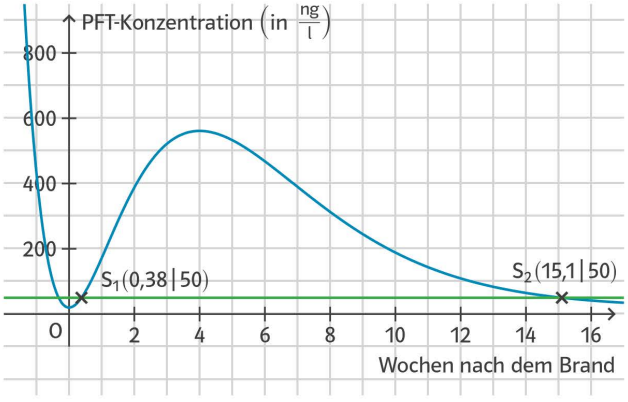
$k''(0) = 500 > 0$, also hat k bei $x_1 = 0$ ein lokales Minimum.

$k''(4) = (1000 - 2000 + 500)\cdot e^{-2} < 0$, also hat k bei $x_2 = 4$ ein lokales Maximum.

$k(4) = 4000\cdot e^{-2} + 20 \approx 561{,}34$

Laut diesem Modell ist vier Wochen nach dem Brand eine maximale PFT-Konzentration von ca. $561\frac{ng}{l}$ vorhanden.

b) Mit einem MMS ermittelt man die Schnittpunkte der Geraden $y = 50$ mit dem Graphen von f und erhält $S_1(0{,}38\,|\,50)$ und $S_2(15{,}1\,|\,50)$.



Da die Konzentration zunächst ansteigt, ist im Sinne der Fragestellung nur S_2 relevant.

Die Konzentration fällt nach dem Brand nach gut 15 Wochen erstmals unter $50\frac{ng}{l}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 250x^2\cdot e^{-0{,}5x} + 20 = 20$, denn $(250x^2)$ strebt für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ und $e^{-0{,}5x}$ strebt für $x \to +\infty$ gegen 0; die Zahl 20 bleibt konstant. Auf lange Sicht wird die PFT-Konzentration nach diesem Modell etwa bei $20\frac{ng}{l}$ liegen.

Seite 164

13

a) Mit einem MMS ermittelt man die Extrempunkte des Graphen von a und erhält, dass das Fahrzeug nach 0,46 Sekunden das Maximum von $2{,}76\frac{m}{s^2}$ erreicht.

b) Mit einem MMS ermittelt man den Wert des Integrals von a(t) im Intervall $[0; 3]$ und erhält $\int_0^3 a(t)\,dt \approx 3{,}37$.

Laut Modell hat das Fahrzeug nach drei Sekunden eine Geschwindigkeit von ca. $3{,}37\frac{m}{s}$.

c) Mit einem MMS bestimmt man $\int_0^6 a(t)\,dt$. Nach sechs Sekunden hat das Fahrzeug eine erwartete Geschwindigkeit von ca. $3{,}4\frac{m}{s}$.

d) Mit einem MMS lässt man sich die Ableitung der Funktion v angeben und erhält $v'(t) = a(t) = (48t - 48t^2)e^{-2t+1}$.

G **16**

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4-1\\2-2\\0-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2-1\\2-2\\2-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Da $\overrightarrow{AB} = 3\cdot\overrightarrow{AC}$ gilt, sind die beiden Vektoren kollinear.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5-2\\1-0\\7-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3-2\\4-0\\6-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$

Da es kein t gibt, für das $\overrightarrow{AB} = t\cdot\overrightarrow{AC}$ gilt, sind die beiden Vektoren nicht kollinear.

Seite 165

Klausurtraining

1

a) $f'(x) = 2\cos(x)$ **b)** $f'(x) = 3\sin(x)$

c) $f'(x) = 2x - \sin(x)$

2

a) $F(x) = 0{,}1\cos(x) + 0{,}1x$ ist eine mögliche Stammfunktion von f.

$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} f(x)\,dx = [0{,}1\cos(x) + 0{,}1x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}$

$= 0{,}1\left(\left(\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \frac{5}{2}\pi\right) - \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= 0{,}1\left(\frac{5}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2\pi \approx 0{,}628$ [FE]

b) $F(x) = \sin(x)$ ist eine mögliche Stammfunktion von f.

$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$

$= 1 - (-1) = 2$ [FE]

3

a) Amplitude $a = 10$; Periode $p = 20$, also $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{20} = 0{,}1\pi$
Verschiebung in y-Richtung: $d = 1000$
Funktionsgleichung: $f(t) = 10 \cdot \cos(0{,}1\pi t) + 1000$

b) Mit einem MMS lässt man sich die Extrema der Ableitungsfunktion f' anzeigen und erhält die Extremstellen $t_1 = 5$, $t_2 = 15$ usw. Der Temperaturabfall bzw. -anstieg ist alle 10 Minuten am stärksten.

4

$u \circ v = u(v(x)) = u(\sqrt{x}) = (\sqrt{x} + 1)^2$

$v \circ u = v(u(x)) = v((x+1)^2) = \sqrt{(x+1)^2} = x + 1$

$u \circ w = u(w(x)) = u(e^x) = (e^x + 1)^2$

$w \circ v = w(v(x)) = w(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}$

5

individuelle Lösung, zum Beispiel:

a) $u(x) = x^4$, $v(x) = 3x + 1$

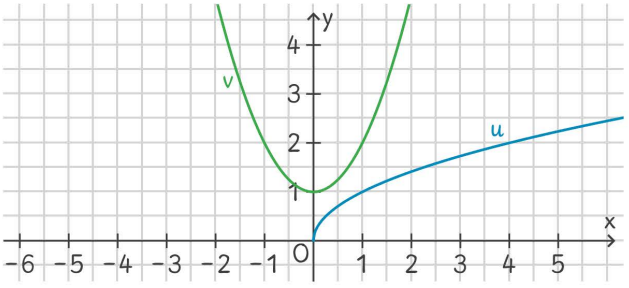
b) $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = x + 7$

c) $u(x) = e^x$, $v(x) = 0{,}5x + 2$

d) $u(x) = \cos(x)$, $v(x) = x - \frac{\pi}{2}$

6

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $g(x) = v(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$

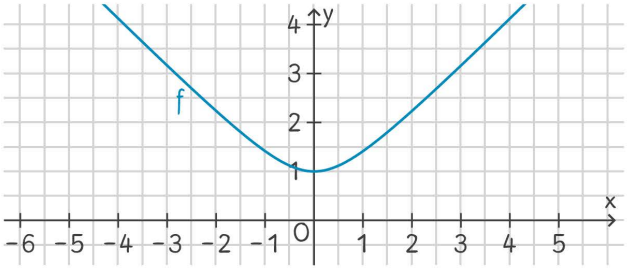


b) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$
Die Funktion u ist für $x < 0$ nicht definiert, da die Wurzel aus einer negativen Zahl in den reellen Zahlen nicht gezogen werden kann.
Bei der Funktion $f(x) = u(x) \circ v(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ist der Term unter der Wurzel für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv. Daher ist die Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

c) Wertetabelle für f

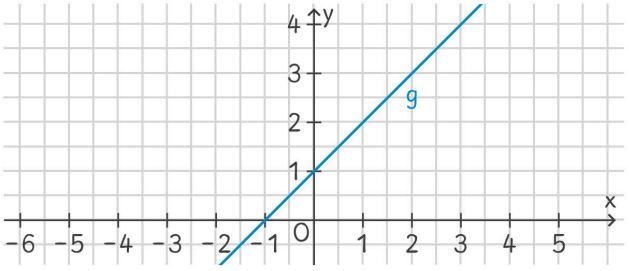
x	−3	−2	−1	−0,5	0
y	$\sqrt{10} \approx 3{,}16$	$\sqrt{5} \approx 2{,}24$	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$	$\sqrt{1{,}25} \approx 1{,}11$	1

x	0,5	1	2	3
y	$\sqrt{1{,}25} \approx 1{,}11$	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$	$\sqrt{5} \approx 2{,}24$	$\sqrt{10} \approx 3{,}16$



Wertetabelle für g

x	−3	−2	−1	−0,5	0	0,5	1	2	3
y	−2	−1	0	0,5	1	1,5	2	3	4



7

a) $f(x) = x^3 + 2x^4$
$f'(x) = 3x^2 + 8x^3$

b) $f'(x) = e^{x+1} \cdot (x^2 + 2{,}5) + e^{x+1} \cdot 2x = e^{x+1} \cdot (x^2 + 2x + 2{,}5)$

c) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{0{,}5x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \cdot e^{0{,}5x} = \frac{1}{2}e^{0{,}5x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)$

d) $f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

e) $f(x) = (3x^2 + 0{,}2x) \cdot (x + 5) = 3x^3 + 15x^2 + 0{,}2x^2 + x$
$= 3x^3 + 15{,}2x^2 + x$
$f'(x) = 9x^2 + 30{,}4x + 1$

f) $f(x) = x^4 - 6{,}25$ (3. binomische Formel)
$f'(x) = 4x^3$

g) $f(x) = 2x^{-1} \cdot e^{4x}$
$f'(x) = -2x^{-2} \cdot e^{4x} + 8x^{-1} \cdot e^{4x} = 2e^{4x}\left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

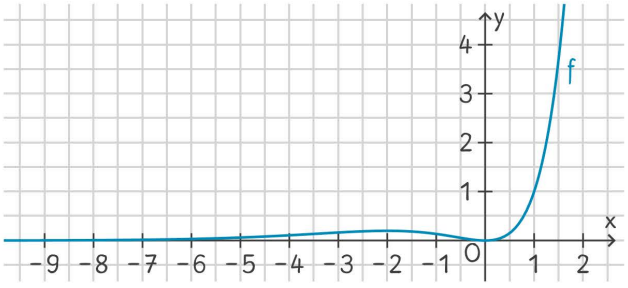
h) $f'(x) = -\sin(x) \cdot \sin(x) + \cos(x) \cdot \cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

8

a) $f'(x) = 2x \cdot e^{x-1} + x^2 \cdot e^{x-1} = (x^2 + 2x) \cdot e^{x-1}$
$(x^2 + 2x) \cdot e^{x-1} = 0 \quad | e^{x-1} \neq 0$ für alle x
$x(x + 2) = 0$
$x_1 = 0$ und $x_2 = -2$
Der Graph von f hat bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = -2$ waagerechte Tangenten.

b) $-2 < x < 0$: $f'(x) < 0$
$x > 0$: $f'(x) > 0$
Außerdem ist $f(0) = 0$.
Der Graph von f hat in $(0\,|\,0)$ einen Tiefpunkt; er berührt somit die x-Achse im Koordinatenursprung.

c)



Seite 166

9

a) $D_f = \mathbb{R}$
$u(x) = 2x$, $v(x) = e^{x^2}$ und $u'(x) = 2$, $v'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$
$f'(x) = 2 \cdot e^{x^2} + 2x \cdot 2x e^{x^2} = (4x^2 + 2)e^{x^2}$

b) $D_f = \mathbb{R}^{> -\frac{1}{3}}$
$u(v) = \ln(v)$, $v(x) = 3x + 1$ und $u'(v) = \frac{1}{v}$, $v'(x) = 3$
$f'(x) = \frac{6}{3x + 1}$

c) $D_f = \mathbb{R}$
$u(x) = x^2$, $v(x) = \sin(2x)$ und $u'(x) = 2x$, $v'(x) = 2\cos(2x)$
$f'(x) = 2x \cdot \sin(2x) + x^2 \cdot 2\cos(2x) = 2x(\sin(2x) + x\cos(2x))$

d) $D_f = \mathbb{R}$
$f'(x) = 2 + 0{,}2x \cdot e^{0{,}1x^2}$

10

a) $f(x) = u(-2x + 2) = 0{,}5(-2x + 2)^2 - 2$
$= 0{,}5(4x^2 - 8x + 4) - 2 = 2x^2 - 4x$
$v(2) = -2$; $v'(2) = -2$
$u'(v(2)) = u'(-2) = -2$
$f'(2) = u'(v(2)) \cdot v'(2) = -2 \cdot (-2) = 4$
Man kann prüfen: $f'(x) = 4x - 4$ und $f'(2) = 8 - 4 = 4$

b) Die Funktion g hat keine Extremstellen, da die Ableitungsfunktion g' mit $g'(x) = e^{v(x)}$ keine Nullstellen hat.

11

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x \cdot e^x = 0$, denn $2x$ strebt für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und e^x strebt für $x \to -\infty$ gegen 0.
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x \cdot e^x = +\infty$, denn $2x$ strebt für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ und e^x strebt für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$.

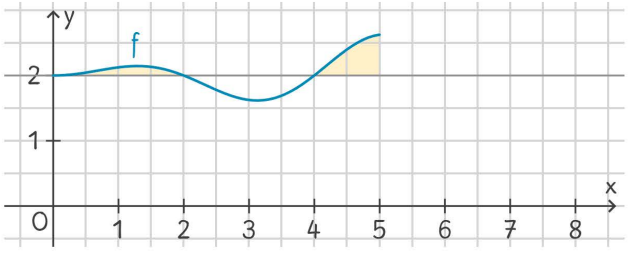
b) $f'(x) = 2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x = (2x + 2)e^x$
$f'(x) = 0$ für $x = -1$, die x-Koordinate des Tiefpunkts ist $x = -1$.
$f(-1) = -2e^{-1}$, der Tiefpunkt des Funktionsgraphen hat die Koordinaten $T(-1\,|\,-2e^{-1})$.

c) notwendige Bedingung für die Wendestelle:
$f''(x) = (2x + 4) \cdot e^x = 0$
$x = -2$
$f(-2) = 4e^{-2}$
$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4e^{-2} = 4e^{-2} \approx 0{,}54$; $A \approx 0{,}54$ FE

d) Mithilfe eines MMS erhält man $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx \approx -1{,}19$. Es gilt $A_2 \approx 1{,}2$ FE.

12

a)



Punkte, die 2 km über Normalnull liegen, sind in der Skizze gelb markiert.

b) Zunächst steigt das Gelände etwas an (ca. 150 m), nach ca. 1,3 km ist der erste Hochpunkt überschritten und das Gelände fällt ab.

c) $\frac{f(2{,}5) - f(1{,}5)}{2{,}5 - 1{,}5} \approx -0{,}35$
$f'(2) \approx -0{,}39$
Das Gefälle der Tangente in $B(2\,|\,f(2))$ ist etwas steiler (39 %) als das durchschnittliche Gefälle der Sekante durch $P(1{,}5\,|\,f(1{,}5))$ und $Q(2{,}5\,|\,f(2{,}5))$, welches ca. 35 % beträgt.

13

a) In den ersten 30 Tagen nach Eröffnung der Attraktion steigt die Besucheranzahl nach diesem Modell stark an, auf ca. 10 500 Besucher an Tag 30. In den darauffolgenden Tagen sind die Besucherzahlen wieder etwas rückläufig.
Sie sinken auf ca. 10 000 Besucher an Tag 120 und bleiben dann in etwa auf diesem Niveau.

b) Mit einem MMS ermittelt man den Hochpunkt $H(30\,|\,10\,446{,}26)$ des Graphen der Funktion. Es wird laut Modell an Tag 30 mit ca. 10 446 Personen gerechnet.

c) Mit einem MMS ermittelt man den Schnittpunkt $S(10\,|\,10\,000)$ des Graphen von f mit der Geraden k mit $k(x) = 10\,000$. Es wird ab dem 10. Tag damit gerechnet, dass die Attraktion sich rentiert.

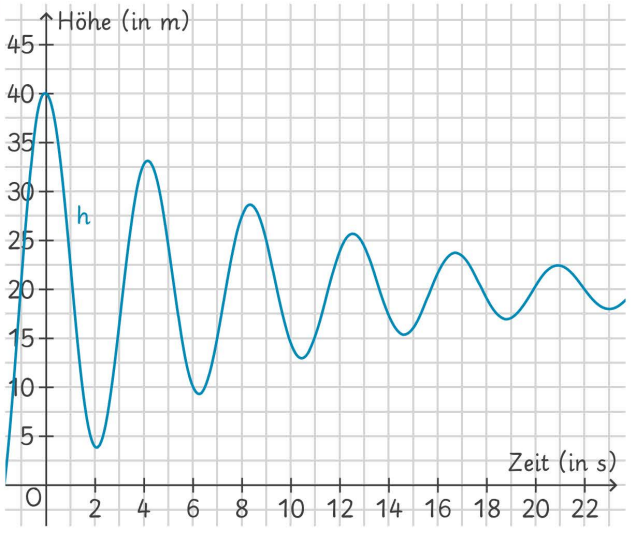
Seite 167

14

a) $h_a(0) = a + 20 = 40 \mid -20$

$a = 20$

b)



c) Mit einem MMS ermittelt man den globalen Tiefpunkt des Graphen von h' und erhält $T_1(0{,}96 \mid -27{,}26)$.
Demgemäß beträgt die maximale Fallgeschwindigkeit nach 0,96 Sekunden ca. 27,26 $\frac{m}{s}$.

d) Mit einem MMS ermittelt man den globalen Tiefpunkt des Graphen der Funktion h und erhält $T_2(2{,}05 \mid 3{,}74)$.
Der tiefste Punkt über dem Boden ist nach ca. 2 Sekunden erreicht. Er ist in einer Höhe von ca. 3,74 m.

e) Der Springer führt in den ersten 21 Sekunden 5 Auf- und Abbewegungen aus. Die Anzahl hängt nicht von a ab, da der Faktor $a \cdot e^{-0{,}1t}$ angibt, wie groß der Ausschlag ist. Das gleichmäßige Wiederkehren der Auf- und Abbewegung hängt dagegen von der Periode der Kosinusfunktion ab.
Diese ist $p = \frac{2\pi}{1{,}5} \approx 4{,}2$.

f) Die Ausschläge der Kurve werden immer kleiner. Die Werte nähern sich dem Wert 20 an. Der Springer wird in ca. 20 m Höhe zur Ruhe kommen.

15

a) Um 6 Uhr ist am meisten Wasser im Speicher, um 18 Uhr am wenigsten.

b) Gesucht ist das Maximum bzw. das Minimum der Funktion. Um 0 Uhr und um 24 Uhr verändert sich das Volumen im See am schnellsten, um 12 Uhr verändert es sich am langsamsten.

c) $G'(t) = \frac{240}{\pi} \cdot \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 20\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = g(t)$

d) Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS ermittelt man $\int_6^{18} g(t)\,dt \approx -152{,}789$.
Die Volumendifferenz V beträgt ca. 152 789 m^3.

e) Gemäß Modellfunktion fließt von 0 Uhr bis 6 Uhr die Hälfte des Volumens V in den Speichersee hinein. Es müssen also bereits mindestens 76 394,5 m^3 im Speichersee enthalten sein, damit das Volumen V herausfließen kann.

f) $G(0) = \frac{240}{\pi}\sin(0) = 0$. Die Funktion G ist geeignet, die Wassermenge im Speichersee zu beschreiben, wenn anfangs (um Mitternacht) kein Wasser im See enthalten ist. Laut Annahme soll aber um Mitternacht ein Volumen von $5 \cdot 10^5\,m^3$ enthalten sein. Die Funktion G gibt das Volumen in $10^3\,m^3$ an.
$5 \cdot 10^5\,m^3 = 500 \cdot 10^3\,m^3$.
Eine Funktionsgleichung für die Funktion f lautet demnach $f(t) = \frac{240}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 500$ (t in h und f(t) in $10^3\,m^3$).

16

a) Die Funktion f mit $f(t) = z(t) - a(t)$ beschreibt die Gesamtänderung.

b) Wenn die Änderungsrate f positiv ist, dann fließt Wasser in das Becken hinein. Das ist der Fall für $0 < t < 0{,}46$ und $t > 5{,}36$.

c) $F'(t) = e^{(t-2)} - t^2 = f(t)$
Weiterhin gilt: $F(0) = e^{(-2)} + (25 - e^{-2}) = 25$
F ist eine Stammfunktion von f. F(0) gibt außerdem das im Becken vorhandene Volumen von 25 m^3 zu Beginn der Messung an. Daher gibt F in diesem Modell das Wasservolumen im Becken an.

d) $F(2) = e^{(2-2)} - \frac{1}{3}2^3 + (25 - e^{-2}) = 1 - \frac{8}{3} + 25 - e^{-2} \approx 23{,}2$
Nach 2 Stunden befinden sich ca. 23,2 m^3 im Becken.

e) Mit einem MMS löst man die Gleichung $F(t) = 5$ und erhält $t_1 \approx 4{,}72$ und $t_2 \approx 5{,}84$. Es befinden sich nach ca. 4 Stunden und 45 Minuten und nach ca. 5 Stunden und 50 Minuten 5 m^3 im Becken.

Seite 168

17

a) $f'(x) = -3x^2 + 2x$; $f'(1) = -3 + 2 = -1$
$g'(x) = -e^{-(x-2)}$; $g'(2) = -e^{-(2-2)} = -1$
$h(x) = -1 \cdot x + b$
Es ist $f(1) = -1 + 1 + 1 = 1$, also ist auch $h(1) = -1 + b = 1$ und somit $h(x) = -x + 2$.

b) $f'(x) = -3x^2 + 2x = -1$
$-3x^2 + 2x + 1 = 0$
Man erhält $x_1 = -\frac{1}{3}$ und $x_2 = 1$.
Gesucht ist ein Punkt mit x-Koordinaten kleiner als 1. Im Punkt $P\left(-\frac{1}{3} \mid 1\frac{4}{27}\right)$ ist die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden h.

c) Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man $A = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \int_2^5 g(x)\,dx \approx 2\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - (-2{,}05) \approx 5{,}217$ [FE].

18

a) Gesucht ist das Maximum von f.

$f_a'(t) = 20a \cdot e^{-0,5t} - 10a \cdot t \cdot e^{-0,5t} = 10a(2 - t) \cdot e^{-0,5t}$

$f_a'(t) = 0$ für $t = 2$

Die Konzentration des Medikaments im Blut ist unabhängig von a nach 2 Stunden am höchsten.

b) $f_a(2) = 20a \cdot 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} = 40a \cdot e^{-1} = 20$

$a \cdot e^{-1} = \frac{1}{2} \quad | \cdot e^1$

$a = \frac{e}{2}$

Für $a = \frac{e}{2}$ beträgt die maximale Konzentration $20 \frac{mg}{l}$.

c) Gesucht ist der Tiefpunkt des Graphen der Ableitungsfunktion $f_{\frac{1}{2}}'$.

Man erhält $T(4 \mid -1,35)$. Nach 4 Stunden beträgt die Geschwindigkeit des Konzentrationsabfalls ca. $1,35 \frac{mg}{l}$ pro Stunde.

d) $F_a'(t) = -40a \cdot e^{-0,5t} + (20a \cdot t + 40a) \cdot e^{-0,5t} = 20a \cdot t \cdot e^{-0,5t}$

$= f_a(t)$

e) $\frac{1}{12} \int_0^{12} f_a(t)\,dt = \frac{1}{12} [F_a(t)]_0^{12}$

$= \frac{1}{12}(-(40a \cdot 12 + 80a) \cdot e^{-6} + (80a) \cdot e^0)$

$= \frac{a}{12}(-560 \cdot e^{-6} + 80) \approx 6,55a$

Das Integral entspricht der mittleren Konzentration des Medikaments in den ersten 12 Stunden.

f) Die Gerade g sei die gesuchte Tangente.

$f_a'(12) = 10a(2 - 12) \cdot e^{-6} = -100a \cdot e^{-6} \Rightarrow m_g = -100a \cdot e^{-6}$

$g(12) = f_a(12) = 20a \cdot 12 \cdot e^{-6}$

$240a \cdot e^{-6} = -100a \cdot e^{-6} \cdot 12 + b \quad | + 1200a \cdot e^{-6}$

$1440a \cdot e^{-6} = b$

$\Rightarrow g(t) = -100a \cdot e^{-6} \cdot t + 1440a \cdot e^{-6}$

$g(t) = 0$

$-100a \cdot e^{-6} \cdot t + 1440a \cdot e^{-6} = 0 \quad | - 1440a \cdot e^{-6}$

$-100a \cdot e^{-6} \cdot t = -1440a \cdot e^{-6} \quad | : (-100a \cdot e^{-6})$

$t = 14,4$

Das Medikament ist (unabhängig von a) nach 14,4 Stunden vollständig abgebaut.

19

a) $F'(x) = -(20x + 20) \cdot e^{-x} + (10x^2 + 20x + 20) \cdot e^{-x} = 10x^2 \cdot e^{-x}$

b) $\int_0^b f(x)\,dx = [-(10x^2 + 20x + 20) \cdot e^{-x}]_0^b$

$= -(10b^2 + 20b + 20) \cdot e^{-b} - (-20)$

$\lim_{b \to +\infty} -(10b^2 + 20b + 20) \cdot e^{-b} + 20 = 20$ [FE]

c) Die Dreiecksseite $\overline{OB}$ lässt sich als Ausschnitt der Ursprungsgeraden g mit $g(x) = \frac{f(u)}{u} \cdot x$ beschreiben. Die Steigung von g ist positiv, da $f(x) > 0$ für alle $x > 0$.

Der Grafik entnimmt man, dass der Graph von f im Koordinatenursprung einen Tiefpunkt hat. Die Tangente an den Graphen von f in $O(0 \mid 0)$ ist waagerecht. Dann gibt es ein $a > 0$, sodass die Gerade g im Intervall $[0; a]$ oberhalb des Graphen von f verläuft. In diesem Intervall liegt das Dreieck nicht innerhalb der genannten Fläche.

d) $A_D(u) = \frac{1}{2}u \cdot f(u) = 5u^3 e^{-u}$

Man untersucht A_D auf Extrema:

$A_D'(u) = 15u^2 e^{-u} - 5u^3 e^{-u} = (15u^2 - 5u^3) e^{-u}$

Notwendige Bedingung:

$A_D'(u) = (15u^2 - 5u^3) e^{-u} = 0 \quad | e^{-u} \neq 0$

$5u^2(3 - u) = 0$

$u_1 = 0$ und $u_2 = 3$

Da $u > 0$ ist, untersucht man weiter nur $u_2 = 3$.

A_D' hat für $u_2 = 3$ einen Vorzeichenwechsel von + nach −.

Daher hat A_D bei $u_2 = 3$ ein lokales Maximum.

Das Dreieck OAB hat für $u_2 = 3$ den maximalen Flächeninhalt von $A_D(3) = 135e^{-3} \approx 6,72$.

20

a) $f'(x) = -e^{-x+1} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. f ist daher streng monoton abnehmend auf $\mathbb{R}$ und damit umkehrbar.

$y = e^{-x+1} \quad | \ln(\,)$

$\ln(y) = -x + 1 \quad | - 1$

$\ln(y) - 1 = -x \quad | \cdot (-1)$

$1 - \ln(y) = x$

x und y vertauschen: $y = 1 - \ln(x)$

Also ist $\bar{f}(x) = 1 - \ln(x)$. Es ist $D_f = \mathbb{R}$ und $D_{\bar{f}} = \mathbb{R}^+$.

b) $f'(1) = -1$

$\bar{f}'(x) = -\frac{1}{x}$, also $\bar{f}'(1) = -\frac{1}{1} = -1$

Weiterhin gilt $f(1) = 1$ und $\bar{f}(1) = 1$.

Da die Steigung der Tangente an f bzw. an $\bar{f}$ gleich ist, und auch die Funktionswerte an der Stelle 1 übereinstimmen, haben die beiden Funktionen in $P(1 \mid 1)$ die gleiche Tangente.

c) $\bar{F}'(x) = 2 - \left(\ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}\right) = 1 - \ln(x) = \bar{f}(x)$

d) Schnittstelle von f mit der y-Achse: $f(0) = e$

Nullstelle von $\bar{f}$: $x = e$

Schnittpunkt von f und $\bar{f}$: $P(1 \mid 1)$ (vgl. Teilaufgabe b))

Für den Flächeninhalt gilt daher:

$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^e \bar{f}(x)\,dx = [-e^{-x+1}]_0^1 + [2x - x \cdot \ln(x)]_1^e$

$= (-1 - (-e)) + (2e - e - 2) \approx 2,44$ [FE]

e) $\int_h^k f(x)\,dx = [-e^{-x+1}]_h^k = -e^{-k+1} + e^{-h+1}$

$\lim_{k \to +\infty} -e^{-k+1} = 0$

$\lim_{h \to 0} e^{-h+1} = e$

Der Flächeninhalt, den die Funktion f für $x > 0$ mit der x-Achse einschließt, hat den Wert e.

f) $\int_1^a f(x)\,dx = [-e^{-x+1}]_1^a = -e^{-a+1} + 1$

$\lim_{a \to +\infty} \int_1^a f(x)\,dx = \lim_{a \to +\infty} -e^{-a+1} + 1 = 1$

$\int_b^1 \bar{f}(x)\,dx = [2x - x \cdot \ln(x)]_b^1 = (2 - 2b + b\ln(b))$

$\lim_{b \to 0} (2 - 2b + b\ln(b)) = 2$

Daraus folgt die Behauptung.

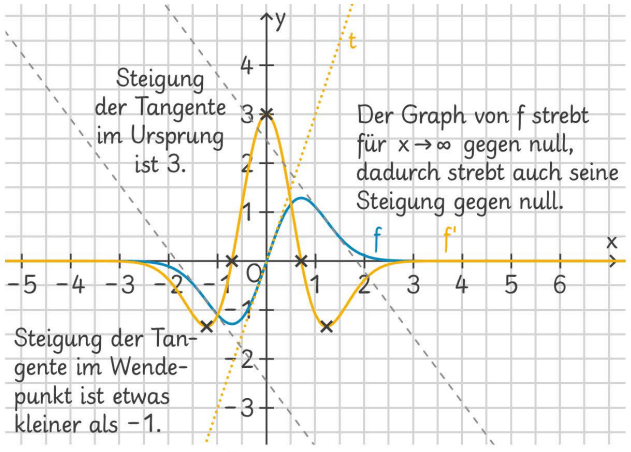
Seite 169

21

a) Es ist $f(0) = 0$. Das ist nur bei Graph G der Fall.

b) Die Graphen C und K gehen aus dem Graphen G durch Transformationen hervor.
Graph C entsteht durch Verschiebung um zwei Einheiten nach links, daher ist $c(x) = 3(x+2)\cdot e^{-(x+2)^2}$.
Graph K entsteht durch Verschiebung um eine Einheit nach rechts, daher ist $k(x) = 3(x-1)\cdot e^{-(x-1)^2}$.

c)



d) $f_t(x) = 3(x-t)\cdot e^{-(x-t)^2}$

22

a) $-f_1(-x) = -\left(-(-x)\cdot e^{-(-x)^2}\right) = -\left(x\cdot e^{-x^2}\right) = -x\cdot e^{-x^2} = f_1(x)$

b) $f_1(x) = -x\cdot e^{-x^2}$

$f_1'(x) = -e^{-x^2} + 2x^2\cdot e^{-x^2} = (2x^2-1)e^{-x^2}$

Notwendige Bedingung:

$f_1'(x) = (2x^2-1)e^{-x^2} = 0 \quad | e^{-x^2} \neq 0$

$2x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Hinreichende Bedingung:

$f_1''(x) = 4xe^{-x^2} + (2x^2-1)\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2} = (-4x^3+6x)e^{-x^2}$

$f_1''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-0,5} = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}}\right)e^{-0,5} > 0$

Also hat f_1 bei $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ein lokales Minimum.

$f_1''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-0,5} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{2}}\right)e^{-0,5} < 0$

Also hat f_1 bei $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein lokales Maximum.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Aufgrund der Symmetrie muss der Graph in $W_1(0\,|\,0)$ einen Wendepunkt haben. Im Tiefpunkt ist der Graph linksgekrümmt. Wenn der Graph sich dann für $x \to +\infty$ der x-Achse annähern soll, muss der Graph in eine Rechtskrümmung übergehen. Folglich muss rechts vom Tiefpunkt ein weiterer Wendepunkt sein. Analog hierzu muss links vom Hochpunkt ein weiterer Wendepunkt sein.

Alternativ: Wenn in Teilaufgabe b) die 2. Ableitung berechnet wurde, gilt: f_1'' ist eine kubische Funktion.
Aus $(-4x^3+6x) = 2x(-2x^2+3)$ erhält man drei Nullstellen von f_1''.
f_1'' ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da der Term nur ungerade Exponenten enthält.
Eine der drei Nullstellen liegt im Koordinatenursprung, die anderen beiden liegen in gleichem Abstand rechts und links von $x = 0$. Dort wechselt f_1'' das Vorzeichen.
Da $e^{-x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist für die Betrachtung des Vorzeichens von f_1'' nur $(-4x^3+6x)$ relevant. Daher liegt an allen drei Nullstellen von f_1'' ein Wendepunkt vor.

d) $F_a'(x) = -2ax\cdot\frac{1}{2a}\cdot e^{-ax^2} = -xe^{-ax^2} = f_a(x)$

e) $\int_0^b f_1(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot e^{-x^2}\right]_0^b = \frac{1}{2}\cdot e^{-b^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot(e^{-b^2}-1) \xrightarrow{b\to+\infty} -\frac{1}{2}$.

Der gesuchte Flächeninhalt ist stets kleiner als 0,5 FE.

f) Der Graph von f_1 ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Daher ist $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f_1(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f_1(x)\,dx$.

Es ist $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f_1(x)\,dx - \lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f_1(x)\,dx = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

Die Fläche, die der Graph von f_1 mit der x-Achse einschließt, hat also einen Inhalt, der kleiner als 1 FE ist.

23

a) $f_{0,1}(x) = x^2\cdot e^{-0,1x}$

Mit einem MMS erhält man die Schnittpunkte $S_1(10,9\,|\,40)$ und $S_2(33,1\,|\,40)$ des Graphen von f mit mit dem Graphen der Funktion k mit $k(x) = 40$.
In einem Abstand von ca. 11 Metern und von ca. 33 Metern vom Start ist die Bahn 40 Meter hoch.

b) Gesucht sind die Extrema der Ableitungsfunktion.

$f_{0,1}'(x) = 2x\cdot e^{-0,1x} - 0,1x^2\cdot e^{-0,1x} = (-0,1x^2+2x)\cdot e^{-0,1x}$

$f_{0,1}''(x) = (-0,2x+2)\cdot e^{-0,1x} - 0,1(-0,1x^2+2x)\cdot e^{-0,1x}$
$= (0,01x^2 - 0,4x + 2)\cdot e^{-0,1x}$

$f_{0,1}'''(x) = (0,02x-0,4)\cdot e^{-0,1x} - 0,1(0,01x^2-0,4x+2)\cdot e^{-0,1x}$
$= (-0,001x^2 + 0,06x - 0,6)\cdot e^{-0,1x}$

Notwendige Bedingung:

$f_{0,1}''(x) = (0,01x^2-0,4x+2)\cdot e^{-0,1x} = 0 \quad | : e^{-0,1x} \neq 0$

$0,01x^2 - 0,4x + 2 = 0$

$x_1 \approx 5,86$ und $x_2 \approx 34,14$

Hinreichende Bedingung:

$f_{0,1}'''(5,86) = -0,16 < 0$, also hat f' bei $x_1 = 5,86$ ein lokales Maximum.

$f'(5,86) \approx 4,61$

Der stärkste Anstieg hat eine Steigung von ca. 461 %.

$f_{0,1}'''(34,14) = 0,01 > 0$, also hat f' bei $x_2 = 34,14$ ein lokales Minimum.

$f'(34,14) \approx -1,59$.

Der stärkste Abfall („drop“) hat ein Gefälle von 159 %.

c) $f_t(x) = 100t^2x^2 \cdot e^{-tx}$

$f_t'(x) = 200t^2x \cdot e^{-tx} - 100t^3x^2 \cdot e^{-tx} = 100t^2(2x - tx^2)e^{-tx}$

$f_t'(0) = 0$

Für ein beliebiges t hat die Bahn am Start eine Steigung von 0 %.

d) Notwendige Bedingung:

$f_t'(x) = 100t^2(2x - tx^2)e^{-tx} = 0 \quad | : e^{-tx} \neq 0 \quad | : 100t^2 \neq 0$

$(2x - tx^2) = x(2 - tx) = 0$

$x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{t}$

Hinreichende Bedingung:

$x_1 = 0$: Es ist $f_2(0) = 0$, bei $x_1 = 0$ ist der Start auf Höhe 0 m.

$x_2 = \frac{2}{t}$:

Für $x < \frac{2}{t}$ ist $f_t'(x) = \underbrace{100t^2}_{>0}\underbrace{(2x - tx^2)}_{>0}\underbrace{e^{-tx}}_{>0} > 0$

Für $x > \frac{2}{t}$ ist $f_t'(x) = \underbrace{100t^2}_{>0}\underbrace{(2x - tx^2)}_{<0}\underbrace{e^{-tx}}_{>0} < 0$

f_t' hat also einen Vorzeichenwechsel von + nach −. Dementsprechend hat f_t an der Stelle $x_2 = \frac{2}{t}$ ein lokales Maximum.

$f_t\left(\frac{2}{t}\right) = 100t^2\frac{4}{t^2} \cdot e^{-t\frac{2}{t}} = 400 \cdot e^{-2} \approx 54{,}13$

Die höchste Stelle der Bahn ist unabhängig von t ca. 54,13 m hoch.

e) $m = \tan(70°) \approx 2{,}75$

Gesucht: Der Parameter t, für den der Neigungswinkel am maximalen „drop" 70° bzw. der Wert von f_t' im Tiefpunkt −2,75 beträgt.

Mit einem MMS ermittelt man den Tiefpunkt T des Graphen der Ableitungsfunktion f_t'. Die y-Koordinate gibt den Wert an.

Für $t = 0{,}173$ ergibt sich $T(19{,}735 \mid -2{,}748)$.

24

a) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, da der Exponent für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ strebt und somit der gesamte Term gegen 0.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $f'(x) = 0{,}6(x - 3)^2 \cdot e^{0{,}2(x-3)^3} = 0 \quad | e^{0{,}2(x-3)^3} \neq 0$

$x = 3$

$f''(x) = e^{0{,}2(x-3)^3} \cdot (1{,}2x - 3{,}6 + 0{,}6(x - 3)^2 \cdot 0{,}6(x - 3)^2)$

$f''(3) = 0$

d) $h(x) = e^{0{,}2(x-3)^3} + 1$

e) $V = \pi \cdot \int\limits_0^{3{,}5} (h(x))^2 dx \approx 29{,}14$

Das Volumen beträgt etwa 29,14 cm^3.

V Vektoren, Geraden und Winkel

Seite 177

Check-in

1

a) Die Aussage ist nur in bestimmten Fällen richtig. Begründung: Diese Aussage gilt nur, wenn die benachbarten Seiten des Rechtecks gleich lang sind.

b) Die Aussage ist nur in bestimmten Fällen richtig. Begründung: Diese Aussage gilt nur, wenn die Raute rechte Winkel besitzt.

c) Die Aussage stimmt nie. Begründung: In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel 60° groß, in einem rechtwinkligen Dreieck ist aber ein 90°-Winkel vorhanden.

d) Die Aussage gilt immer. Begründung: In einem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Seiten gleich lang und in einem gleichschenkligen Dreieck haben zwei Seiten dieselbe Länge.

2

a) $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}$, also $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 75{,}52°$

$\beta = 180° - 90° - 75{,}52° \approx 14{,}48°$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$1^2 + a^2 = 4^2 \quad | - 1^2$

$a^2 = 16 - 1$

$a = \sqrt{15} \approx 3{,}87$

Seite a ist ca. 3,87 cm lang.

b) $\sin(\alpha) = \frac{2}{3}$, also $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41{,}81°$

$\sin(50°) = \frac{2}{x} \quad | \cdot x$

$x \cdot \sin(50°) = 2 \quad | : \sin(50°)$

$x = \frac{2}{\sin(50°)} \approx 2{,}61$

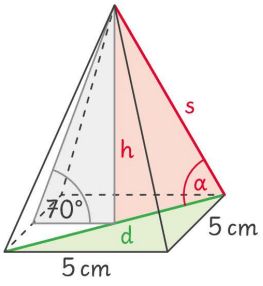
Seite x ist ca. 2,61 m lang.

c) Im grauen Dreieck gilt:

$\tan(70°) = \frac{h}{2{,}5}$,

also $h = \tan(70°) \cdot 2{,}5 \approx 6{,}87$

Die Höhe der Pyramide beträgt 6,87 cm.



Im grünen Dreieck gilt:

$d^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, also

$d = \sqrt{50} \approx 7{,}07$

Im roten Dreieck gilt:

$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 6{,}872^2 + \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 \approx 59{,}7$, also $s \approx 7{,}73$

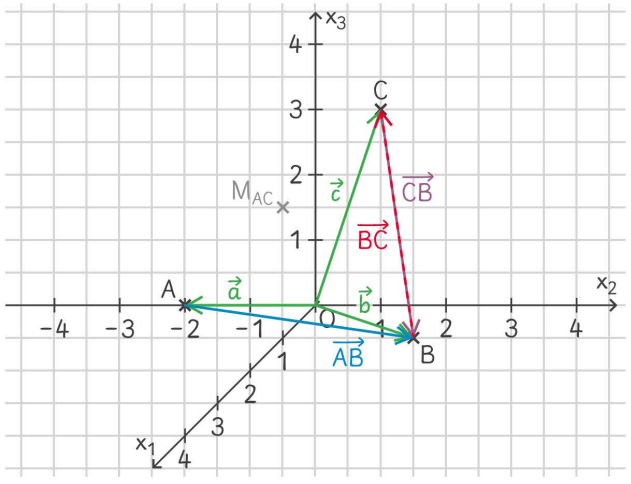
Die Kante s ist ca. 7,73 cm lang.

$\tan(\alpha) = \frac{h}{\frac{d}{2}} = \frac{2h}{d}$, also $\tan(\alpha) = \frac{2\tan(70°) \cdot 2{,}5}{\sqrt{50}} \approx 1{,}94$

$\alpha = \tan^{-1}(1{,}94) \approx 62{,}73°$

3

a)



b) Zeichnung der Ortsvektoren siehe Grafik in Teilaufgabe a)

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-(-2) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-2 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1+2 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M(0\,|\,-0{,}5\,|\,1{,}5)$

4

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

5

a) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear, da $\vec{b} = -3 \cdot \vec{a}$ gilt.

b) $\begin{pmatrix} -10 \\ 2{,}5 \\ -25 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -5 \end{pmatrix}$

I $-10 = 2s$, also $s = -5$
II $2{,}5 = 0{,}5s$, also $s = 5$
III $-25 = -5s$, also $s = 5$

Da es kein s gibt, für das $\vec{b} = s \cdot \vec{a}$ gilt, sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear.

c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

I $-1 = -4s$, also $s = 0{,}25$
II $2{,}5 = 10s$, also $s = 0{,}25$
III $2 = 8s$, also $s = 0{,}25$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear, da $\vec{b} = 0{,}25 \cdot \vec{a}$ gilt.

Seite 183

7

a) $|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2-0 \\ -3-0 \\ 1-7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right|$

$= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7\,[\text{LE}]$

b) individuelle Lösung, zum Beispiel:

$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$

c) Da $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ gilt, sind die Richtungsvektoren kollinear, sodass die Geraden entweder parallel oder identisch sind. Man prüft, ob A auf g liegt, ob es also eine Zahl s gibt, die die Gleichung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ erfüllt.

I $0 = -2s$, also $s = 0$
II $0 = 3s$, also $s = 0$
III $7 = 5 + 6s$, also $s = \frac{1}{3}$

A liegt also nicht auf g, die beiden Geraden sind daher parallel zueinander.
Alternativ: Man überlegt, dass $A(0|0|7)$ nicht auf g liegen kann, da der Punkt $(0|0|5)$ auf g liegt und g nicht mit der x_3-Achse übereinstimmt.

8

a) Da $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ sein kann, sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, sodass die Geraden g und h sich entweder schneiden oder windschief zueinander sind. Man untersucht die Gleichung

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ auf Lösbarkeit.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man das Ergebnis, dass die obige Gleichung keine Lösung für s und t hat. Daher sind die Geraden g und h windschief zueinander.

b) Da $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$ gilt, sind die Richtungsvektoren kollinear, sodass die Geraden g und h entweder parallel oder identisch sind. Man prüft, ob ein Punkt der Geraden g auf der Geraden h liegt, ob es also ein s gibt, das die Gleichung $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$ erfüllt.

I $1 = 3 - s$, also $s = 2$
II $5 = 2 + s$, also $s = 3$

Man kann die Rechnung beenden, da es bereits jetzt zwei unterschiedliche Werte für s gibt. Es liegt kein Punkt von g auf h, die Geraden g und h sind also parallel zueinander.

c) Da $\begin{pmatrix}1\\-1\\10\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ sein kann, sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, sodass die Geraden g und h sich entweder schneiden oder windschief zueinander sind.

Man untersucht die Gleichung

$\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\35\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ auf Lösbarkeit.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man das Ergebnis, dass die obige Gleichung eine Lösung für s und t hat mit $s = 2$ und $t = 4$. Somit schneiden sich die Geraden g und h.

Seite 185

16

a) $P(0|1|2)$, $Q(2|3|0{,}5)$, $R(2|0|1{,}5)$, $S(0|3|0{,}5)$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1{,}5\end{pmatrix}$, $s\in\mathbb{R}$;

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1{,}5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$

Da $\begin{pmatrix}2\\2\\-1{,}5\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ sein kann, sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, sodass die Geraden g und h sich entweder schneiden oder windschief zueinander sind.

Man untersucht die Gleichung

$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1{,}5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ auf Lösbarkeit.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man das Ergebnis, dass die obige Gleichung keine Lösung für s und t hat. Daher sind die Geraden g und h windschief zueinander.

17

a) GLX 1378: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t_1\cdot\begin{pmatrix}-10\\5\\0{,}5\end{pmatrix}$, $t_1\in\mathbb{R}$ in Minuten

Jet 2222: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\7\\9\end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix}10\\-6\\0\end{pmatrix}$, $t_2\in\mathbb{R}$ in Minuten

b) GLX 1378: $\left|\begin{pmatrix}-10\\5\\0{,}5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-10)^2 + 5^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{125{,}25} \approx 11{,}19$

Jet 2222: $\left|\begin{pmatrix}10\\-6\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{10^2 + (-6)^2} = \sqrt{136} \approx 11{,}66$

Das Flugzeug GLX 1378 hat eine Geschwindigkeit von etwa $11{,}19\,\frac{km}{min} = 671{,}4\,\frac{km}{h}$, der Jet 2222 fliegt mit einer Geschwindigkeit von $11{,}66\,\frac{km}{min} = 699{,}6\,\frac{km}{h}$.

c) Da $\begin{pmatrix}-10\\5\\0{,}5\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}10\\-6\\0\end{pmatrix}$ sein kann, sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, sodass die Geraden sich entweder schneiden oder windschief zueinander sind.

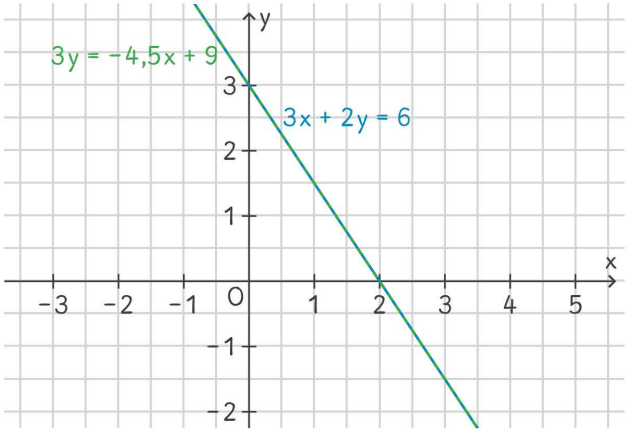
Man untersucht die Gleichung

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t_1\cdot\begin{pmatrix}-10\\5\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\7\\9\end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix}10\\-6\\0\end{pmatrix}$ auf Lösbarkeit.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man das Ergebnis, dass die obige Gleichung keine Lösung für t_1 und t_2 hat. Daher sind die Geraden, auf denen die Flugbahnen verlaufen, windschief zueinander. Es besteht daher keine Gefahr für eine Kollision.

G 21

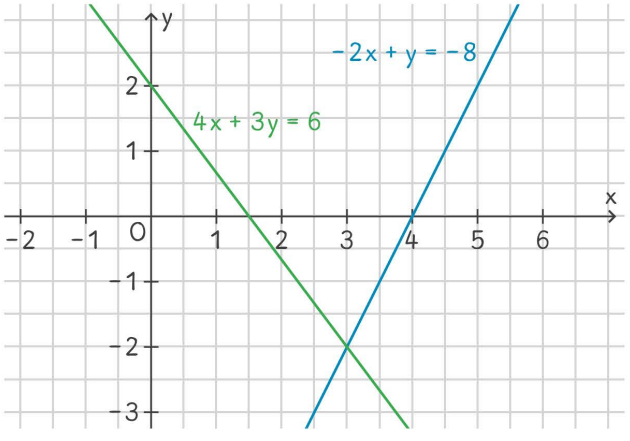
a)



Da die beiden zugehörigen Geraden identisch sind, enthält die Lösungsmenge unendlich viele Zahlenpaare:

$L = \{(x|y)\,|\,2y + 3x = 6\}$

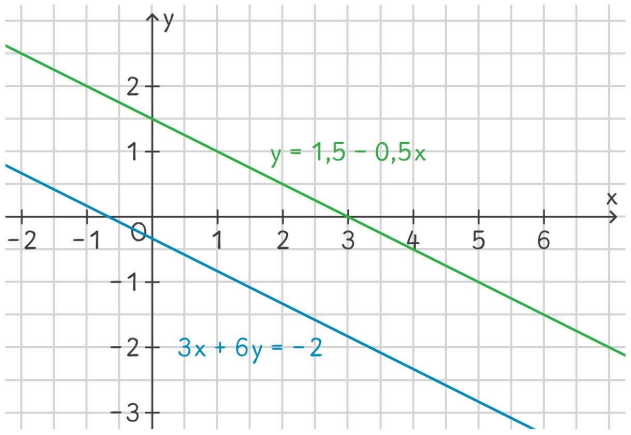
b)



Da die beiden zugehörigen Geraden sich in einem Punkt schneiden, enthält die Lösungsmenge ein Zahlenpaar:

$L = \{(3|-2)\}$

c)



Da die beiden zugehörigen Geraden parallel sind, enthält die Lösungsmenge kein Zahlenpaar: $L = \{\ \}$

Seite 188

8

Da das Viereck ABCD eine Raute ist, sind einander gegenüberliegende Seiten gleichlang und parallel zueinander. Es bleibt zu prüfen, ob zwei benachbarte Seiten orthogonal zueinander sind.

a) Da $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ist $\overrightarrow{AB}$ orthogonal zu $\overrightarrow{BC}$.

Somit handelt es sich um ein Quadrat.

b) Da $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2{,}5 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 - 13{,}75 + 12 = -4{,}75 \neq 0$

gilt, ist $\overrightarrow{AB}$ nicht orthogonal zu $\overrightarrow{BC}$. Somit ist die Raute ABCD kein Quadrat.

c) Da $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = 16 + 9 - 25 = 0$ gilt, ist $\overrightarrow{AB}$ orthogonal zu $\overrightarrow{BC}$. Somit handelt es sich um ein Quadrat.

d) Da $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$ gilt, ist $\overrightarrow{AB}$ nicht orthogonal zu $\overrightarrow{BC}$. Somit ist die Raute ABCD kein Quadrat.

9

a) Um den möglichen Schnittpunkt S der Geraden zu bestimmen, löst man die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man das Ergebnis, dass die obige Gleichung eine Lösung für s und t hat: $s = -3$ und $t = 1$. Somit schneiden sich die Geraden g und h.

Für die Orthogonalität prüft man, ob die Richtungsvektoren senkrecht aufeinander stehen, ob also $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ gilt.

Es ist $6 + 3 + 2 = 11 \neq 0$, die Geraden schneiden sich also nicht orthogonal.

b) Der Richtungsvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ der Geraden k muss zu den Richtungsvektoren von g und h, also zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zu $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal sein. Daher gilt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0$ und

$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0$, also $\begin{array}{ll} \text{I} & 2w_1 + w_2 + w_3 = 0 \\ \text{II} & 3w_1 + 3w_2 + 2w_3 = 0 \end{array}$

Da die Länge des Richtungsvektors keine Rolle spielt, wählt man zum Beispiel $w_1 = 1$. Beim Lösen des Gleichungssystems erhält man dann $w_2 = 1$ und $w_3 = -3$.

Somit ist $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein möglicher Richtungsvektor der Geraden k. Damit die Gerade k die Geraden g und h orthogonal schneidet, muss sie durch den Schnittpunkt S der Geraden g und h verlaufen.

Schnittpunkt S der Geraden g und h bestimmen:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-3|-1|-4)$$

Eine Parameterform für die Gerade k lautet somit

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Seite 190

19

a) $C(-3|3|0)$, $D(-3|-3|0)$, $F(0|0|-\sqrt{18})$

b) $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{18} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{18} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{18} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{18} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Die Raumdiagonalen sind paarweise orthogonal zueinander.

c) $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -\sqrt{18} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ \sqrt{18} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -\sqrt{18} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ \sqrt{18} \end{pmatrix}$

Da $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{ED}$ und $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BE}$ gilt, handelt es sich um ein Parallelogramm.

Da $|\overrightarrow{BF}| = |\overrightarrow{FD}| = |\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{BE}| = \sqrt{9+9+18} = 6$ gilt, handelt es sich sogar um eine Raute.

Da $\overrightarrow{BF} \circ \overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -\sqrt{18} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ \sqrt{18} \end{pmatrix} = 9 + 9 - 18 = 0$ gilt, ist bei F ein rechter Winkel und somit sind alle Winkel 90° groß. Die Raute ist also sogar ein Quadrat.

G **25**

a) Beim Einsetzen von $y = 2x + 3$ in I wurde ein Vorzeichenfehler gemacht.

Richtige Lösung:

$3x - (2x + 3) = 7$

$3x - 2x - 3 = 7 \quad |+3$

$x = 10$

$x = 10$ in II_a: $y = 2 \cdot 10 + 3 = 23$

$L = \{(10\,|\,23)\}$

b) Beim Einsetzen von $y = 1$ in I wurde der Faktor 4 weggelassen.

Richtige Lösung:

$4x = 9 - 1 = 8 \quad |:4$

$x = 2$

$L = \{(2\,|\,1)\}$

Seite 193

5

a) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

Für die Länge der Seiten gilt $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{72}$, $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{254}$, $|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{26}$ und $|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{98}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{PO} \circ \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PO}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{254}} = \frac{120}{\sqrt{18\,288}} \Rightarrow \alpha \approx 27{,}46°$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{QP} \circ \overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}| \cdot |\overrightarrow{QR}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{254} \cdot \sqrt{26}} = \frac{-23}{\sqrt{6604}} \Rightarrow \beta \approx 106{,}44°$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{RQ} \circ \overrightarrow{RO}}{|\overrightarrow{RQ}| \cdot |\overrightarrow{RO}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix}}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{98}} = \frac{19}{\sqrt{2548}} \Rightarrow \gamma \approx 67{,}89°$$

Da das Viereck eben ist, folgt mithilfe des Innenwinkelsummensatzes

$\gamma \approx 360° - 27{,}46° - 106{,}44° - 67{,}89° = 158{,}21°$.

b) $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ c \\ 0 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{2 + c^2}} \quad | \cdot \sqrt{2 + c^2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2 + c^2} = c \quad | \text{Quadrieren}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (2 + c^2) = c^2 \quad | \cdot 2$$

$$2 + c^2 = 2c^2 \quad | - c^2$$

$$2 = c^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\pm\sqrt{2} = c$$

Da $c = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2 + c^2}$ positiv sein muss, kommt nur $c = \sqrt{2}$ als Lösung in Betracht. Somit gilt $C(0\,|\sqrt{2}\,|\,3)$.

6

a) Schnittpunktuntersuchung:

Man untersucht die Gleichung

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf Lösbarkeit.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man das Ergebnis, dass die obige Gleichung die Lösung $r = 2$ und $s = 4$ hat. Daher schneiden sich die Geraden g und h.

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{83} \cdot \sqrt{22}} = \frac{42}{\sqrt{1826}} \Rightarrow \alpha \approx 10{,}62°$$

Die Geraden g und h schneiden sich in einem Winkel der Größe 10,62°.

b) Schnittpunktuntersuchung:

Man untersucht die Gleichung

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf Lösbarkeit.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man das Ergebnis, dass die obige Gleichung die Lösung $r = -2$ und $s = -3$ hat. Daher schneiden sich die Geraden g und h.

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{27}} \Rightarrow \alpha \approx 15{,}79°$$

Die Geraden g und h schneiden sich in einem Winkel der Größe 15,79°.

Seite 195

15

a) $A(1|1|0)$, $B(1|1|1)$, $C(0|0|1)$

$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{3}$

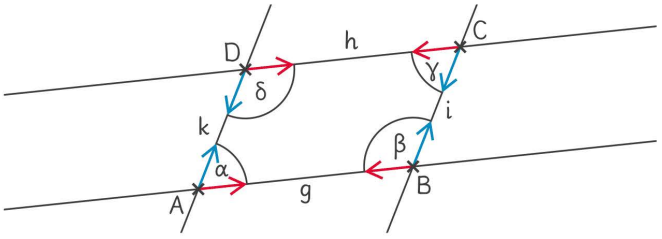
$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha \approx 35{,}26°$$

b) Schätzungen für die Größe des Winkels β sollten im Bereich zwischen 65° und 75° liegen.

$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{3}$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta \approx 70{,}53°$$

16



Die Geraden g und h sowie k und i sind parallel zueinander, da ihre Richtungsvektoren kollinear sind. Seien A der Schnittpunkt von g und k, B der Schnittpunkt von g und i, C der Schnittpunkt von h und i und D der Schnittpunkt von h und k. Dann gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{27}} = \frac{17}{\sqrt{351}} \Rightarrow \alpha \approx 24{,}85°$$

$$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix}0\\-3\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{27}} = \frac{-17}{\sqrt{351}} \Rightarrow \beta \approx 155{,}15°$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix}0\\-3\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{27}} = \frac{17}{\sqrt{351}} \Rightarrow \gamma \approx 24{,}85° = \alpha$$

$$\cos(\delta) = \frac{\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{27}} = \frac{-17}{\sqrt{351}} \Rightarrow \delta \approx 155{,}15° = \beta$$

Demnach sind gegenüberliegende Winkel gleich groß.

G **21**

a)
$2 \cdot \text{I} - \text{II}$ $\quad 2a = -4 \quad | : 2$
$\quad a = -2$
$a = -2$ in I $\quad -10 + 3b = 14 \quad | + 10$
$\quad 3b = 24 \quad | : 3$
$\quad b = 8$

Probe: $a = -2$ und $b = 8$ in I und II einsetzen:
I $-10 + 24 = 14$ ✓
II $-16 + 48 = 32$ ✓

b)
I $\quad 4x = 18 - 6y \quad | + 6y$
II $\quad 4x + 3y = 15$
I $\quad 4x + 6y = 18$
II $\quad 4x + 3y = 15$
I − II $\quad 3y = 3 \quad | : 3$
$\quad y = 1$
$y = 1$ in I: $\quad 4x = 18 - 6 \quad | : 4$
$\quad x = 3$

Probe: $x = 3$ und $y = 1$ in I und II einsetzen:
I $12 = 18 - 6$ ✓
II $12 + 3 = 15$ ✓

Seite 196

Klausurtraining

1

individuelle Lösung, zum Beispiel:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-5\\5\\-9\end{pmatrix}$ oder $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}10\\-10\\18\end{pmatrix}$

mit $s, t \in \mathbb{R}$

2

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\7\\-8\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}3\\7\\-8\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}$

Da $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ gilt, sind gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang. Somit handelt es sich um ein Parallelogramm.

3

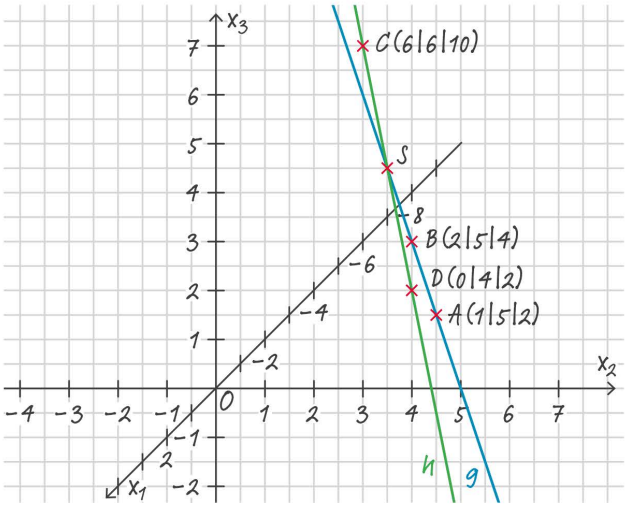
a) Da $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ sein kann, sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, sodass die Geraden g und h sich entweder schneiden oder windschief zueinander sind. Man untersucht die Gleichung

$\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\10\end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ auf Lösbarkeit.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man das Ergebnis, dass die obige Gleichung die Lösung $r_1 = 2$ und $r_2 = -1$ hat.

Schnittpunktberechnung:

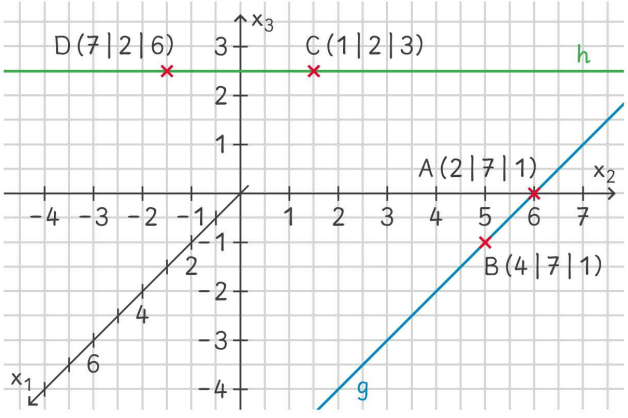
$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}$, also gilt $S(3|5|6)$.



b) Da $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}$ sein kann, sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, sodass die Geraden g und h sich entweder schneiden oder windschief zueinander sind. Man untersucht die Gleichung

$\begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}$ auf Lösbarkeit.

In der 2. Koordinate $(7 = 2)$ erkennt man sofort, dass diese Gleichung keine Lösung hat. Die Geraden g und h verlaufen somit windschief zueinander.



4

individuelle Lösung, zum Beispiel:

a) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$, da die Richtungsvektoren kollinear sind, und der Punkt $P(3|-1|2)$ auf der Geraden h liegt.

b) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-5\\0\\5\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$, da die Richtungsvektoren kollinear sind, und der Punkt $P(3|-1|2)$ nicht auf der Geraden h liegt.

c) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$, da g und h durch den Punkt $P(4|-1|1)$ verlaufen, und die Richtungsvektoren nicht kollinear sind.

d) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$, da die Gleichung $\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ keine Lösung für r und s hat.

5

$\vec{a} \circ \vec{b} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht orthogonal zueinander.

$\vec{a} \circ \vec{c} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{c}$ sind orthogonal zueinander.

$\vec{a} \circ \vec{d} = 2 - \sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{d}$ sind nicht orthogonal zueinander.

$\vec{a} \circ \vec{e} = -\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{e}$ sind nicht orthogonal zueinander.

$\vec{b} \circ \vec{c} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind orthogonal zueinander.

$\vec{b} \circ \vec{d} = \sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow \vec{b}$ und $\vec{d}$ sind nicht orthogonal zueinander.

$\vec{b} \circ \vec{e} = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{b}$ und $\vec{e}$ sind nicht orthogonal zueinander.

$\vec{c} \circ \vec{d} = 2 \neq 0 \Rightarrow \vec{c}$ und $\vec{d}$ sind nicht orthogonal zueinander.

$\vec{c} \circ \vec{e} = -\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow \vec{c}$ und $\vec{e}$ sind nicht orthogonal zueinander.

$\vec{d} \circ \vec{e} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \vec{d}$ und $\vec{e}$ sind orthogonal zueinander.

6

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-9\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = 7$; $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{98}$; $|\overrightarrow{AD}| = 7$

Da $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 7$ gilt, handelt es sich um ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{BD}$.

Der rechte Winkel kann somit nur bei A liegen.

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix} = 12 + 6 - 18 = 0$

$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ sind orthogonal zueinander. Das Dreieck ABD ist somit rechtwinklig.

b) $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 = 24{,}5$

Der Flächeninhalt beträgt 24,5 FE.

c) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}2\\0\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\\5\end{pmatrix} \Rightarrow C(8|2|5)$

7

Es ist zu prüfen, ob ein Winkel (und damit alle vier Winkel) ein rechter Winkel ist.

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}10\\-8\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-10\\-8\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}10\\-8\\6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-10\\-8\\6\end{pmatrix} = -100 + 64 + 36 = 0$

Bei der Raute handelt es sich sogar um ein Quadrat.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-4\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-4\\0\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\-2\\-3\end{pmatrix} = 8 + 3 = 11 \neq 0$

Bei der Raute handelt es sich nicht um ein Quadrat.

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-2\\2{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2\\-2{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2\\2{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\-2{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix} = 4 - 6{,}25 + 2{,}25 = 0$

Bei der Raute handelt es sich sogar um ein Quadrat.

8

a) individuelle Lösung, zum Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix}$, da $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$, $\vec{b} \circ \vec{c} = 0$ und $\vec{a} \circ \vec{c} = 0$ gilt.

b) individuelle Lösung, zum Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, da $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$, $\vec{b} \circ \vec{c} = 0$ und $\vec{a} \circ \vec{c} = 0$ gilt.

c) Zwei Vektoren, die nicht der Nullvektor sind, liegen immer in einer Ebene. Ein dritter Vektor, der sich als Linearkombination der ersten zwei Vektoren darstellen lässt, liegt in derselben Ebene. Drei Vektoren, die jeweils paarweise orthogonal zueinander sind, können aber nicht in einer Ebene liegen.

9

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden müssen zueinander orthogonal sein, d.h. deren Skalarprodukt muss 0 sein. Außerdem müssen sich die beiden Geraden schneiden. Um dies zu erzielen, wird einfach derselbe Ortsvektor gewählt.

a) individuelle Lösung, zum Beispiel: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$

b) individuelle Lösung, zum Beispiel: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\8\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$

c) individuelle Lösung, zum Beispiel: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$

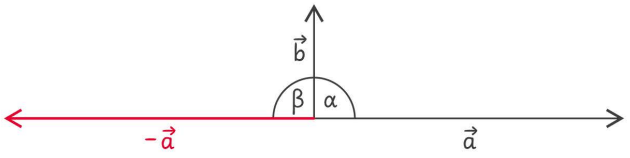
d) individuelle Lösung, zum Beispiel: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}5\\12\\0\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$

Seite 197

10

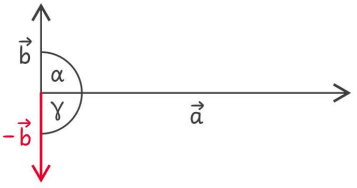
a) $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{0}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

b) Der Winkel β zwischen $-\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist 90° groß.



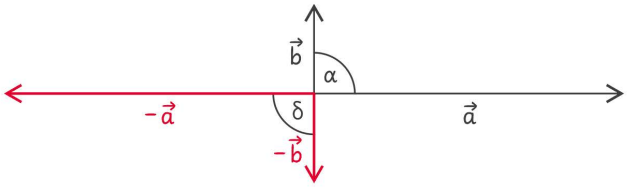
$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix}-3\\-1\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{0}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = 0 \Rightarrow \beta = 90°$

Der Winkel γ zwischen $\vec{a}$ und $-\vec{b}$ ist 90° groß.



$\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{0}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = 0 \Rightarrow \gamma = 90°$

Der Winkel δ zwischen $-\vec{a}$ und $-\vec{b}$ ist 90° groß.



$\cos(\delta) = \frac{\begin{pmatrix}-3\\-1\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{0}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = 0 \Rightarrow \delta = 90°$

11

a) $\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\4\\-8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{8}} = \frac{|-16|}{\sqrt{640}} \Rightarrow \alpha \approx 50{,}77°$

b) Es muss $\begin{pmatrix}a\\4\\-8\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\a\\2\end{pmatrix} = 0$ gelten.

$\Rightarrow -2a + 4a - 16 = 0 \Rightarrow a = 8$

Für $a = 8$ sind die Geraden zueinander orthogonal.

c) Es müsste $\begin{pmatrix}a\\4\\-8\end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix}-2\\a\\2\end{pmatrix}$ gelten.

I $\quad a = -2k$

II $\quad 4 = k \cdot a$

III $\quad -8 = 2k \quad \Rightarrow k = -4$

Einsetzen von $k = -4$ in I ergibt $a = 8$.

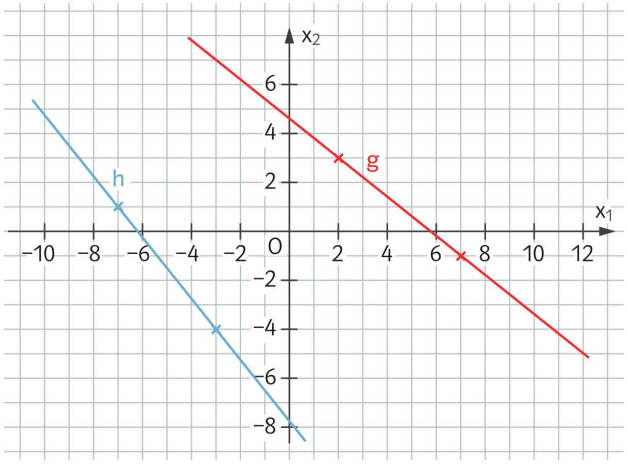
Einsetzen von $a = 8$ und $k = -4$ in II ergibt $4 = -4 \cdot 8$.

Das ist falsch.

Da die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sein können, gibt es keine zwei Geraden der Scharen g_a und h_a, die zueinander parallel verlaufen.

12

a)

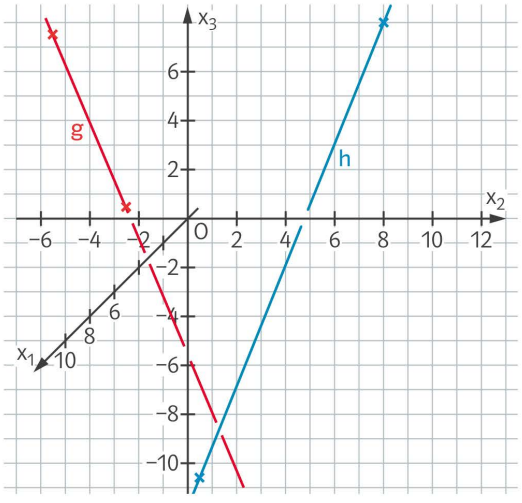


In der Ebene können zwei Geraden nur parallel oder identisch sein oder sich schneiden. Da die Richtungsvektoren von g und h nicht kollinear zueinander sind, schneiden sich die beiden Geraden.

Die Gleichung $\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$ hat die Lösung $r = -\frac{62}{9}$ und $s = \frac{55}{9}$.
Der Schnittpunkt ist daher $S\left(-27\frac{4}{9}\middle|26\frac{5}{9}\right)$. Geschätzter Schnittwinkel: $\alpha = 15°$.

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{41}} = \frac{40}{41} \Rightarrow \alpha \approx 12{,}68°$$

b)



Da die Gleichung $\begin{pmatrix}1\\-5\\8\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\-4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\-8\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}11\\-2\\-13\end{pmatrix}$ für r und s keine Lösung hat, und die Richtungsvektoren nicht kollinear zueinander sind, verlaufen die Geraden g und h windschief zueinander.

13

a) $\vec{a}\circ\vec{b} = 0$

$$\begin{pmatrix}5\\a\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$-5 + 3a + 2 = 0$$

$$a = 1 \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}$$

b)

$$\cos(45°) = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix}}{1\cdot\sqrt{1+b^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$\sqrt{1+b^2} = \sqrt{2}$$

$$1 + b^2 = 2$$

$$b^2 = 1$$

$$b = \pm 1$$

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ oder } \vec{b_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

c)

$$\cos(60°) = \frac{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\3\\c\end{pmatrix}}{2\cdot\sqrt{13+c^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{2\cdot\sqrt{13+c^2}}$$

$$\sqrt{13+c^2} = 4$$

$$13 + c^2 = 16$$

$$c^2 = 3$$

$$c = \pm\sqrt{3}$$

$$\vec{c_1} = \begin{pmatrix}2\\3\\\sqrt{3}\end{pmatrix} \text{ oder } \vec{c_2} = \begin{pmatrix}2\\3\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

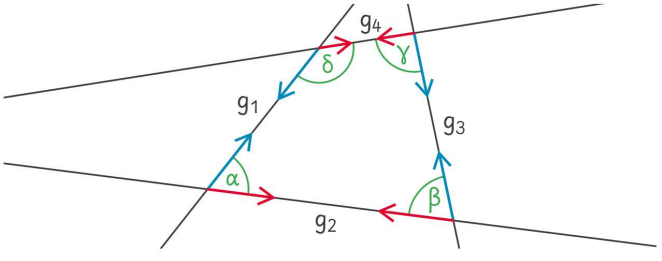
14

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}-4\\7\\-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-5\\-1\\1\end{pmatrix}}{9\cdot\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{27}} \Rightarrow \alpha \approx 78{,}904°$$

$$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-6\\4\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{56}} = \frac{-24}{\sqrt{1512}} \Rightarrow \beta \approx 128{,}113°$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix}6\\-4\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{17}} = \frac{-4}{\sqrt{952}} \Rightarrow \gamma \approx 97{,}449°$$

$$\cos(\delta) = \frac{\begin{pmatrix}4\\-7\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}}{9\cdot\sqrt{17}} = \frac{21}{9\cdot\sqrt{17}} \Rightarrow \delta \approx 55{,}534°$$



$\alpha + \beta + \gamma + \delta \approx 78{,}904° + 128{,}113° + 97{,}449° + 55{,}534° = 360°$
Somit ist die Summe der Innenwinkel in diesem Viereck 360°.

15

a) $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{DB} \circ \overrightarrow{DS}}{|\overrightarrow{DB}| \cdot |\overrightarrow{DS}|} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}}{\sqrt{128} \cdot \sqrt{228}} = \frac{64}{8 \cdot \sqrt{456}} = \frac{8}{\sqrt{456}} \Rightarrow \alpha \approx 67{,}99°$

b) Die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AB}$ bzw. $\overline{DC}$ sind $M_{AB}(4|0|0)$ bzw. $M_{DC}(4|8|0)$.

$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{M_{DC}M_{AB}} \circ \overrightarrow{M_{DC}S}}{|\overrightarrow{M_{DC}M_{AB}}| \cdot |\overrightarrow{M_{DC}S}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}}{8 \cdot \sqrt{212}} = \frac{32}{8 \cdot \sqrt{212}} = \frac{4}{\sqrt{212}}$

$\Rightarrow \beta \approx 74{,}05°$

16

individuelle Lösung je nach Wahl des Koordinatensystems:
Eckpunkte des Quaders:
A(5|0|0), B(5|8|0), C(0|8|0), D(0|0|0), E(5|0|3), F(5|8|3), G(0|8|3), H(0|0|3)
Gleichungen für die Raumdiagonalen:

$g_{AG}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$; $g_{HB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Durch Gleichsetzen der Geradengleichungen ermittelt man den Schnittpunkt M der Raumdiagonalen:
Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man die Lösung s = t = 0,5.
Schnittpunktberechnung:

$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow M(2{,}5|4|1{,}5).$

$\alpha = \sphericalangle AMB$ und $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{MA} \circ \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -4 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}}{\sqrt{24{,}5} \cdot \sqrt{24{,}5}} = \frac{-7{,}5}{24{,}5}$

$\Rightarrow \alpha \approx 107{,}83°$

$\beta = \sphericalangle BMC$ und $\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{MB} \circ \overrightarrow{MC}}{|\overrightarrow{MB}| \cdot |\overrightarrow{MC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 4 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}}{\sqrt{24{,}5} \cdot \sqrt{24{,}5}} = \frac{12}{24{,}5}$

$\Rightarrow \beta \approx 60{,}67°$

17

Da das Dreieck ABC gleichseitig ist, weiß man, dass alle Winkel die Größe 60° haben. Da die Seitenlägen 3 LE ist, weiß man, dass $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 3$.

$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\alpha) = 3 \cdot 3 \cdot \cos(60°) = 4{,}5$

Seite 198

18

a) $f: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 19{,}85 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -3{,}5 \\ 19{,}85 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$;

$k: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

b) Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -3{,}5 \\ 19{,}85 \end{pmatrix}$ sein kann, sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, sodass die Geraden h und k sich entweder schneiden oder windschief zueinander sind.
Man untersucht die Gleichung

$\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -3{,}5 \\ 19{,}85 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf Lösbarkeit.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man das Ergebnis, dass die obige Gleichung keine Lösung hat, somit verlaufen h und k windschief zueinander.

c) M(−3,5|3,5|0)
Dreieck AMS:
Der Winkel am Punkt M ist ein rechter Winkel, da $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 19{,}85 \end{pmatrix}$ senkrecht zur x_1x_2-Ebene und damit auch senkrecht zu der Geraden durch die Punkte A und M verläuft.
Winkel α_1 im Punkt A:

$\cos(\alpha_1) = \frac{\overrightarrow{AM} \circ \overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 19{,}85 \end{pmatrix}}{\sqrt{24{,}5} \cdot \sqrt{418{,}5225}} = \frac{24{,}5}{\sqrt{10\,253{,}801\,25}}$

$\Rightarrow \alpha_1 \approx 76{,}0°$
Winkel β_1 im Punkt S: $\beta_1 = 180° - 90° - \alpha_1 = 14{,}0°$
Dreieck ABS:
Winkel α_2 im Punkt A:

$\cos(\alpha_2) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 19{,}85 \end{pmatrix}}{7 \cdot \sqrt{418{,}5225}} = \frac{3{,}5}{\sqrt{418{,}5225}} \Rightarrow \alpha_2 \approx 80{,}15°$

Weil es sich um eine quadratische, senkrechte Pyramide handelt, ist das Dreieck ABS gleichschenklig. Somit ist der Winkel β_2 im Punkt B ebenfalls 80,15° groß.
Winkel γ im Punkt S: $\gamma = 180° - \alpha_2 - \beta_2 \approx 19{,}70°$

d) $\frac{17}{3}$ ist etwa das 0,285-Fache von 19,85.

$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA} + 0{,}285 \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -0{,}9975 \\ 0{,}9975 \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_2\left(-0{,}9975 \middle| 0{,}9975 \middle| \frac{17}{3}\right)$

$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OB} + 0{,}285 \cdot \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -0{,}9975 \\ 6{,}0025 \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B_2\left(-0{,}9975 \middle| 6{,}0025 \middle| \frac{17}{3}\right)$

$C_2\left(-6{,}0025 \middle| 6{,}0025 \middle| \frac{17}{3}\right)$, $D_2\left(-6{,}0025 \middle| 0{,}9975 \middle| \frac{17}{3}\right)$

e) $V_{Stumpf} = V_{Pyramide} - V_{Spitze}$

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 7^2 \cdot 19{,}85 \approx 324{,}217\,[\text{cm}^3]$

$V_{Spitze} = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot \left(19{,}85 - \frac{17}{3}\right) \approx 118{,}194\,[\text{cm}^3]$

$V_{Stumpf} = 324{,}217 - 118{,}194 = 206{,}023\,[\text{cm}^3]$

Die Frischkäsepackung hat ein Volumen von etwa 206 cm^3.

19

a) Da der Fußpunkt F_C auf der Seite $c = \overline{AB}$ liegen muss, müssen $\overrightarrow{AF_C}$ und $\overrightarrow{AB}$ Vielfache voneinander sein, d.h., es gibt ein $r \in \mathbb{R}$, sodass $\overrightarrow{AF_C} = r \cdot \overrightarrow{AB}$.

Da die Höhe $h_c = \overrightarrow{CF_C}$ senkrecht auf der Seite $c = \overline{AB}$ stehen muss, muss $\overrightarrow{CF_C} \circ \overrightarrow{AB} = 0$ gelten. Da $\overrightarrow{CF_C} = \overrightarrow{CA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ gilt, muss also auch $(\overrightarrow{CA} + r \cdot \overrightarrow{AB}) \circ \overrightarrow{AB} = 0$ gelten.

b) Bestimmung von F_c

$$(\overrightarrow{CA} + r \cdot \overrightarrow{AB}) \circ \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}2-r\\2-r\\3r\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} = 0$$

$$11r = 4$$

$$r = \frac{4}{11}$$

$$\overrightarrow{OF_c} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\frac{7}{11}\\3\frac{7}{11}\\2\frac{1}{11}\end{pmatrix} \Rightarrow F_c\left(5\tfrac{7}{11} \middle| 3\tfrac{7}{11} \middle| 2\tfrac{1}{11}\right)$$

Bestimmung von F_a

$$(\overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{BC}) \circ \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}-1-r\\-1-r\\3-3r\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix} = 0$$

$$11r = 7$$

$$r = \frac{7}{11}$$

$$\overrightarrow{OF_a} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}4\frac{4}{11}\\2\frac{4}{11}\\2\frac{1}{11}\end{pmatrix} \Rightarrow F_a\left(4\tfrac{4}{11} \middle| 2\tfrac{4}{11} \middle| 2\tfrac{1}{11}\right)$$

c) Da sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, genügt es, den Schnittpunkt der Höhen h_c und h_a zu bestimmen.

$$h_c\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\frac{7}{11}\\1\frac{7}{11}\\1\frac{1}{11}\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R};\quad h_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-1\frac{7}{11}\\-1\frac{7}{11}\\1\frac{1}{11}\end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$$

Man untersucht die Gleichung

$$\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\frac{7}{11}\\1\frac{7}{11}\\1\frac{1}{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-1\frac{7}{11}\\-1\frac{7}{11}\\1\frac{1}{11}\end{pmatrix} \text{ auf Lösbarkeit.}$$

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man das Ergebnis, dass die obige Gleichung für λ und μ die Lösung $\lambda = \mu = \frac{11}{18}$ hat. Daher schneiden sich die Geraden h_c und h_a.

Schnittpunktberechnung:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \frac{11}{18} \cdot \begin{pmatrix}1\frac{7}{11}\\1\frac{7}{11}\\1\frac{1}{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\frac{2}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow S\left(5 \middle| 3 \middle| 1\tfrac{2}{3}\right)$$

Die Höhen des Dreiecks ABC schneiden sich im Punkt $S\left(5 \middle| 3 \middle| 1\tfrac{2}{3}\right)$.

d) $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CF_c}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\frac{7}{11}\\1\frac{7}{11}\\1\frac{1}{11}\end{pmatrix}\right| = 3 \cdot \sqrt{2}\ [\text{FE}]$

$\approx 4{,}24\ [\text{FE}]$

Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von 4,24 FE.

20

a) Es sei F_{xz} der Lotfußpunkt des Lots von Punkt F auf die Seite $\overline{EA}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{FE} \circ \overrightarrow{FF_{xz}}}{|\overrightarrow{FE}| \cdot |\overrightarrow{FF_{xz}}|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\-3\\0{,}5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{9{,}25} \cdot 3} = \frac{3}{\sqrt{9{,}25}} \Rightarrow \alpha \approx 9{,}46°$$

Die Größe des Neigungswinkels des Daches beträgt etwa 9,46°.

b) $|\overrightarrow{EF}| = \left|\begin{pmatrix}0\\3\\-0{,}5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9{,}25} \approx 3{,}04\ [\text{m}]$

In 50 Sekunden legt die Markise etwa 3,04 m zurück, sie fährt also mit einer Geschwindigkeit von etwa $3{,}65 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

c) (1) $\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix}0\\3\\2{,}5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix}0\\3\\-0{,}5\end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{DG}| = \sqrt{15{,}25}$, $|\overrightarrow{DH}| = 3$, $|\overrightarrow{HG}| = \sqrt{9{,}25}$

Das Sonnensegel ist somit nicht gleichschenklig.

Da $|\overrightarrow{DG}|^2 = 15{,}25 \neq 9 + 9{,}25 = |\overrightarrow{DH}|^2 + |\overrightarrow{HG}|^2$ ist, gilt der Satz des Pythagoras nicht, somit ist das Sonnensegel nicht rechtwinklig.

(2) $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{DH}| \cdot h_{DH} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5\ [\text{m}^2]$

Es werden 4,5 m² Stoff benötigt.

d) (1) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$

(2) Mit einem MMS werden die Punkte $D(0|0|0)$, $H(0|0|3)$ und $P_s(0|3|s)$ mit einem Schieberegler für s im Bereich $0 \leq s \leq 2{,}5$ gezeichnet und der Winkel $\sphericalangle HP_sD$ gemessen.

Durch Variieren des Schiebereglers erhält man folgenden Bereich für s (auf zwei Dezimalen genau), in dem der Winkel $\sphericalangle HP_sD$ größer als 50° ist: $0{,}61 \leq s \leq 2{,}40$.

Seite 199

21

a) g_1 und g_2 seien die Geraden, in denen die Kanten k_1 bzw. k_2 liegen.

$g_1\colon \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R};\quad g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$

Man untersucht die Gleichung $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ auf Lösbarkeit.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man das Ergebnis, dass die obige Gleichung für λ und μ die Lösung $\lambda = \mu = 2{,}5$ hat. Daher schneiden sich die Geraden g_1 und g_2.

Berechnung der Größe des Schnittwinkels:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{72}} = \frac{|56|}{72} = \frac{7}{9} \Rightarrow \alpha \approx 38{,}94°$$

Die Geraden g_1 und g_2, in denen die Kanten k_1 und k_2 liegen, schneiden sich in einem Winkel von etwa 39°.

b) $0 \leq h \leq 2$

c) $E_1(1|1|4),\ S_1(9|1|4),\ S_2(1|9|4),\ F_1(9|9|4)$

$\overrightarrow{E_1S_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{E_1S_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{S_1F_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{S_2F_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{E_1S_1}\right| = \left|\overrightarrow{E_1S_2}\right| = \left|\overrightarrow{S_1F_1}\right| = \left|\overrightarrow{S_2F_1}\right| = 8$

Alle Kanten der Deckfläche sind gleich lang. Somit handelt es sich um eine Raute.

Da $\overrightarrow{E_1S_1} \circ \overrightarrow{E_1S_2} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ist bei E_1 ein rechter Winkel. Somit sind alle Winkel rechtwinklig und es handelt sich sogar um ein Quadrat.

d) $E_h(h|h|4h),\ S_1(9|1|4),\ S_2(1|9|4),\ F_h(10-h|10-h|8-4h)$

$\overrightarrow{E_hS_1} = \begin{pmatrix} 9-h \\ 1-h \\ 4-4h \end{pmatrix},\ \overrightarrow{E_hS_2} = \begin{pmatrix} 1-h \\ 9-h \\ 4-4h \end{pmatrix},\ \overrightarrow{S_1F_h} = \begin{pmatrix} 1-h \\ 9-h \\ 4-4h \end{pmatrix},$

$\overrightarrow{S_2F_h} = \begin{pmatrix} 9-h \\ 1-h \\ 4-4h \end{pmatrix}$

Es gilt also: $\overrightarrow{E_hS_1} = \overrightarrow{S_2F_h}$ und $\overrightarrow{E_hS_2} = \overrightarrow{S_1F_h}$. Also ist die Form der Fläche ein Parallelogramm. Außerdem ist

$\left|\overrightarrow{E_hS_1}\right| = \left|\overrightarrow{S_2F_h}\right| = \left|\overrightarrow{E_hS_2}\right| = \left|\overrightarrow{S_1F_h}\right|$

$= \sqrt{(9-h)^2 + (1-h)^2 + (4-4h)^2}$.

Somit sind alle Seiten gleich lang und es handelt sich für alle Werte von h um eine Raute.

e) $\overrightarrow{DE_h} = \begin{pmatrix} h \\ h \\ 4h \end{pmatrix},\ \overrightarrow{E_hS_2} = \begin{pmatrix} 1-h \\ 9-h \\ 4-4h \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DE_h} \circ \overrightarrow{E_hS_2} = \begin{pmatrix} h \\ h \\ 4h \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1-h \\ 9-h \\ 4-4h \end{pmatrix}$

$= h - h^2 + 9h - h^2 + 16h - 16h^2$

$= -18h^2 + 26h = 2h \cdot (-9h + 13) = 0$

führt zu $h = 0$ (im Sachkontext nicht sinnvoll) oder $9h = 13$ und somit $h_2 = \frac{13}{9}$. Für $h = \frac{13}{9}$ verläuft die Kante $\overline{DE_h}$ orthogonal zur Kante $\overline{E_hS_2}$.

f) Die Punkte, die auf der Kante k_2 des Pyramidenstumpfes liegen, sind durch die Geradengleichung von g_2 für $0 \leq \mu \leq 1$ beschrieben. Damit F_h auf der Kante k_2 liegt, muss daher gelten:

(1) $8 \leq \frac{7h-25}{h-3} \leq 10$ (2) $0 \leq \frac{12h-20}{h-3} \leq 8$

Aus Gleichung (2) folgen die beiden Ungleichungen:

(2a) $0 \leq \frac{12h-20}{h-3}$ (2b) $\frac{12h-20}{h-3} \leq 8$

$h > 3$ oder $h \leq \frac{5}{3}$ $\left(\text{da } h \leq \frac{5}{3} < 3\right)$

Für $h > 3$ liegt F_h nicht auf k_2. $12h - 20 \geq 8h - 24$, $h \geq -1$

Aus Gleichung (1) ergeben sich für $h < 3$ die beiden Ungleichungen:

(1a) $8h - 24 \geq 7h - 25$, $h \geq -1$ (2b) $7h - 25 \geq 10h - 30$, $5 \geq h$

Insgesamt ergibt sich also der Bereich $-1 \leq h \leq \frac{5}{3}$.

Dabei gilt:

Für $h = \frac{5}{3}$ ist $\lambda = 0$, also $F_h = B$.

Für $h = -1$ ist $\lambda = 1$, also $F_h = H$.

22

a) $g_{\overline{AB}}\colon \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R};\quad g_{\overline{BC}}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ 16 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R};$

$g_{\overline{AC}}\colon \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

b) Weil $AP_1A'P_2$ ein Parallelogramm ist, gilt $\left|\overrightarrow{AP_2}\right| = \left|\overrightarrow{P_1A'}\right|$ und $\left|\overrightarrow{AP_1}\right| = \left|\overrightarrow{P_2A'}\right|$. Da außerdem w_α den Winkel α halbiert, sind die Dreiecke AP_1A' und $AA'P_2$ kongruent zueinander.

Somit muss auch $\left|\overrightarrow{AP_1}\right| = \left|\overrightarrow{AP_2}\right|$ gelten und es handelt sich um eine Raute.

c) $\overrightarrow{u_0} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}6 \\ 0 \end{pmatrix};$

$\overrightarrow{v_0} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$

d) $w_\alpha\colon \vec{x} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix},\ t_1 \in \mathbb{R}$

Man setzt $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{w_0} = \frac{1}{|\vec{w}|} \cdot \vec{w} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ 16 \end{pmatrix}$

$w_\beta\colon \vec{x} = \vec{b} + t_2 \cdot \left(-\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{w_0}\right);$

$w_\beta\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{176}{145} \\ -\frac{192}{145} \\ \frac{16}{29} \end{pmatrix},\ t_2 \in \mathbb{R};$

$w_\gamma: \vec{x} = \vec{c} + t_3 \cdot (-\overrightarrow{v_0} - \overrightarrow{w_0})$;

$w_\gamma: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{12}{29} \\ \frac{192}{145} \\ -\frac{196}{145} \end{pmatrix}, \; t_3 \in \mathbb{R}$

e) $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}}{15 \cdot 20} = -0{,}36 \Rightarrow \alpha \approx 111{,}10°$

Winkel α_1 zwischen $g_{\overline{AB}}$ und w_α:

$\cos(\alpha_1) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} \right|}{15 \cdot \sqrt{1{,}28}} = \frac{9{,}6}{15 \cdot \sqrt{1{,}28}} \Rightarrow \alpha_1 \approx 55{,}55° = \frac{\alpha}{2}$

$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ 16 \end{pmatrix}}{15 \cdot 29} = \frac{111}{145} \Rightarrow \beta \approx 40{,}05°$

Winkel β_1 zwischen $g_{\overline{BA}}$ und w_β:

$\cos(\beta_1) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{176}{145} \\ -\frac{192}{145} \\ \frac{16}{29} \end{pmatrix} \right|}{15 \cdot \sqrt{\frac{512}{145}}} = \frac{256}{145 \cdot \sqrt{\frac{512}{145}}} \Rightarrow \beta_1 \approx 20{,}02° = \frac{\beta}{2}$

$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -16 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -12 \\ 21 \\ -16 \end{pmatrix}}{20 \cdot 29} = \frac{127}{145} \Rightarrow \gamma \approx 28{,}85°$

Winkel γ_1 zwischen $g_{\overline{CA}}$ und w_γ:

$\cos(\gamma_1) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -16 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\frac{12}{29} \\ \frac{192}{145} \\ -\frac{196}{145} \end{pmatrix} \right|}{20 \cdot \sqrt{\frac{544}{145}}} = \frac{272}{145 \cdot \sqrt{\frac{544}{145}}} \Rightarrow \gamma_1 \approx 14{,}43° \approx \frac{\gamma}{2}$

f) w_α: Berechnung des Schnittpunkts von $g_{\overline{BC}}$ mit w_α

Man löst die Gleichung

$\begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ 16 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man die Lösung $s = \frac{9}{21}$ und $t_1 = \frac{60}{7}$. Daher schneiden sich die Geraden $g_{\overline{BC}}$ und w_α.

Schnittpunkt S_1:

$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} -\frac{48}{7} \\ 0 \\ \frac{48}{7} \end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{AS_1}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{48}{7} \\ 0 \\ \frac{48}{7} \end{pmatrix} \right| = \frac{48}{7} \cdot \sqrt{2} \approx 9{,}70$

Die Winkelhalbierende w_α ist $\frac{48}{7} \cdot \sqrt{2}$ Längeneinheiten lang.

w_β: Berechnung des Schnittpunkts von $g_{\overline{AC}}$ mit w_β

Man löst die Gleichung

$t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{176}{145} \\ -\frac{192}{145} \\ \frac{16}{29} \end{pmatrix}$.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man die Lösung $t = \frac{15}{44}$ und $t_2 = \frac{435}{44}$. Daher schneiden sich die Geraden $g_{\overline{AC}}$ und w_β.

Schnittpunkt S_2:

$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{45}{11} \\ \frac{60}{11} \end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{BS_2}| = \left| \begin{pmatrix} 12 \\ -\frac{144}{11} \\ \frac{60}{11} \end{pmatrix} \right| = \frac{12}{11} \cdot \sqrt{290} \approx 18{,}58$

Die Winkelhalbierende w_β ist $\frac{12}{11} \cdot \sqrt{290}$ Längeneinheiten lang.

w_γ: Berechnung des Schnittpunkts von $g_{\overline{AB}}$ mit w_γ

Man löst die Gleichung

$r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{12}{29} \\ \frac{192}{145} \\ -\frac{196}{145} \end{pmatrix}$.

Durch eine Rechnung oder mithilfe eines MMS erhält man die Lösung $r = \frac{20}{49}$ und $t_3 = \frac{580}{49}$. Daher schneiden sich die Geraden $g_{\overline{AB}}$ und w_γ.

Schnittpunkt S_3:

$\overrightarrow{OS_3} = \begin{pmatrix} -\frac{240}{49} \\ \frac{180}{49} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{CS_3}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{240}{49} \\ \frac{768}{49} \\ -16 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{1262080}}{49} \approx 22{,}93$

Die Winkelhalbierende w_γ ist etwa 22,93 Längeneinheiten lang.

VI Ebenen

Seite 207

Check-in

1

a) Gleichsetzungsverfahren

$8x - 10 = 6x - 6$

Umstellen nach x ergibt $x = 2$ und Einsetzen in eine der beiden Gleichungen ergibt $y = 6$.

Probe: $8 \cdot 2 - 10 = 6$ ✓

$6 \cdot 2 - 6 = 6$ ✓

$L = \{(2; 6)\}$

b) Einsetzungsverfahren

$(8y - 3) + 2y = 4$

Umstellen nach y ergibt $y = 0{,}7$ und Einsetzen in eine der beiden Gleichungen und erneutes Umstellen ergibt $x = 1{,}3$.

Probe: $2 \cdot 1{,}3 = 8 \cdot 0{,}7 - 3 = 2{,}6$ ✓

$2 \cdot 1{,}3 + 2 \cdot 0{,}7 = 4$ ✓

$L = \{(1{,}3; 0{,}7)\}$

c) Additionsverfahren

Durch Addition der beiden Zeilen ergibt sich $10x = 20$ und somit $x = 2$. Einsetzen von x in eine der beiden Gleichungen und Umstellen nach y ergibt $y = 2$.

Probe: $4 \cdot 2 - 8 \cdot 2 = -8$ ✓

$6 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = 28$ ✓

$L = \{(2; 2)\}$

d) Additionsverfahren

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{I} & 6x & - & 8y & = & 5 \\ \text{II} & -18x & + & 24y & = & -17 \\ \hline \text{I} & 6x & - & 8y & = & 5 \\ \text{II}_a & 0 & + & 0 & = & -2 \quad \text{II}_a = 3\,\text{I} + \text{II} \end{array}$$

Da $0 = -2$ gilt, hat das LGS keine Lösung.

$L = \{\ \}$

2

individuelle Lösung, zum Beispiel:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist ein möglicher Richtungsvektor.

Als Stützvektoren können die Ortsvektoren der Punkte A oder B verwendet werden.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ oder $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ 25 \end{pmatrix}$

Als Stützvektoren können die Ortsvektoren der Punkte A oder B verwendet werden. Der Richtungsvektor kann vervielfacht werden.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ 25 \end{pmatrix}$ oder $g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -26 \\ -50 \end{pmatrix}$

3

a) (1) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 - 12 - 2 = -9$

(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -6 - 4 + 4 = -6$

b) Zwei Vektoren liegen orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt null ergibt.

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 + 4 - 6 = 0$, die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal zueinander.

(2) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = -6 - 10 + 16 = 0$, die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal zueinander.

4

Man verändert den Parameter einer der beiden Gleichungen. Aus dem Ansatz $g = h$ ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2 - t = s \\ \text{II} & 1 - t = -1 + s \\ \text{III} & -1 + 3t = -1 \end{array}$$

Aus III folgt, dass $t = 0$ ist. Daraus berechnet man in I $s = 2$.

Eine Kontrolle in II ergibt $1 - 0 = -1 + 2 = 1$.

Der Schnittpunkt der Geraden g und h liegt in $S(2|1|-1)$,

denn $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5

a) $\cos(\alpha) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{24}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{45}} \Rightarrow \alpha \approx 17{,}02°$

b) Die Gerade g schneidet die x_2-Achse, denn es gilt

$\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\cos(\alpha) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{3}{1 \cdot \sqrt{14}} \Rightarrow \alpha \approx 36{,}70°$

Die Gerade h schneidet die x_1-Achse, denn es gilt

$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\cos(\alpha) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{5}{\sqrt{45} \cdot 1} \Rightarrow \alpha \approx 41{,}81°$

Seite 212

5

a)

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \\ \text{II} & \\ \text{III} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right) \\ \text{II} & \\ \text{III}_a = \text{III} - \text{I} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{array}\right) \\ \text{II} & \\ \text{III}_b = \text{III}_a - \text{II} & \end{array}$$

Aus III_b erhält man die Gleichung $-2x_3 = 8$ und somit $x_3 = -4$.

Durch Einsetzen von $x_3 = -4$ in II erhält man $x_2 + 1 \cdot (-4) = -2$ und $x_2 = 2$.

Durch Einsetzen von $x_3 = -4$ und $x_2 = 2$ in I erhält man $x_1 + 1 \cdot (-4) = -2$ und $x_1 = 2$.

$L = \{(2; 2; -4)\}$

b) $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & -2 & -11 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a = \text{II} - 3 \cdot \text{I} \\ \text{III}_a = \text{I} + \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & -16 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b = \text{II}_a + 2 \cdot \text{III}_a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & -6 & -30 \end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $-6x_3 = -30$ und somit $x_3 = 5$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 5$ in II erhält man $4x_2 - 4 \cdot 5 = -16$ und $x_2 = 1$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 5$ und $x_2 = 1$ in I erhält man $x_1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 = 4$ und $x_1 = -2$.

$L = \{(-2; 1; 5)\}$

c) $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}_a = 2 \cdot \text{III} - \text{I} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}_b = 4 \cdot \text{III}_a - 3 \cdot \text{II} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -19 & 0 \end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $-19x_3 = 0$ und somit $x_3 = 0$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 0$ in II erhält man $4x_2 + 1 \cdot 0 = -4$ und $x_2 = -1$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 0$ und $x_2 = -1$ in I erhält man $2x_1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (0) = -1$ und $x_1 = 1$.

$L = \{(1; -1; 0)\}$

Seite 213

10

Zunächst wird das LGS in die Matrixschreibweise überführt und in die Stufenform umgeformt. Anschließend werden die einzelnen Lösungen schrittweise berechnet.

a) $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & -17 \\ 2 & -1 & -1 & -8 \\ 1 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a = \text{II} - \frac{2}{3} \cdot \text{I} \\ \text{III}_a = \text{III} - \frac{1}{3} \cdot \text{I} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & -17 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -3 & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 2 & -\frac{4}{3} \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b = \text{III}_a - 2 \cdot \text{II}_a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & -17 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -3 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $8x_3 = -8$ und somit $x_3 = -1$.

Durch Einsetzen von $x_3 = -1$ in II_a erhält man $-\frac{1}{3}x_2 - 3 \cdot (-1) = \frac{10}{3}$ und $x_2 = -1$.

Durch Einsetzen von $x_3 = -1$ und $x_2 = -1$ in I erhält man $3x_1 - 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -17$ und $x_1 = -5$.

$L = \{(-5; -1; -1)\}$

b) $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 10 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a = \text{II} + \frac{1}{2} \cdot \text{I} \\ \text{III}_a = \text{III} - \frac{1}{2} \cdot \text{I} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 7 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 2 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b = \text{III}_a + 3 \cdot \text{II}_a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 23 \end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $-7x_3 = 23$ und somit $x_3 = -\frac{23}{7}$.

Durch Einsetzen von $x_3 = -\frac{23}{7}$ in II_a erhält man $-\frac{1}{2}x_2 - 2 \cdot \left(-\frac{23}{7}\right) = 7$ und $x_2 = -\frac{6}{7}$.

Durch Einsetzen von $x_3 = -\frac{23}{7}$ und $x_2 = -\frac{6}{7}$ in I erhält man $2x_1 - 3 \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{23}{7}\right) = 10$ und $x_1 = \frac{3}{7}$.

$L = \left\{\left(\frac{3}{7}; -\frac{6}{7}; -\frac{23}{7}\right)\right\}$

c) $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & 4 \\ 5 & -4 & 3 & 22 \\ -4 & 3 & 3 & 10 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a = \text{II} - \frac{5}{2} \cdot \text{I} \\ \text{III}_a = 2 \cdot \text{I} + \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & 12 \\ 0 & -3 & 9 & 18 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b = 6 \cdot \text{II}_a + 7 \cdot \text{III}_a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & 12 \\ 0 & 0 & 36 & 198 \end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $36x_3 = 198$ und somit $x_3 = \frac{11}{2}$.

Durch Einsetzen von $x_3 = \frac{11}{2}$ in II_a erhält man $\frac{7}{2}x_2 - \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{11}{2}\right) = 12$ und $x_2 = \frac{21}{2}$.

Durch Einsetzen von $x_3 = \frac{11}{2}$ und $x_2 = \frac{21}{2}$ in I erhält man $2x_1 - 3 \cdot \left(\frac{21}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{11}{2}\right) = 4$ und $x_1 = \frac{19}{2}$.

$L = \left\{\left(\frac{19}{2}; \frac{21}{2}; \frac{11}{2}\right)\right\}$

G 13

a) Das Diagramm zeigt die Anzahl der Fahrradunfälle in den Jahren 2019 bis 2022.

b) Das Diagramm liefert sehr ungenaue Informationen, da die Achse mit der Anzahl der Fahrradunfälle nicht skaliert ist, und auch die Höhen der Säulen für die einzelnen Jahre nicht angegeben sind.

c) Das Diagramm ist in der Flucht gezeichnet. Dadurch erscheint der Quader, der die Anzahl der Fahrradunfälle durch seine Höhe angibt, vor allem des Jahres 2022 größer. Man erhält so den Eindruck, dass die Zunahme der Unfälle von 2021 nach 2022 besonders stark ausfällt.

Seite 217

6

a), b) Mit dem Gauß-Algorithmus und mit einem MMS erhält man das gleiche Ergebnis.

(1)
$$\begin{array}{lrrrl} \text{I} & x_1 + & x_2 + & x_3 = & 0 \\ \text{II} & x_1 + & x_2 & = & 2 \\ \text{III} & 2x_1 & + 2x_3 = & & 4 \\ \hline \text{I} & x_1 + & x_2 + & x_3 = & 0 \\ \text{II}_a = \text{III} - 2\cdot\text{I} & & -2x_2 & = & 4 \\ \text{III}_a = \text{II} - \text{I} & & & -x_3 = & 2 \end{array}$$

Aus II_a erhält man $x_2 = -2$. Aus III_a erhält man $x_3 = -2$.
Durch Einsetzen von $x_2 = -2$ und $x_3 = -2$ in I erhält man $x_1 - 2 - 2 = 0$ und $x_1 = 4$.
Probe: I $\quad 4 + (-2) + (-2) = 4 - 2 - 2 = 0$ ✓
II $\quad 4 + (-2) = 4 - 2 = 2$ ✓
III $\quad 2\cdot 4 + 2\cdot(-2) = 8 - 4 = 4$ ✓
$L = \{(4; -2; -2)\}$

(2)
$$\begin{array}{lrrrl} \text{I} & 4x_1 + & x_2 + & 7x_3 = & 12 \\ \text{II} & 5x_1 & + 10x_3 = & & 5 \\ \text{III} & -x_1 - & 2x_2 & = & -2 \\ \hline \text{I} & 4x_1 + & x_2 + & 7x_3 = & 12 \\ \text{II}_a = \text{II} - \frac{5}{4}\cdot\text{I} & & -\frac{5}{4}x_2 + & \frac{5}{4}x_3 = & -10 \\ \text{III}_a = 4\cdot\text{III} + \text{I} & & -7x_2 + & 7x_3 = & 4 \\ \hline \text{I} & 4x_1 + & x_2 + & 7x_3 = & 12 \\ \text{II}_a & & -\frac{5}{4}x_2 + & \frac{5}{4}x_3 = & -10 \\ \text{III}_b = \text{III}_a - \frac{28}{5}\cdot\text{II}_a & & & 0\cdot x_3 = & 60 \end{array}$$

Aus III_b erhält man die Gleichung $0\cdot x_3 = 60$. Das LGS hat keine Lösung.
$L = \{\ \}$

(3)
$$\begin{array}{lrrrl} \text{I} & x_1 - & x_2 + & x_3 = & -2 \\ \text{II} & 4x_1 + & 2x_2 + & x_3 = & -5 \\ \text{III} & 6x_1 & + 3x_3 = & & -9 \\ \hline \text{I} & x_1 - & x_2 + & x_3 = & -2 \\ \text{II}_a = \text{II} - 4\cdot\text{I} & & 6x_2 - & 3x_3 = & 3 \\ \text{III}_a = \text{III} - 6\cdot\text{I} & & 6x_2 - & 3x_3 = & 3 \\ \hline \text{I} & x_1 - & x_2 + & x_3 = & -2 \\ \text{II}_a & & 6x_2 - & 3x_3 = & 3 \\ \text{III}_b = \text{III}_a - \text{II}_a & & & 0\cdot x_3 = & 0 \end{array}$$

Aus III_b erhält man die Gleichung $0\cdot x_3 = 0$. Das LGS hat unendlich viele Lösungen.
Wähle $x_3 = t$. Durch Einsetzen in II_a ergibt sich $6x_2 - 3t = 3$ und $x_2 = 0{,}5 + 0{,}5t$.
Durch Einsetzen von $x_3 = t$ und $x_2 = 0{,}5 + 0{,}5t$ in I erhält man $x_1 - (0{,}5 + 0{,}5t) + t = -2$ und $x_1 = -1{,}5 - 0{,}5t$.
$L = \{(-1{,}5 - 0{,}5t; 0{,}5 + 0{,}5t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

7

a)
$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 5 & -1 & 6 \\ 2 & 6 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 12 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II}_a = \text{II} - \text{I} \\ \text{III}_a = 2\cdot\text{III} - \text{I} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & -3 & 21 & 18 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b = 3\cdot\text{II}_a + \text{III}_a \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus III_b erhält man die Gleichung $0\cdot x_3 = 0$. Das LGS hat unendlich viele Lösungen.
Wähle $x_3 = t$. Durch Einsetzen in II_a ergibt sich $x_2 - 7t = -6$ und $x_2 = -6 + 7t$.
Durch Einsetzen von $x_3 = t$ und $x_2 = -6 + 7t$ in I erhält man $2x_1 + 5\cdot(-6 + 7t) - t = 6$ und $x_1 = 18 - 17t$.
$L = \{(18 - 17t; -6 + 7t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

b)
$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 10 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 4{,}5 & 0{,}5 \\ 4 & -4 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}_a = 2\cdot\text{I} + \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 10 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 4{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 16 & 18 & 20 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}_b = \text{III}_a - 4\cdot\text{II} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 10 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 4{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right)$$

Aus III_b erhält man die Gleichung $0\cdot x_3 = 18$. Das LGS hat keine Lösung.
$L = \{\ \}$

c)
$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -6 & 5 \\ 7 & 3 & 3 & 10 \\ 8 & 2 & 6 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II}_a = \text{II} - 7\cdot\text{I} \\ \text{III}_a = \text{III} - 8\cdot\text{I} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & -25 & 45 & -25 \\ 0 & -30 & 54 & -30 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}_b = \text{III}_a - \frac{6}{5}\cdot\text{II}_a \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & -25 & 45 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus III_b erhält man die Gleichung $0\cdot x_3 = 0$. Das LGS hat unendlich viele Lösungen.
Wähle $x_3 = t$. Durch Einsetzen in II_a erhält man $-25x_2 + 45\cdot t = -25$ und $x_2 = 1 + \frac{9}{5}t$.
Durch Einsetzen von $x_3 = t$ und $x_2 = 1 + \frac{9}{5}t$ in I erhält man $x_1 + 4\cdot\left(1 + \frac{9}{5}t\right) - 6t = 5$ und $x_1 = 1 - \frac{6}{5}t$.
$L = \left\{\left(1 - \frac{6}{5}t; 1 + \frac{9}{5}t; t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$

Seite 218

14

a) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 = -2x_2 - 3x_3 & | + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{II} & 2x_2 + 4x_3 = 2x_1 & | - 2x_1 \\ \text{III} & x_1 + x_3 = 3x_2 & | - 3x_2 \\ \hline \text{I}_a & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 & \\ \text{II}_a & -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 & \\ \text{III}_a & x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 & \end{array}$

Umwandeln in Matrixschreibweise:

$\begin{array}{ll} \text{I}_a & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \\ \text{II}_a & \\ \text{III}_a & \end{array}$

$\begin{array}{ll} \text{I}_a & \\ \text{II}_b = \text{II}_a + 2 \cdot \text{I}_a & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{array}\right) \\ \text{III}_b = \text{III}_a - \text{I}_a & \end{array}$

$\begin{array}{ll} \text{I}_a & \\ \text{II}_b & \\ \text{III}_c = \frac{6}{5} \cdot \text{III}_b + \text{II}_b & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{38}{5} & 0 \end{array}\right) \end{array}$

Aus III_c erhält man die Gleichung $\frac{38}{5} \cdot x_3 = 0$ und somit $x_3 = 0$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 0$ in II_b erhält man $6x_2 + 10 \cdot 0 = 0$ und $x_2 = 0$.

Durch Einsetzen von $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ in I_a erhält man $x_1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$ und $x_1 = 0$.

Probe: I $0 = -2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \Leftrightarrow 0 = 0 + 0 = 0$ ✓
II $2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 2 \cdot 0 \Leftrightarrow 0 + 0 = 0$ ✓
III $0 + 0 = 3 \cdot 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ✓

$\mathbb{L} = \{(0; 0; 0)\}$

b) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 = 2x_2 - x_3 & | - 2x_2 + x_3 \\ \text{II} & 4x_1 + 7x_2 = 2x_3 & | - 2x_3 \\ \text{III} & 2x_1 + 2x_3 = 4x_2 & | - 4x_2 \\ \hline \text{I}_a & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & \\ \text{II}_a & 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 & \\ \text{III}_a & 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 & \end{array}$

Umwandeln in Matrixschreibweise:

$\begin{array}{ll} \text{I}_a & \\ \text{II}_a & \\ \text{III}_a & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array}$

$\begin{array}{ll} \text{I}_a & \\ \text{II}_b = \text{II}_a - 4 \cdot \text{I}_a & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \text{III}_b = \text{III}_a - 2 \cdot \text{I}_a & \end{array}$

Aus III_b erhält man die Gleichung $0 \cdot x_3 = 0$. Das LGS hat unendlich viele Lösungen.

Wähle $x_3 = t$. Durch Einsetzen von $x_3 = t$ in II_b erhält man $15x_2 - 6 \cdot t = 0$ und $x_2 = \frac{2}{5}t$.

Durch Einsetzen von $x_3 = t$ und $x_2 = \frac{2}{5}t$ in I erhält man $x_1 = 2 \cdot \frac{2}{5}t - t = -\frac{1}{5}t$.

Probe: I $-\frac{1}{5}t = 2 \cdot \frac{2}{5}t - t \Leftrightarrow -\frac{1}{5}t = \frac{4}{5}t - t = -\frac{1}{5}t$ ✓
II $4 \cdot \left(-\frac{1}{5}t\right) + 7 \cdot \frac{2}{5}t = 2 \cdot t \Leftrightarrow -\frac{4}{5}t + \frac{14}{5}t = 2t$ ✓
III $2 \cdot \left(-\frac{1}{5}t\right) + 2 \cdot t = 4 \cdot \frac{2}{5}t \Leftrightarrow -\frac{2}{5}t + 2t = \frac{8}{5}t$ ✓

$\mathbb{L} = \left\{\left(-\frac{1}{5}t; \frac{2}{5}t; t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

c) $\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 + 7x_3 = 2x_2 + 14 & | - 2x_2 \\ \text{II} & 3x_1 + x_2 = 5x_3 + 2 & | - 5x_3 \\ \text{III} & 4x_1 + 2x_3 = x_2 + 16 & | - x_2 \\ \hline \text{I}_a & x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 14 & \\ \text{II}_a & 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 2 & \\ \text{III}_a & 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 16 & \end{array}$

Umwandeln in Matrixschreibweise:

$\begin{array}{ll} \text{I}_a & \\ \text{II}_a & \\ \text{III}_a & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 14 \\ 3 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 16 \end{array}\right) \end{array}$

$\begin{array}{ll} \text{I}_a & \\ \text{II}_b = \text{II}_a - 3 \cdot \text{I}_a & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 14 \\ 0 & 7 & -26 & -40 \\ 0 & 7 & -26 & -40 \end{array}\right) \\ \text{III}_b = \text{III}_a - 4 \cdot \text{I}_a & \end{array}$

$\begin{array}{ll} \text{I}_a & \\ \text{II}_b & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 14 \\ 0 & 7 & -26 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \text{III}_c = \text{III}_b - \text{II}_b & \end{array}$

Aus III_c erhält man die Gleichung $0 = 0$. Das LGS hat unendlich viele Lösungen.

Wähle $x_3 = t$. Durch Einsetzen von $x_3 = t$ in II_b erhält man $7x_2 - 26 \cdot t = -40$ und $x_2 = -\frac{40}{7} + \frac{26}{7}t$.

Durch Einsetzen von $x_3 = t$ und $x_2 = -\frac{40}{7} + \frac{26}{7}t$ in I_a erhält man $x_1 - 2 \cdot \left(-\frac{40}{7} + \frac{26}{7}t\right) + 7t = 14$ und $x_1 = \frac{18}{7} + \frac{3}{7}t$.

Probe:

I $\frac{18}{7} + \frac{3}{7}t + 7 \cdot t = 2 \cdot \left(-\frac{40}{7} + \frac{26}{7}t\right) + 14$
$\Leftrightarrow \frac{18}{7} + \frac{52}{7}t = -\frac{80}{7} + \frac{52}{7}t + 14 \Leftrightarrow \frac{18}{7} + \frac{52}{7}t = \frac{18}{7} + \frac{52}{7}t$ ✓

II $3 \cdot \left(\frac{18}{7} + \frac{3}{7}t\right) + \left(-\frac{40}{7} + \frac{26}{7}t\right) = 5 \cdot t + 2$
$\Leftrightarrow \frac{54}{7} + \frac{9}{7}t - \frac{40}{7} + \frac{26}{7}t = \frac{14}{7} + \frac{35}{7}t = 5t + 2$ ✓

III $4 \cdot \left(\frac{18}{7} + \frac{3}{7}t\right) + 2 \cdot t = -\frac{40}{7} + \frac{26}{7}t + 16$
$\Leftrightarrow \frac{72}{7} + \frac{12}{7}t + \frac{14}{7}t = \frac{72}{7} + \frac{26}{7}t$ ✓

$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{18}{7} + \frac{3}{7}t; -\frac{40}{7} + \frac{26}{7}t; t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

15

individuelle Lösung, zum Beispiel:

a) Mit $x_3 = t$ erhält man $x_1 = x_3 + 1$ und $x_2 = x_3 - 1$, also

$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 = x_3 + 1 & \\ \text{II} & x_2 = x_3 - 1 & \\ \text{III} = \text{I} + \text{II} & x_1 + x_2 = 2x_3 & \end{array}$

b) Mit $x_3 = t$ erhält man $x_1 = 0$ und $x_2 = -x_3$, also

$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 + x_2 = -x_3 & \\ \text{II} & x_2 = -x_3 & \\ \text{III} = \text{I} + \text{II} & x_1 + 2x_2 = -2x_3 & \end{array}$

c) Mit $x_3 = t$ erhält man $x_1 = 3$ und $x_2 = x_3 - 1$, also

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{I} & x_1 & + & x_2 & = & x_3 + 2 \\ \text{II} & & & x_2 & = & x_3 - 1 \\ \text{III} = \text{I} + \text{II} & x_1 & + & 2x_2 & = & 2x_3 + 1 \end{array}$$

G **18**

Diagramm 1
Die Entwicklung im Jahr 2025 nimmt zunächst bis April zu. Danach fallen die Werte bis Oktober ab.

Diagramm 2
Im Zeitraum von April bis Oktober fallen die Werte gleichmäßig. Dadurch, dass die Werte von Januar bis März, weggelassen wurden, wird der Eindruck erweckt, dass die Werte nur fallen.

Diagramm 3
Hier fallen die Werte wie im Diagramm 2, nur dass man den Eindruck erhält, dass sie schneller fallen. Dies wird dadurch erreicht, dass die senkrechte Achse nicht Zahlenwerte von 0 bis 80 angibt, sondern nur zwischen 64 und 80.

Seite 221

5

Durch Einsetzen des Ortsvektors der jeweiligen Punkte erhält man:

$\overrightarrow{OQ}$ in E: $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}$

$$\text{Umwandeln in ein LGS:} \quad \begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 1 & + & r & - & s & = & 2 \\ \text{II} & 2 & + & 3r & - & 2s & = & 6 \\ \text{III} & 1 & + & 2r & & & = & 5 \end{array}$$

Aus III ergibt sich $r = 2$. Durch Einsetzen von $r = 2$ in II ergibt sich $2 + 3\cdot 2 - 2s = 6$ und somit $s = 1$.
Kontrolle durch Einsetzen von $r = 2$ und $s = 1$ in I:
$1 + 2 - 1 = 2$ ✓
Der Punkt Q liegt somit in der Ebene E.

$\overrightarrow{OR}$ in E: $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-5\\3\end{pmatrix}$

$$\text{Umwandeln in ein LGS:} \quad \begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 1 & + & r & - & s & = & 3 \\ \text{II} & 2 & + & 3r & - & 2s & = & -5 \\ \text{III} & 1 & + & 2r & & & = & 3 \end{array}$$

Aus III ergibt sich $r = 1$. Durch Einsetzen von $r = 1$ in II ergibt sich $2 + 3\cdot 1 - 2s = -5$ und $s = 5$.
Kontrolle durch Einsetzen von $r = 1$ und somit $s = 5$ in I:
$1 + 1 - 5 = -3 \neq 3$
Der Punkt R liegt somit nicht in der Ebene E.

6

individuelle Lösung, zum Beispiel:

$\text{E: } \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{BC} \Rightarrow \text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\text{E: } \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r\cdot\overrightarrow{AC} + s\cdot\overrightarrow{CB} \Rightarrow \text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Seite 222

12

a) $\text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1-5\\0-(-5)\\1-3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-4\\5\\-2\end{pmatrix}$

b) $\text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2-2\\0-7\\1-11\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\-7\\-10\end{pmatrix}$

13

a) Der Parameter in einer der Geradengleichungen muss getauscht werden. Aus dem Ansatz $g_1 = g_2$ ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{I} & 3 & + & 2t & = & 7 + s \\ \text{II} & 0 & + & 5t & = & 10 \\ \text{III} & 7 & + & t & = & 9 + s \end{array}$$

Aus II ergibt sich $t = 2$. Durch Einsetzen von $t = 2$ in III ergibt sich $7 + 2 = 9 + s$ und somit $s = 0$.
Kontrolle durch Einsetzen von $t = 2$ und $s = 0$ in I:
$3 + 2\cdot 2 = 7 + 0$ ✓
Die Geraden schneiden sich im Punkt $(7|10|9)$.

$\text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\10\\9\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

b) Der Parameter in einer der Geradengleichungen muss getauscht werden. Aus dem Ansatz $g_1 = g_2$ ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{I} & 1 & + & 3t & = & 2 + 3s \\ \text{II} & 2 & + & 4t & = & 3 + 4s \\ \text{III} & 5 & & & = & 1 + 5s \end{array}$$

Aus III ergibt sich $s = \frac{4}{5}$. Durch Einsetzen von $s = \frac{4}{5}$ in II ergibt sich $2 + 4t = 3 + 4\cdot\frac{4}{5}$ und somit $t = \frac{21}{20}$.
Kontrolle durch Einsetzen von $s = \frac{4}{5}$ und $t = \frac{21}{20}$ in I:
$1 + 3\cdot\frac{21}{20} = 2 + 3\cdot\frac{4}{5}$ und somit $\frac{83}{20} \neq \frac{22}{5}$
Die Geraden schneiden sich nicht. Sie liegen also nicht in einer Ebene und somit kann keine Ebenengleichung aufgestellt werden, die beide Geraden enthält.

G **16**

a)

Gewicht (in kg)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
absolute Häufigkeit	0	1	2	3	5	5	4	3	0	1	0	1
relative Häufigkeit	0 %	$\frac{1}{25}$ = 4 %	$\frac{2}{25}$ = 8 %	$\frac{3}{25}$ = 12 %	$\frac{5}{25}$ = 20 %	$\frac{5}{25}$ = 20 %	$\frac{4}{25}$ = 16 %	$\frac{3}{25}$ = 12 %	0 %	$\frac{1}{25}$ = 4 %	0 %	$\frac{1}{25}$ = 4 %

b) 16 % + 12 % + 4 % + 4 % = 36 %
Es haben mehr als 35 % der Koffer das Höchstgewicht überschritten.

c) $(4 \cdot 1\,\text{kg} + 3 \cdot 2\,\text{kg} + 1 \cdot 4\,\text{kg} + 1 \cdot 6\,\text{kg}) \cdot 12\,€ = 240\,€$
Die zusätzlichen Einnahmen der Fluggesellschaft betragen 240 €.

Seite 225

6

a) (1) $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einsetzen der Punkte A, B und C in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$:

$$\begin{array}{rcl} 0 + 2b - c = d & & 2b - c - d = 0 \\ 6a - 5b + 0 = d & \Rightarrow & 6a - 5b \quad - d = 0 \\ a + 0 + c = d & & a \quad + c - d = 0 \end{array}$$

Umwandeln in Matrixschreibweise:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \\ \text{II} & \\ \text{III} & \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \text{I}_a = \text{III} & \\ \text{II} & \\ \text{III}_a = \text{I} & \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \text{I}_a & \\ \text{II}_b = \text{II} - 6 \cdot \text{I}_a & \\ \text{III}_a & \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \text{I}_a & \\ \text{II}_b & \\ \text{III}_b = 5 \cdot \text{III}_a + 2 \cdot \text{II}_b & \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Aus III_b ergibt sich $-17c + 5d = 0$ und somit $c = \frac{5}{17}d$.

Durch Einsetzen von $c = \frac{5}{17}d$ in II_b ergibt sich

$-5b - 6 \cdot \frac{5}{17}d + 5d = 0$ und $b = \frac{11}{17}d$.

Durch Einsetzen von $c = \frac{5}{17}d$ in I_a ergibt sich

$a + \frac{5}{17}d - d = 0$ und $a = \frac{12}{17}d$.

Mit $d = 17$ erhält man $a = 12$, $b = 11$ und $c = 5$.

$E: 12x_1 + 11x_2 + 5x_3 = 17$

(2) $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Einsetzen der Punkte A, B und C in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$:

$$\begin{array}{rcl} 7 + 2b - c = d & & 7 + 2b - c - d = 0 \\ 4a + b + 3c = d & \Rightarrow & 4a + b + 3c - d = 0 \\ a + 3b + 2c = d & & a + 3b + 2c - d = 0 \end{array}$$

Umwandeln in Matrixschreibweise:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \\ \text{II} & \\ \text{III} & \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \\ \text{II}_a = \text{II} - 4 \cdot \text{III} & \\ \text{III}_a = 7 \cdot \text{III} - \text{I} & \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 19 & 15 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \\ \text{II}_a & \\ \text{III}_b = \text{III}_a + 3 \cdot \text{II}_a & \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Aus III_b ergibt sich $-14b + 3d = 0$ und somit $b = \frac{3}{14}d$.

Durch Einsetzen von $b = \frac{3}{14}d$ in II_a ergibt sich

$-11 \cdot \frac{3}{14}d - 5 \cdot c + 3d = 0$ und $c = \frac{9}{70}d$.

Durch Einsetzen von $b = \frac{3}{14}d$ und $c = \frac{9}{70}d$ in I ergibt sich

$7a + 2 \cdot \frac{3}{14}d - \frac{9}{70}d - d = 0$ und $a = \frac{1}{10}d$.

Mit $d = 70$ erhält man $a = 7$, $b = 15$ und $c = 9$.

$E: 7x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 70$

b) (1) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$

7

a) (1) Durch Einsetzen von P in E ergibt sich
$1 - 2 + 2 \cdot (-1) = 1 - 2 - 2 = -3 \neq 3$.
Der Punkt P liegt nicht in der Ebene E.
(2) Durch Einsetzen von P in E ergibt sich
$7 \cdot 0 - (-5) = 0 + 5 = 5$.
Der Punkt P liegt in der Ebene E.

b) (1) Wählt man zum Beispiel $x_1 = 1$ und $x_3 = 1$, ergibt sich $1 - x_2 + 2 = 3$ für $x_2 = 0$. Damit liegt $Q(1|0|1)$ in der Ebene E.

$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

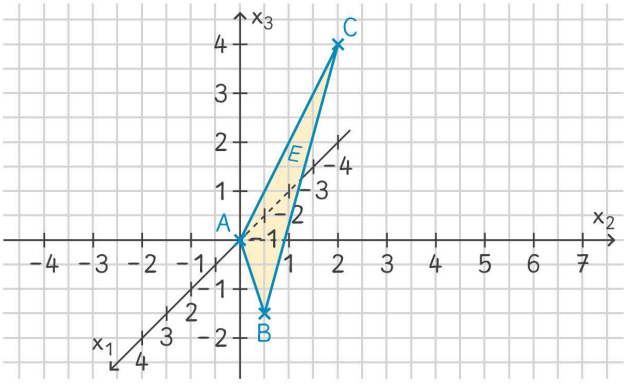
(2) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Seite 226

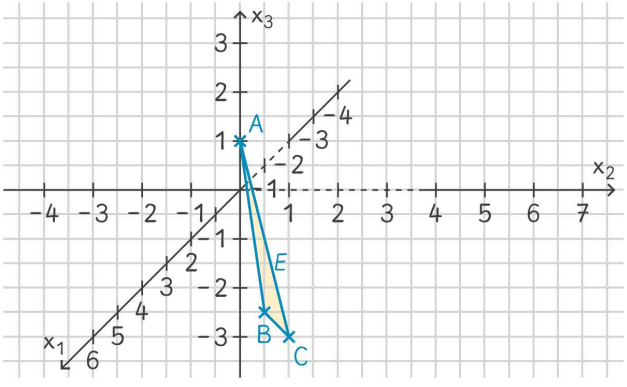
13

individuelle Lösung, zum Beispiel:

a) A(0|0|0), B(1|1|−1) und C(−4|0|2) sind Punkte der Ebene E.



b) A(0|0|1), B(3|2|−1) und C(4|3|−1) sind Punkte der Ebene E.



G **16**

a) $(2\cdot1 + 5\cdot2 + 10\cdot3 + 7\cdot4 + 3\cdot5 + 1\cdot6) : 28 = 3{,}25$

1; 1; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; [3; 3]; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 6

Das arithmetische Mittel beträgt 3,25 und der Median 3.

b) $((2 + 5 + 10)\cdot3 + 7\cdot4 + 3\cdot5 + 1\cdot6) : 28 \approx 3{,}57$

3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; [3; 3]; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 6

Die Aussage von Duran ist falsch, denn der Median bleibt zwar bei 3, aber das arithmetische Mittel würde sich um weniger als 0,5 verschlechtern.

Seite 229

5

a) Schnittwinkel von g und E_1:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{30}} \Rightarrow \alpha \approx 7{,}42°$$

Schnittwinkel von g und E_2:

$$\sin(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = 30°$$

b) $$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \approx 67{,}21°$$

6

a) Durch Einsetzen von $\vec{x} = \begin{pmatrix}1-t\\1+2t\\4\end{pmatrix}$ in E ergibt sich

$4\cdot(1 - t) - (1 + 2t) + 2\cdot4 = 8$ und somit $t = 0{,}5$.

$$\vec{x_s} = \begin{pmatrix}1-0{,}5\\1+2\cdot0{,}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\2\\4\end{pmatrix}$$

Probe: $4\cdot0{,}5 - 2 + 2\cdot4 = 2 - 2 + 8 = 8$ ✓

Der Schnittpunkt von g und E ist S(0,5|2|4).

b) Durch Einsetzen von $\vec{x} = \begin{pmatrix}1-t\\1+2t\\4\end{pmatrix}$ in E ergibt sich

$(1 + 2t) - 4\cdot4 = 14$ und somit $t = 14{,}5$.

$$\vec{x_s} = \begin{pmatrix}1-14{,}5\\1+2\cdot14{,}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13{,}5\\30\\4\end{pmatrix}$$

Probe: $30 - 4\cdot4 = 30 - 16 = 14$ ✓

Der Schnittpunkt von g und E ist S(−13,5|30|4).

Seite 230

10

a) Bestimmung einer Ebene E_{ABC} in Koordinatenform durch Einsetzen der Punkte A, B und C in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$:

$$\begin{array}{rcl} 2a = d & \text{I} & 2a - d = 0 \\ 2a + 6b = d & \Rightarrow \text{II} & 2a + 6b - d = 0 \\ 2b = d & \text{III} & 2b - d = 0 \end{array}$$

Aus I ergibt sich $a = \frac{1}{2}d$ und aus III ergibt sich $b = \frac{1}{2}d$.

Durch Einsetzen von $a = \frac{1}{2}d$ und $b = \frac{1}{2}d$ in II ergibt sich $2\cdot\frac{1}{2}d + 6\cdot\frac{1}{2}d - d = 0$ und $d = 0$, also $a = 0$ und $b = 0$.

E: $x_3 = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Bestimmung des Vektors $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}1-2\\2-0\\4-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{4}{\sqrt{21}\cdot1} \Rightarrow \alpha \approx 60{,}79°.$$

b) Bestimmung einer Ebene E_{ABD} in Koordinatenform durch Einsetzen der Punkte A, B und D in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$:

$$\begin{array}{rcl} 2a & = d & \text{I} \\ 2a + 6b & = d & \Rightarrow \text{II} \\ a + 2b + 4c & = d & \text{III} \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2a & - d = 0 & \\ 2a + 6b & - d = 0 & \\ a + 2b + 4c & - d = 0 & \end{array}$$

Aus I ergibt sich $a = \frac{1}{2}d$.

Durch Einsetzen von $a = \frac{1}{2}d$ in II ergibt sich

$2 \cdot \frac{1}{2}d + 6 \cdot b - d = 0$ und $b = 0$.

Durch Einsetzen von $a = \frac{1}{2}d$ und $b = 0$ in III ergibt sich

$\frac{1}{2}d + 2 \cdot 0 + 4 \cdot c - d = 0$ und $c = \frac{1}{8}d$.

Mit $d = 8$ erhält man $a = 4$, $b = 0$ und $c = 1$.

E: $4x_1 + x_3 = 8$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmung des Vektors $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-6 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{8}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{20}} \Rightarrow \alpha \approx 25{,}71°$$

c) $\overrightarrow{n_{ABC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_{ABD}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{17}} \Rightarrow \alpha \approx 75{,}96°$$

d) Bestimmung einer Ebene E_{BCD} in Koordinatenform durch Einsetzen der Punkte B, C und D in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$:

$$\begin{array}{rcl} 2a + 6b & = d & \text{I} \\ 2b & = d & \Rightarrow \text{II} \\ a + 2b + 4c & = d & \text{III} \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2a + 6b & - d = 0 & \\ 2b & - d = 0 & \\ a + 2b + 4c & - d = 0 & \end{array}$$

Aus II ergibt sich $b = \frac{1}{2}d$.

Durch Einsetzen von $b = \frac{1}{2}d$ in I ergibt sich

$2 \cdot a + 6 \cdot \frac{1}{2}d - d = 0$ und $a = -d$.

Durch Einsetzen von $a = -d$ und $b = \frac{1}{2}d$ in III ergibt sich

$-d + 2 \cdot \frac{1}{2}d + 4 \cdot c - d = 0$ und $c = \frac{1}{4}d$.

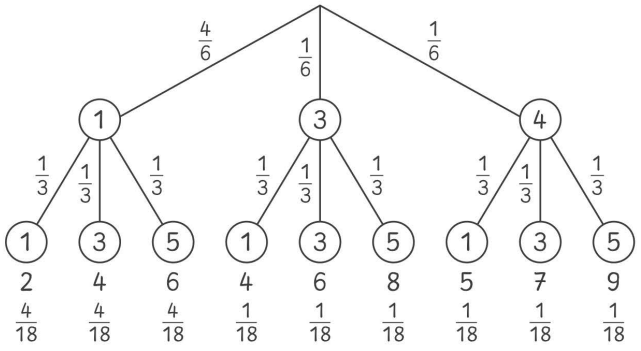
Mit $d = 4$ erhält man $a = -4$, $b = 2$ und $c = 1$.

E: $-4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (siehe Teilaufgabe b)) folgt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{15}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{17}} \Rightarrow \alpha \approx 37{,}45°$$

G **13**



Summe	2	4	5	6	7	8	9
Wahrscheinlichkeit	$\frac{4}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

Seite 234

4

1. Schritt: Verstehen der Aufgabe

Die Eckpunkte des Schattens des Fernsehturms sind gesucht. Gegeben sind der Bodenpunkt und die Spitze des Fernsehturms und die Richtung der Sonnenstrahlen.

2. Schritt: Zerlegen in Teilprobleme

Man betrachtet den Turm vereinfacht als Strecke, nicht als Körper. Der Schatten des Turms beginnt im Bodenpunkt, da dieser bereits in der x_1x_2-Ebene liegt.

Man bestimmt nun die Geradengleichung des Sonnenstrahls von der Spitze des Turms mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$.

Der Schnittpunkt dieser Gerade mit der x_1x_2-Ebene ist der Endpunkt des Schattens.

3. Schritt: Durchführung des Rechenwegs

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 230 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Der Endpunkt ist $(x_1|x_2|0)$.

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 230 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Zeile folgt $230 - 4t = 0$ und $t = 57{,}5$.

Durch Einsetzen von $t = 57{,}5$ in $\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 230 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\begin{pmatrix} 184{,}5 \\ 119 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Schritt: Rückschau und Antwort

Die Schattenpunkte des Fernsehturms sind $P(12|4|0)$ und $(184{,}5|119|0)$. Da für beide Punkte $x_3 = 0$ gilt, liegen sie in der x_1x_2-Ebene, womit die Lösung sinnvoll ist.

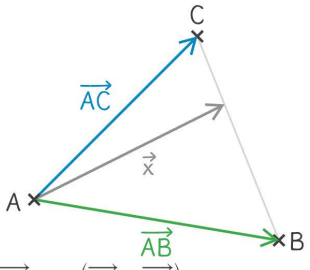
5

a) 1. gesucht: Bildpunkte des an der x_1x_2-Ebene gespiegelten Dreiecks ABC
gegeben: die Eckpunkte des Dreiecks ABC und die x_1x_2-Ebene als Spiegelebene
2. Bei der Spiegelung an der x_1x_2-Ebene verändert sich nur die x_3-Koordinate. Der Punkt A und sein Bildpunkt A' müssen den gleichen Abstand zur x_1x_2-Ebene haben. Dies erreicht man, indem man das Vorzeichen der x_3-Koordinate ändert. Gleiches gilt für B und B', C und C'.
3. $A'(2|4|-5)$, $B'(4|-1|0)$, $C'(-1|0|2)$
4. Die Punkte A', B' und C' sind die gesuchten Punkte.

b) $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$

c) 1. gesucht: Bedingungen für die Parameter t und s, sodass ausschließlich das Dreieck ABC beschrieben wird
gegeben: Eckpunkte des Dreiecks ABC und eine Parameterform der Ebene $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$
2. Wenn man die Punktemenge der Dreiecksfläche ausgehend vom Punkt A aufspannt, wird sie durch die Strecke $\overline{BC}$ begrenzt. Wenn man nun die Punkte der Strecke $\overline{BC}$ als Linearkombination darstellt, erhält man eine neue mathematische Beziehung, mit der man die Dreiecksfläche beschreiben kann.



3. $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + s \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$
$= \overrightarrow{OA} + (1 - s) \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

Ferner gilt $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$.
Durch Vergleich dieser beiden Darstellungen ergibt sich $t = 1 - s$, also $t + s = 1$.
4. Für die Punkte im Dreieck gilt dann die Beziehung $t + s \leq 1$ mit $t \geq 0$ und $s \geq 0$.

Seite 235

10

1. gesucht: Schattenpunkt des Endpunkts des Zeigers auf der Ziffernfeldebene E, sodass durch die Sonnenstrahlen die Anzeige von 12 Uhr erzeugt wird
gegeben: Eckpunkte des Zeigers durch die Geradengleichung und den Parameterbereich, die Ziffernfeldebene E, die Richtung der Sonnenstrahlen um 12 Uhr (die Sonnenstrahlen werden als parallel einfallende Strahlen modelliert)
2. (1) Mithilfe des Parameterbereichs können für $t = -1$ und $t = 2$ die Eckpunkte des Zeigers bestimmt werden.
(2) Man muss prüfen, welcher der beiden Eckpunkte des Zeigers in E liegt und welcher nicht.
(3) Man stellt eine Geradengleichung mit dem Eckpunkt des Zeigers, der nicht in E liegt, als Stützvektor und dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor auf.
(4) Man bestimmt den Schattenpunkt des Eckpunkts des Zeigers auf E, indem man den Schnittpunkt der Geradengleichung aus (3) mit E bestimmt. Hier muss 12 Uhr markiert werden.
3. (1) und (2): $t = -1$ einsetzen in $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
Da dieser Vektor mit dem Stützvektor der Ebene E übereinstimmt, liegt der zugehörige Punkt in der Ebene E.
$t = 2$ einsetzen in $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OZ}$
Setzt man den Punkt Z in die Ebenengleichung von E ein und löst das entstandene LGS, so erkennt man, dass der Punkt Z nicht in der Ebene E liegt.
(3) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
(4) Mit dem Ansatz $h = E$ erhält man $r = \frac{18}{7}$, $s = \frac{15}{7}$ und $m = -\frac{6}{7}$.
Der Schattenpunkt ergibt sich durch Einsetzen von $m = -\frac{6}{7}$ in h: $P\left(3\frac{1}{7}\middle|2\frac{2}{7}\middle|3\frac{6}{7}\right)$
4. In der Ebene muss die Markierung für die Zeit 12 Uhr im Punkt $P\left(3\frac{1}{7}\middle|2\frac{2}{7}\middle|3\frac{6}{7}\right)$ angebracht werden.

G **12**

fairer Würfel: $P(\text{dreimal die Sechs}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \approx 0{,}005$
gezinkter Würfel: $P(\text{dreimal die Sechs}) = 0{,}3^3 = 0{,}027$

Seite 236

Klausurtraining

1

a) und **b)** Die Kontrolle mit einem MMS liefert die gleichen Ergebnisse.

(1) $\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II}_a = 2 \cdot \text{II} - \text{I} \\ \text{III}_a = 2 \cdot \text{III} + \text{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b = 5 \cdot \text{III}_a - \text{II}_a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $-14x_3 = 14$ und somit $x_3 = -1$.
Durch Einsetzen von $x_3 = -1$ in II_a erhält man $5x_2 + 9 \cdot (-1) = 1$ und $x_2 = 2$.

Durch Einsetzen von $x_3 = -1$ und $x_2 = 2$ in I erhält man $2x_1 - 3 \cdot 2 + (-1) = -1$ und $x_1 = 3$.

$L = \{(3; 2; -1)\}$

(2) $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a = 2 \cdot \text{II} - \text{I} \\ \text{III}_a = 2 \cdot \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -2 \\ 0 & -7 & -7 & -2 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b = \text{III}_a + \text{II}_a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $0 \cdot x_3 = -4$. Das LGS hat keine Lösung.

$L = \{\ \}$

(3) $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a = 2 \cdot \text{II} - \text{I} \\ \text{III}_a = 2 \cdot \text{III} + \text{I} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b = \text{III}_a - \text{II}_a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $-6x_3 = 0$ und somit $x_3 = 0$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 0$ in II_a erhält man $5x_2 + 9 \cdot 0 = 0$ und $x_2 = 0$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 0$ und $x_2 = 0$ in I erhält man $2x_1 - 3 \cdot 0 + 0 = 0$ und $x_1 = 0$.

Die Lösungsmenge ist $L = \{(0; 0; 0)\}$.

(4) $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a = \text{II} - \text{I} \\ \text{III}_a = \text{III} - 4 \cdot \text{I} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -6 \end{array}\right)$

Aus III_a erhält man die Gleichung $11x_3 = -6$ und somit $x_3 = -\frac{6}{11}$.

Durch Einsetzen von $x_3 = -\frac{6}{11}$ in II_a erhält man $x_2 + 4 \cdot \left(-\frac{6}{11}\right) = 1$ und $x_2 = \frac{35}{11}$.

Durch Einsetzen von $x_3 = -\frac{6}{11}$ und $x_2 = \frac{35}{11}$ in I erhält man $x_1 + \frac{35}{11} - 2 \cdot \left(-\frac{6}{11}\right) = 2$ und $x_1 = -\frac{25}{11}$.

$L = \left\{\left(-\frac{25}{11}; \frac{35}{11}; -\frac{6}{11}\right)\right\}$

(5) $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 2 & 3 \\ -19 & -1 & -3 & 2 \\ 7 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a = 4 \cdot \text{II} + 19 \cdot \text{I} \\ \text{III}_a = 4 \cdot \text{III} - 7 \cdot \text{I} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 91 & 26 & 65 \\ 0 & -19 & -10 & -17 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b = 91 \cdot \text{III}_a + 19 \cdot \text{II}_a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 91 & 26 & 65 \\ 0 & 0 & -416 & -312 \end{array}\right)$

Aus III_a erhält man die Gleichung $-416x_3 = -312$ und somit $x_3 = \frac{3}{4}$.

Durch Einsetzen von $x_3 = \frac{3}{4}$ in II_a erhält man $91x_2 + 26 \cdot \frac{3}{4} = 65$ und $x_2 = \frac{1}{2}$.

Durch Einsetzen von $x_3 = \frac{3}{4}$ und $x_2 = \frac{1}{2}$ in I erhält man $4x_1 + 5 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4} = 3$ und $x_1 = -\frac{1}{4}$.

$L = \left\{\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)\right\}$

(6) $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a = 4 \cdot \text{II} - \text{I} \\ \text{III}_a = 4 \cdot \text{III} - \text{I} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 15 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b = 5 \cdot \text{III}_a - \text{II}_a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $0 \cdot x_3 = 12$. Das LGS hat keine Lösung.

$L = \{\ \}$

2

a) $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & -9 & 1 \\ 1{,}5 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a = 2 \cdot \text{II} - \text{I} \\ \text{III}_a = 4 \cdot \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & -7 & -24 & 0 \\ 0 & -11 & -38 & -6 \end{array}\right)$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b = 7 \cdot \text{III}_a - 11 \cdot \text{II}_a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & -7 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -42 \end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $-2x_3 = -42$ und somit $x_3 = 21$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 21$ in II_a erhält man $-7x_2 - 24 \cdot 21 = 0$ und $x_2 = -72$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 21$ und $x_2 = -72$ in I erhält man $2x_1 + (-72) + 6 \cdot 21 = 2$ und $x_1 = -26$.

$L = \{(-26; -72; 21)\}$

b) $\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}4&1&-2&-7\\-6&4&9&-5\\5&-2&-8&-3{,}5\end{array}\right)$

$\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}_a = 2\cdot\text{II} + 3\cdot\text{I}\\\text{III}_a = 4\cdot\text{III} - 5\cdot\text{I}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}4&1&-2&-7\\0&11&12&-31\\0&-13&-22&21\end{array}\right)$

$\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}_a\\\text{III}_b = 11\cdot\text{III}_a + 13\cdot\text{II}_a\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}4&1&-2&-7\\0&11&12&-31\\0&0&-86&-172\end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $-86x_3 = -172$ und somit $x_3 = 2$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 2$ in II_a erhält man $11x_2 + 12\cdot 2 = -31$ und $x_2 = -5$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 2$ und $x_2 = -5$ in I erhält man $4x_1 + (-5) - 2\cdot 2 = -7$ und $x_1 = \frac{1}{2}$.

$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{2}; -5; 2\right)\right\}$

c) $\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-1&1\\-4&6&1&4\\5&1&2&5\end{array}\right)$

$\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}_a = 3\cdot\text{II} + 4\cdot\text{I}\\\text{III}_a = 3\cdot\text{III} - 5\cdot\text{I}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-1&1\\0&26&-1&16\\0&-7&11&10\end{array}\right)$

$\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}_a\\\text{III}_b = 26\cdot\text{III}_a + 7\cdot\text{II}_a\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-1&1\\0&26&-1&16\\0&0&279&372\end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $279x_3 = 372$ und somit $x_3 = \frac{4}{3}$.

Durch Einsetzen von $x_3 = \frac{4}{3}$ in II_a erhält man $26x_2 - \frac{4}{3} = 16$ und $x_2 = \frac{2}{3}$.

Durch Einsetzen von $x_3 = \frac{4}{3}$ und $x_2 = \frac{2}{3}$ in I erhält man $3x_1 + 2\cdot\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = 1$ und $x_1 = \frac{1}{3}$.

$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)\right\}$

3

a) $\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}-6&-3&6&9\\4&2&-5&-6\\6&1&-2&-3\end{array}\right)$

$\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}_a = 3\cdot\text{II} + 2\cdot\text{I}\\\text{III}_a = \text{III} + \text{I}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}-6&-3&6&9\\0&0&-3&0\\0&-2&4&6\end{array}\right)$

Aus II_a erhält man die Gleichung $-3x_3 = 0$ und somit $x_3 = 0$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 0$ in III_a erhält man $-2x_2 + 4\cdot 0 = 6$ und $x_2 = -3$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 0$ und $x_2 = -3$ in I erhält man $-6x_1 - 3\cdot(-3) + 6\cdot 0 = 9$ und $x_1 = 0$.

$\mathbb{L} = \{(0; -3; 0)\}$

b) $\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&1&4\\1&1&0&5\end{array}\right)$

$\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}_a = \text{III} - \text{I}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&1&4\\0&1&-1&3\end{array}\right)$

$\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}_b = \text{III}_a - \text{II}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&1&4\\0&0&-2&-1\end{array}\right)$

Aus III_b erhält man die Gleichung $-2x_3 = -1$ und somit $x_3 = 0{,}5$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 0{,}5$ in II erhält man $x_2 + 0{,}5 = 4$ und $x_2 = 3{,}5$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 0{,}5$ und $x_2 = 3{,}5$ in I erhält man $x_1 + 0{,}5 = 2$ und $x_1 = 1{,}5$.

$\mathbb{L} = \{(1{,}5; 3{,}5; 0{,}5)\}$

c)
$\begin{array}{lrcl|l}\text{I}_a & 2x_1 - 4x_2 & = & 3 - 5x_3 & \mid + 5x_3\\ \text{II}_a & 3x_1 + 3x_2 - 13 & = & -7x_3 & \mid + 7x_3 + 13\\ \text{III}_a & 3x_3 - 1 & = & 4x_1 - 2x_2 & \mid - 4x_1 + 2x_2 + 1\end{array}$

$\begin{array}{lrcl}\text{I}_b & 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 & = & 3\\ \text{II}_b & 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 & = & 13\\ \text{III}_b & -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1\end{array}$

Umwandeln in Matrixschreibweise:

$\begin{matrix}\text{I}_b\\\text{II}_b\\\text{III}_b\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-4&5&3\\3&3&7&13\\-4&2&3&1\end{array}\right)$

$\begin{matrix}\text{I}_b\\\text{II}_c = 2\cdot\text{II}_b - 3\cdot\text{I}_b\\\text{III}_c = \text{III}_b + 2\cdot\text{I}_b\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-4&5&3\\0&18&-1&17\\0&-6&13&7\end{array}\right)$

$\begin{matrix}\text{I}_b\\\text{II}_c\\\text{III}_d = 3\cdot\text{III}_b + \text{II}_c\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-4&5&3\\0&18&-1&17\\0&0&38&38\end{array}\right)$

Aus III_d erhält man die Gleichung $38x_3 = 38$ und somit $x_3 = 1$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 1$ in II_c erhält man $18x_2 - 1 = 17$ und $x_2 = 1$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 1$ und $x_2 = 1$ in I erhält man $2x_1 - 4 + 5 = 3$ und $x_1 = 1$.

$\mathbb{L} = \{(1; 1; 1)\}$

d) $\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&3&10\\5&-3&1&5\\2&-4&4&-2\end{array}\right)$

$\begin{matrix}\text{III}\\\text{I}\\\text{II}_a = 2\cdot\text{II} - 5\cdot\text{III}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-4&4&-2\\0&1&3&10\\0&14&-18&20\end{array}\right)$

$\begin{matrix}\text{III}\\\text{I}\\\text{II}_b = \text{II}_a - 14\cdot\text{I}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-4&4&-2\\0&1&3&10\\0&0&-60&-120\end{array}\right)$

Aus II_b erhält man die Gleichung $-60x_3 = -120$ und somit $x_3 = 2$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 2$ in I erhält man $x_2 + 3\cdot 2 = 10$ und $x_2 = 4$.

Durch Einsetzen von $x_3 = 2$ und $x_2 = 4$ in III erhält man $2x_1 - 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = -2$ und $x_1 = 3$.
$L = \{(3; 4; 2)\}$

e)
$$\begin{array}{ll} \text{I} & \\ \text{II} & \\ \text{III} & \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \\ \text{II} & \\ \text{III}_a = \text{III} - \text{I} & \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \\ \text{II} & \\ \text{III}_b = \text{III}_a - \text{II} & \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus III_b erhält man die Gleichung $0 \cdot x_3 = 0$. Das LGS hat unendlich viele Lösungen.
Wähle $x_3 = t$. Durch Einsetzen von $x_3 = t$ in II erhält man $-2 \cdot x_2 + t = 0$ und $x_2 = \frac{1}{2}t$.
Durch Einsetzen von $x_3 = t$ und $x_2 = \frac{1}{2}t$ in I erhält man $x_1 + \frac{1}{2}t + t = 5$ und $x_1 = 5 - \frac{3}{2}t$.
$L = \left\{\left(5 - \frac{3}{2}t; \frac{1}{2}t; t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

f)
$$\begin{array}{ll} \text{I} & \\ \text{II} & \\ \text{III} & \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \\ \text{II}_a = 2 \cdot \text{II} - \text{I} & \\ \text{III}_a = \text{III} - \text{II} & \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

Aus III_a erhält man die Gleichung $-3 \cdot x_3 = -9$ und somit $x_3 = 3$.
Durch Einsetzen von $x_3 = 3$ in II_a erhält man die Gleichung $5 \cdot 3 = 15 \neq -3$. Aufgrund dieses Widerspruches gibt es keine Lösung.
$L = \{\ \}$

4

a) Durch Einsetzen ergibt sich: $3t = 3 \Leftrightarrow t = 1$
$5 - 2t = 3 \Leftrightarrow t = 1$
$t = 1$
Damit ist $(3; 3; 1)$ Lösung des LGS.

b) Durch Einsetzen ergibt sich: $3t = 9 \Leftrightarrow t = 3$
$5 - 2t = 11 \Leftrightarrow t = -3 \neq 3$
$t = 3$
Damit ist $(9; 11; 3)$ keine Lösung des LGS.

c) Durch Einsetzen ergibt sich: $3t = -6 \Leftrightarrow t = -2$
$5 - 2t = 9 \Leftrightarrow t = -2$
$t = -2$
Damit ist $(-6; 9; -2)$ Lösung des LGS.

5

a) $\text{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-5 \\ 5-(-3) \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\text{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1-6 \\ 0-3 \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

6

a) In einer der beiden Parametergleichungen muss der Parameter verändert werden. Aus dem Ansatz $g_1 = g_2$ ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:
I $\quad 1 + 2t = 3 + s$
II $\quad 1 + 3t = 4$
III $\quad 2 + t = 3 + s$
Aus II ergibt sich $t = 1$. Durch Einsetzen von $t = 1$ in III ergibt sich $2 + 1 = 3 + s$ und $s = 0$.
Kontrolle durch Einsetzen von $t = 1$ und $s = 0$ in I:
$1 + 2 \cdot 1 = 3 + 0$ ✓
Die Geraden schneiden sich im Punkt $(3|4|3)$.
$\text{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, da die Richtungsvektoren der Geraden nicht kollinear sind.

b) In einer der beiden Parametergleichungen muss der Parameter verändert werden. Aus dem Ansatz $g_1 = g_2$ ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:
I $\quad 2 + t = s$
II $\quad t = -2 + 2s$
III $\quad 2 + t = 3s$
Aus I ergibt sich $t = s - 2$. Durch Einsetzen von $t = s - 2$ in II ergibt sich $s - 2 = -2 + 2s$ und $s = 0$ und damit $t = -2$.
Kontrolle durch Einsetzen von $t = -2$ und $s = 0$ in III:
$2 - 2 = 3 \cdot 0$ ✓
Die Geraden schneiden sich im Punkt $(0|-2|0)$.
$\text{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, da die Richtungsvektoren der Geraden nicht kollinear sind.

7

a) Die Ebene verläuft durch den Koordinatenursprung, senkrecht zur x_1x_2-Ebene. Die x_3-Achse ist also in der Ebene enthalten. Die Ebene liegt in einem Winkel von 45° zur x_1- und x_2-Achse

b) individuelle Lösung, zum Beispiel:
$\text{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) individuelle Lösung, zum Beispiel:
$\text{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) individuelle Lösung, zum Beispiel:
$\text{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
und $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Seite 237

8

a) $2\cdot 4 - 2 + 3\cdot(-2) = 8 - 2 - 6 = 0$ ✓
Der Punkt D liegt in der Ebene E.

b) $2\cdot 3 - 2 + 3\cdot 1 = 6 - 2 + 3 = 7 \neq 0$
Der Punkt E liegt nicht in der Ebene E.

c) $2\cdot(-1) - 1 + 3\cdot 1 = -2 - 1 + 3 = 0$ ✓
Der Punkt F liegt in der Ebene E.

d) $2\cdot(-2) - 2 + 3\cdot 2 = -4 - 2 + 6 = 0$ ✓
Der Punkt G liegt in der Ebene E.

9

individuelle Lösung, zum Beispiel:
Die x_2-Achse liegt orthogonal zur x_1x_3-Ebene. Damit kann $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Ebene E gewählt werden.
$0\cdot x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 = d$, also $x_2 = d$.
Da die Ebene E zum Koordinatenursprung den Abstand 2 haben soll, gilt $d = 2$ oder $d = -2$, also ist $E_1: x_2 = 2$ oder $E_2: x_2 = -2$.
Die x_1- und die x_3-Achse liegen in der x_1x_3-Ebene.
$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sind Richtungsvektoren von E, also

$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ oder

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

10

individuelle Lösung, zum Beispiel:

a) $Q(1|0|-1)$ liegt in E, da $3\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) = 1$ gilt.
$R(0|-1|1)$ liegt in E, da $3\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 = 1$ gilt.
Mit $E: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r\cdot\overrightarrow{PQ} + s\cdot\overrightarrow{QR}$ folgt
$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

nur LK: $P(0|1|0)$ liegt in E, da $3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 = 1$ gilt.
Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ folgt $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = 0$.

b) $Q(0|-3|0)$ liegt in E, da $1\cdot 0 - (-3) = 3$ gilt. $R(4|1|1)$ liegt in E, da $1\cdot 4 - 1 = 3$ gilt.
Mit $E: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r\cdot\overrightarrow{PQ} + s\cdot\overrightarrow{QR}$ folgt
$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$.

nur LK: $P(3|0|0)$ liegt in E, da $1\cdot 3 - 0 = 3$ gilt.
Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ folgt $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$.

c) Aus $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 0$ erhält man das LGS

I	n_1	+	n_2	+	n_3	$= 0$
II	n_1	+	$2n_2$	+	$2n_3$	$= 0$
$II_a = II - I$			n_2	+	n_3	$= 0$

Wählt man zum Beispiel $n_3 = -1$, so erhält man $n_2 = 1$ und aus $n_1 + 1 - 1 = 0$ folgt $n_1 = 0$.
Es ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, also ist $E: 0\cdot x_1 + x_2 - x_3 = d$. Mit dem Punkt $P(1|2|3)$ der Ebene E folgt $2 - 3 = -1 = d$, also $E: x_2 - x_3 = -1$ und (nur, wenn die Normalenform behandelt wurde): $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$.

d) Aus $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$ erhält man das LGS

I	n_1	$=$	0
II	n_2	$=$	0

Wählt man zum Beispiel $n_3 = 1$, so erhält man $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
Es ist $E: x_3 = d$. Mit dem Punkt $P(2|0|2)$ der Ebene E folgt $2 = d$, also ist $E: x_3 = 2$ und (nur, wenn die Normalenform behandelt wurde:) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$.

11

a) Der Richtungsvektor der x_3-Achse kann als $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ gewählt werden und es gilt $\vec{n_E} = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$.

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{1\cdot\sqrt{20}} \Rightarrow \alpha \approx 26{,}57°$$

b) $\overrightarrow{n_{x_2x_3\text{-Ebene}}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_{x_1x_3\text{-Ebene}}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\sin(\alpha_1) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{1\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63{,}43°$$

$$\sin(\alpha_2) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 26{,}57°$$

Die Gerade g schneidet die x_2x_3-Ebene in einem Winkel von ca. 63,43° und die x_1x_3-Ebene in einem Winkel von ca. 26,57°.

12

Durch Einsetzen von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4+2t \\ 2+6t \\ 6t \end{pmatrix}$ in E ergibt sich

a) $2\cdot(4+2t) - 2\cdot(2+6t) + 2\cdot 6t = 6$ und $t = 0{,}5$

$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 2+3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Probe: $2\cdot 5 - 2\cdot 5 + 2\cdot 3 = 10 - 10 + 6 = 6$ ✓

Der Schnittpunkt von g und E ist $S(5|5|3)$.

b) $4\cdot(4+2t) + 2\cdot(2+6t) + 6\cdot 6t = 14$ und $t = -\frac{3}{28}$

$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 4+2\cdot\left(-\frac{3}{28}\right) \\ 2+6\cdot\left(-\frac{3}{28}\right) \\ 6\cdot\left(-\frac{3}{28}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{53}{14} \\ \frac{19}{14} \\ -\frac{9}{14} \end{pmatrix}$

Probe: $4\cdot\frac{53}{14} + 2\cdot\frac{19}{14} + 6\cdot\left(-\frac{9}{14}\right) = \frac{196}{14} = 14$ ✓

Der Schnittpunkt von g und E ist $S\left(\frac{53}{14}\middle|\frac{19}{14}\middle|-\frac{9}{14}\right)$.

c) $0\cdot(4+2t) - 2\cdot(2+6t) + 4\cdot 6t = 24$ und $t = \frac{7}{3}$

$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 4+2\cdot\frac{7}{3} \\ 2+6\cdot\frac{7}{3} \\ 6\cdot\frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{3} \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}$

Probe: $-2\cdot 16 + 4\cdot 14 = 24$ ✓

Der Schnittpunkt von g und E ist $S\left(\frac{26}{3}\middle|16\middle|14\right)$.

d) $2\cdot(4+2t) + 0\cdot(2+6t) - 2\cdot 6t = 12$ und $t = -0{,}5$

$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Probe: $2\cdot 3 - 2\cdot(-3) = 6 + 6 = 12$ ✓

Der Schnittpunkt von g und E ist $S(3|-1|-3)$.

13

a) Legt man den Koordinatenursprung in den Punkt an der vorderen linken Ecke, so liegen in der einen Dachfläche (nachfolgend mit Ebene E bezeichnet) die Punkte $A(0|0|3)$, $B(0|4{,}4|7{,}4)$ und $C(-7{,}6|0|3)$ und in der anderen Dachfläche (Ebene F) die Punkte $B(0|4{,}4|7{,}4)$, $P(0|8{,}8|3)$ und $Q(-7{,}6|8{,}8|3)$.

Bestimmung einer Ebene E in Koordinatenform durch Einsetzen der Punkte A, B und C in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$:

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 3c & = & d \\ & 4{,}4b & + 7{,}4c & = & d \\ -7{,}6a & & + 3c & = & d \\ \text{I} & & 3c & - d & = 0 \\ \text{II} & 4{,}4b & + 7{,}4c & - d & = 0 \\ \text{III} & -7{,}6a & + 3c & - d & = 0 \end{array}$$

Aus I ergibt sich $c = \frac{1}{3}d$.

Durch Einsetzen von $c = \frac{1}{3}d$ in II ergibt sich

$4{,}4\cdot b + 7{,}4\cdot\frac{1}{3}d - d = 0$ und $b = -\frac{1}{3}d$.

Durch Einsetzen von $c = \frac{1}{3}d$ und III ergibt sich

$-7{,}6a + 3\cdot\frac{1}{3}d - d = 0$ und $a = 0$.

Mit $d = 3$ erhält man $a = 0$, $b = -1$ und $c = 1$.

E: $-x_2 + x_3 = 3$ mit $\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmung einer Ebene F in Koordinatenform durch Einsetzen der Punkte B, P und Q in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 4{,}4b & + 7{,}4c & = & d \\ & 8{,}8b & + 3c & = & d \\ -7{,}6a & + 8{,}8b & + 3c & = & d \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrr} \text{I} & & 4{,}4b & + 7{,}4c & - d & = 0 \\ \text{II} & & 8{,}8b & + 3c & - d & = 0 \\ \text{III} & -7{,}6a & + 8{,}8b & + 3c & - d & = 0 \\ \hline \text{II}_a = \text{II} - 2\cdot\text{I} & & & -11{,}8c & + d & = 0 \end{array}$$

Aus II_a ergibt sich $c = \frac{5}{59}d$.

Durch Einsetzen von $c = \frac{5}{59}d$ in I ergibt sich

$4{,}4\cdot b + 7{,}4\cdot\left(\frac{5}{59}d\right) - d = 0$ und $b = \frac{5}{59}d$.

Durch Einsetzen von $c = \frac{5}{59}d$ und $b = \frac{5}{59}d$ in III ergibt sich

$-7{,}6a + 8{,}8\cdot\frac{5}{59}d + 3\cdot\frac{5}{59}d - d = 0$ und $a = 0$.

Mit $d = 59$ erhält man $a = 0$, $b = 5$ und $c = 5$.

F: $5x_2 + 5x_3 = 59$ mit $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Da $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ist der Winkel zwischen den beiden Dachflächen 90° groß.

b) Die Hauswand liegt in der x_1x_3-Ebene und kann damit mit

G: $x_2 = 0$ mit $\vec{n_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

Mit $\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45°.$$

Der Winkel zwischen Hauswand und Dachfläche ist 135° groß (Nebenwinkel von 45°).

c) Die Kanten des Kamins liegen parallel zur x_3-Achse und können damit als Geraden mit dem Richtungsvektor

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Mit $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{5}{1\cdot\sqrt{50}} \Rightarrow \alpha = 45°.$$

Der Winkel zwischen einer Kante des Kamins und der Dachfläche ist 45° groß.

14

individuelle Lösung, zum Beispiel:

Man wählt für die Seitenlängen des Tetraeders 2 LE. Die Grundfläche wird beschrieben durch die Punkte $A(0|0|0)$, $B(\sqrt{3}|1|0)$ und $C(0|2|0)$.

B liegt über dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$, damit hat die x_2-Koordinate den Wert 1. Die Entfernung von diesem Mittelpunkt entspricht der Höhe des gleichseitigen Dreiecks ABC.

$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

Damit hat die x_1-Koordinate den Wert $\sqrt{3}$ (oder $-\sqrt{3}$).

Um die Koordinaten der Spitze des Tetraeders zu bestimmen, benötigt man zunächst den Schwerpunkt der Grundfläche. Der Schwerpunkt teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$.

Im gleichseitigen Dreieck ist die Seitenhalbierende zugleich Höhe des Dreiecks. Damit hat der Schwerpunkt die Koordinaten $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\,|\,1\,|\,0\right)$.

Die Spitze D der Pyramide liegt senkrecht über diesem Schwerpunkt. Der Abstand zum Schwerpunkt entspricht der Höhe des Tetraeders $H = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}$

$\left(\text{oder } H = \sqrt{\sqrt{3}^2 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$.

Damit ergibt sich für die Koordinaten von D: $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\,\middle|\,1\,\middle|\,\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$.

Die Punkte A, B und C liegen in der x_1x_2-Ebene. Es gilt

$E: x_3 = 0$ mit $\overrightarrow{n_{x_1x_2\text{-Ebene}}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Bestimmung einer Ebene F in Koordinatenform durch Einsetzen der Punkte B, C und D in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & \sqrt{3}\,a + b & = & d \\ \text{II} & 2b & = & d \\ \text{III} & \frac{1}{3}\sqrt{3}\,a + b + \sqrt{\frac{8}{3}}\,c & = & d \end{array}$$

Aus II ergibt sich $b = \frac{1}{2}d$.

Durch Einsetzen von $b = \frac{1}{2}d$ in I ergibt sich $\sqrt{3}\,a + \frac{1}{2}d = d$ und $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}d$.

Durch Einsetzen von $b = \frac{1}{2}d$ und $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}d$ in III ergibt sich $\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}d + \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{8}{3}}c = d$ und $c = \frac{1}{2\sqrt{6}}d$.

Mit $d = \sqrt{12}$ erhält man $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ und $c = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$E: x_1 + \sqrt{3}\,x_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x_3 = \sqrt{12}$ mit $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Winkel zwischen den Seitenflächen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}\right|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 \cdot \sqrt{4{,}5}} \Rightarrow \alpha \approx 70{,}53°$$

15

a) Man stellt die Gerade durch L und P auf und schneidet sie mit der Bildebene E. Der Schnittpunkt ist der Bildpunkt P'.

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ geschnitten mit

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ergibt $P'(2{,}5|6|2{,}5)$.

Seite 238

16

a) $A(4|2|4)$, $B(4|4|1)$, $C(0|4|2)$

Bestimmung der Ebene in Koordinatenform durch Einsetzen der Punkte A, B und C in $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 4a + 2b + 4c & = & d \\ \text{II} & 4a + 4b + c & = & d \\ \text{III} & 4b + 2c & = & d \\ \hline \text{II}_a = \text{II} - \text{I} & 2b - 3c & = & 0 \end{array}$$

Aus II_a ergibt sich $b = \frac{3}{2}c$.

Durch Einsetzen von $b = \frac{3}{2}c$ in III ergibt sich $4 \cdot \frac{3}{2}c + 2c = d$ und $c = \frac{1}{8}d$, damit ist $b = \frac{3}{16}d$.

Durch Einsetzen von $c = \frac{1}{8}d$ und $b = \frac{3}{16}d$ in I ergibt sich $4a + 2 \cdot \frac{3}{16}d + 4 \cdot \frac{1}{8}d = d$ und $a = \frac{1}{32}d$.

Mit $d = 32$ erhält man $a = 1$, $b = 6$ und $c = 4$.

$E: x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 32$ mit $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}$

b) x_1x_2-Ebene mit $\overrightarrow{n_{x_1x_2\text{-Ebene}}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{4}{1 \cdot \sqrt{53}} \Rightarrow \alpha \approx 56{,}67°$$

x_2x_3-Ebene mit $\overrightarrow{n_{x_2x_3\text{-Ebene}}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\cos(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{53}} \Rightarrow \beta \approx 82{,}10°$$

x_1x_3-Ebene mit $\overrightarrow{n_{x_1x_3\text{-Ebene}}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\cos(\gamma) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{6}{1 \cdot \sqrt{53}} \Rightarrow \gamma \approx 34{,}50°$$

c) x_1-Achse mit $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{53}} \Rightarrow \alpha \approx 7{,}90°$$

x_2-Achse mit $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\sin(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{6}{1 \cdot \sqrt{53}} \Rightarrow \beta \approx 55{,}50°$$

x_3-Achse mit $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\sin(\gamma) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{4}{1 \cdot \sqrt{53}} \Rightarrow \gamma \approx 33{,}33°$$

d) Für den Punkt D gilt $D(0|x_2|4)$. Da D in E liegt, ergibt sich durch Einsetzen in E die Gleichung $0 + 6x_2 + 4 \cdot 4 = 32$ und $x_2 = \frac{8}{3}$.

Für die Innenwinkel des Schnittvierecks bestimmt man die Richtungsvektoren der Geraden durch A und B $\left(\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}\right)$, B und C $\left(\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, C und D $\left(\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{4}{3}\\2\end{pmatrix}\right)$ und A und D $\left(\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-4\\\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}\right)$.

Winkel bei A:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-4\\\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-4\\\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{\frac{148}{9}}} \Rightarrow \alpha \approx 84{,}77°$$

Winkel bei B:

$$\cos(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} \Rightarrow \beta \approx 78{,}36°$$

Winkel bei C:

$$\cos(\gamma') = \frac{\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\-\frac{4}{3}\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\-\frac{4}{3}\\2\end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{\frac{52}{9}}} \Rightarrow \gamma' \approx 78{,}36°.$$

Da der Winkel bei C ein stumpfer Winkel ist, gilt
$\gamma = 180° - \gamma' = 101{,}64°$
Winkel bei D: $\delta = 360° - \alpha - \beta - \gamma = 95{,}23°$

17

1. gesucht: Es soll überprüft werden, ob der Lichtstrahl die Kirchturmdachfläche trifft.
   Gegeben: Die Eckpunkte der Dachfläche, der Anfangspunkt der Lichtquelle sowie der Endpunkt auf dem Boden, zu dem die Lichtquelle ausgerichtet wird (Der Laserstrahl wird als Gerade modelliert.)
2. (1) Geradengleichung des Laserstrahls aufstellen (Gerade g)
   (2) Ebenengleichung, in der die Dachfläche BCS liegt, aufstellen (Ebene E)
   (3) Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E bestimmen
   (4) prüfen ob der Schnittpunkt aus (3) innerhalb des Dreiecks BCS liegt
3. (1) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\7\\5\end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\7\\5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}8\\7\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-7\\-4\\-5\end{pmatrix}$

   (2) $E: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BS}$ folgt
   $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\\2\end{pmatrix}$
   Für $r + s \leq 1$ mit $r \geq 0$ und $s \geq 0$ beschreibt die Parameterform der Ebene nur die Dreiecksfläche BCS.
   (3) Mit $g = E$ erhält man aus dem entsprechenden LGS
   $\begin{pmatrix}8\\7\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-7\\-4\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\\2\end{pmatrix}$
   rechnerisch oder mithilfe eines MMS die Lösungen $t = \frac{11}{21}$, $r = \frac{4}{7}$ und $s = \frac{4}{21}$.
   (4) Es ist $r = \frac{4}{7} > 0$ und $s = \frac{4}{21} > 0$ und damit $r + s = \frac{4}{7} + \frac{4}{21} = \frac{16}{21} < 1$ erfüllt. Damit liegt der Schnittpunkt in der Dreiecksfläche.
4. Der Lichtstrahl trifft die Kirchturmfläche.

18

a) Zu Isas Behauptung: $3x_2 + 4x_3 = 5$ kann in $x_3 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}x_2$ umgeformt werden und als Geradengleichung interpretiert werden. Es beschreibt eine Gerade, die in der x_2x_3-Ebene liegt. Zu Moritz' Behauptung: $x_2 + 4x_3 = 5$ kann als Gleichung einer Ebene in Koordinatenform aufgefasst werden.

b) Die Ebene $E: x_2 + 4x_3 = 5$ enthält die Gerade $g: x_3 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}x_2$. Die Gerade g beschreibt die Punkte der Ebene E für $x_1 = 0$.

c) Die Ebene hat den Startpunkt $\left(0\middle|0\middle|\frac{d}{c}\right)$, der auf der x_3-Achse liegt. In $E: x_3 = -\frac{a}{c}x_1 - \frac{b}{c}x_2 + \frac{d}{c}$ erhält man diesen für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$. Wenn man von diesem Punkt eine Einheit in x_1-Richtung und $-\frac{a}{c}$ Einheiten in x_3-Richtung geht, erhält man einen weiteren Punkt der Ebene. Dies entspricht dem Vorgehen bei der Steigung einer Geradengleichung, die durch den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{a}{c}\end{pmatrix}$ gegeben ist. Der Wert $-\frac{a}{c}$ gibt demnach die „Steigung" des Richtungsvektors an, der in der x_1x_3-Ebene liegt.

Entsprechend gibt der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{b}{c}\end{pmatrix}$ die „Steigung" des Richtungsvektors an, der in der x_2x_3-Ebene liegt.
Diese Werte können der umgeformten Koordinatenform entnommen werden: $x_3 = -\frac{a}{c}x_1 - \frac{b}{c}x_2 + \frac{d}{c}$

19

a) Die geometrische Form ist der Stumpf einer quadratischen Pyramide.

b) Die Seitenflächen sind Trapeze.

$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$

$|\vec{k}| = |\overrightarrow{AE}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{34}$; $|\vec{h}|^2 = |\vec{k}|^2 - 3^2 = 34 - 3^2 = 25$

und somit $|\vec{h}| = 5$

$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (10 + 4) \cdot 5 = 35\,FE$

Deckel:

$A_{Deckel} = 4^2 = 16\,FE$

$O = 4 \cdot A_{Trapez} + A_{Deckel} = 4 \cdot 35 + 16 = 156\,FE$

c) Aufstellen der Ebenengleichungen:

$E_{vorne}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\vec{n_v} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$

$E_{rechts}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\vec{n_r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$

$E_{Deckel}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{n_D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen zwei Seitenflächen:

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|40 \cdot 0 + 0 \cdot 40 + 30 \cdot 30|}{\sqrt{40^2 + 30^2} \cdot \sqrt{40^2 + 30^2}}\right) \approx 68{,}9°$

Da der Winkel zwischen zwei Seitenflächen stumpf ist, ist die Größe des Winkels $180° - 68{,}9° = 111{,}1°$.

Winkel zwischen Seite und Deckel:

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{|40 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 30 \cdot 16|}{\sqrt{16^2} \cdot \sqrt{40^2 + 30^2}}\right) \approx 53{,}13°$

Da der Winkel zwischen dem Deckel und einer Seitenfläche stumpf ist, ist die Größe des Winkels $180° - 53{,}13° = 126{,}87°$.

d) Die Punkte des Bodens bleiben unverändert:

$A' = A,\ B' = B,\ C' = C,\ D' = D$

Außerdem ergeben sich z. B. für E' und F':

$\overrightarrow{OE'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aus der unteren Zeile erhält man $r = 2$ und somit

$\overrightarrow{OE'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

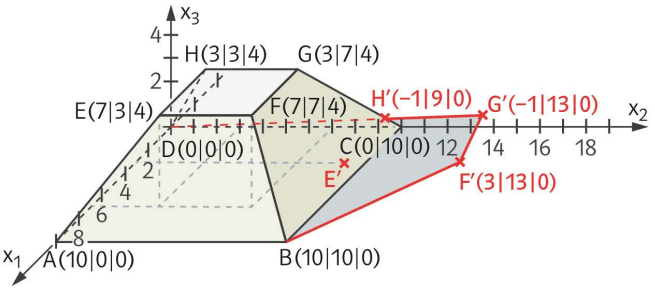
$\overrightarrow{OF'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aus der unteren Zeile erhält man $r = 2$ und somit

$\overrightarrow{OF'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$

Entsprechend berechnet man $G'(-1|13|0)$, $H'(-1|9|0)$.

Zeichnung:



e) Die Schattenfigur ist das Sechseck BF'G'H'EC.

Berechnung der Seitenlängen:

$\overrightarrow{BF'} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{BF'}| = \sqrt{(-7)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{58}\,LE$

$\overrightarrow{F'G'} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{F'G'}| = \sqrt{(-4)^2} = 4\,LE$

$\overrightarrow{G'H'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{G'H'}| = 4\,LE$

$\overrightarrow{H'D} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{H'D'}| = \sqrt{1^2 + (-9)^2} = \sqrt{82}\,LE$

$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{DC}| = 10\,LE$

$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{CB}| = 10\,LE$

Winkel der Schattenfigur:

$\sphericalangle CBF' = \cos^{-1}\left(\frac{70 + 0}{\sqrt{58} \cdot \sqrt{10^2}}\right) \approx 23{,}2°$

$\sphericalangle BF'G' = \cos^{-1}\left(\frac{-28}{\sqrt{58} \cdot \sqrt{4^2}}\right) \approx 156{,}8°$

$\sphericalangle F'G'H' = \cos^{-1}(0) = 90°$

$\sphericalangle G'H'D = \cos^{-1}\left(\frac{0 - 36 + 0}{\sqrt{4^2} \cdot \sqrt{82}}\right) \approx 173{,}66°$

$\sphericalangle H'DC = \cos^{-1}\left(\frac{90}{10 \cdot \sqrt{82}}\right) \approx 6{,}34°$

$\sphericalangle DCB = \cos^{-1}(0) = 90°$ bzw. $270°$

Seite 239

20

a) $C(8|8|0)$, $D(0|8|0)$

b) Da es eine quadratische Pyramide ist, sind die entsprechenden Winkel bei den vier Seitenflächen gleich groß.

$g_{AS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v_g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_{ABCD}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\4\\14\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}4\\4\\14\end{pmatrix}\right|} = \frac{14}{1 \cdot \sqrt{228}} \approx 0{,}927 \Rightarrow \alpha \approx 68°$$

Die Größe der Winkel zwischen den Kanten der Seitenflächen und der Grundfläche ABCD beträgt ca. 68°.

c) Als Normalenvektor der Ebene E_{BCS} berechnet man z. B. $\overrightarrow{n_{BCS}} = \begin{pmatrix}7\\0\\2\end{pmatrix}$.

Als Normalenvektor der Ebene E_{CDS} berechnet man z. B. $\overrightarrow{n_{CDS}} = \begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}$.

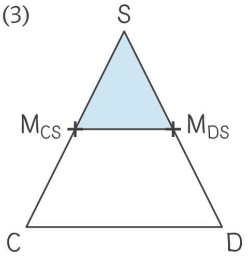
$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}7\\0\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}7\\0\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}\right|} = \frac{4}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{53}} \approx 0{,}075 \Rightarrow \alpha \approx 85{,}7°$$

Die Größe des Winkels zwischen den Seitenflächen BCS und CDS beträgt ca. 85,7°.

d) (1) $E_{SCD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\14\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\-14\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix}$

(2) Da die Werbefläche auf die Hälfte der Höhe der Kante $\overline{CS}$ ausgerollt wird, gilt für die Parameter $r + s \leq 0{,}5$ und $r \geq 0$ bzw. $s \geq 0$.

(3)



$$\overrightarrow{OM_{CS}} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-4\\-4\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\7\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_{DS}} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}4\\-4\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\7\end{pmatrix}$$

$$A_{M_{CS}M_{DS}S} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{M_{CS}M_{DS}}\right| \cdot h_{MM}$$

$$\left|\overrightarrow{M_{CS}M_{DS}}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 4\,\text{LE}$$

$$\left|\overrightarrow{M_{CS}S}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\7\end{pmatrix}\right| = \sqrt{57}\,\text{LE}$$

Mit dem Satz des Pythagoras berechnet man $h_{MM}^2 = (\sqrt{57})^2 - 2^2 = 53$ und somit $h_{MM} = \sqrt{53}$.

Nach Einsetzen der Werte erhält man

$A_{M_{CS}M_{DS}S} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{53} = 14{,}56\,\text{FE}$.

Die Werbefläche ist ca. $14{,}56\,\text{m}^2$ groß.

$14{,}56 \cdot 500 = 7280$

Pro Woche müssen für die Werbefläche 7280 € bezahlt werden.

e) (1) Die Ebene verläuft parallel zur x_2x_3-Ebene und besitzt die Koordinatengleichung $x_1 = 1$.

(2) Die Koordinaten der Flugbahn müssen mit der Ebenengleichung $E_{M_{CS}M_{DS}S}$ gleichgesetzt werden. Man erhält das folgende LGS:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 1 & = & 6 - 2r - 4s \\
\text{II} & 15 - 8t & = & 6 - 2r \\
\text{III} & -0{,}25t^2 + 3t + 0{,}75 & = & 7 + 7r \\
\hline
\text{II}_a & & r & = -4{,}5 + 4t \\
\text{III}_a & t^2 + 100t - 101 & = & 0
\end{array}$$

$t_1 = 1$ und $t_2 = -101$

Da $t \geq 0$ im Modell Voraussetzung ist, ist $t_2 = -101$ irrelevant.

Mit $t_1 = 1$ ergeben sich noch $r = -\frac{1}{2}$ (aus II_a) und $s = 1{,}5$ (aus I). Nach Einsetzen erhält man

$$\overrightarrow{OW} = \begin{pmatrix}6\\6\\7\end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-2\\7\end{pmatrix} + 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\\3{,}5\end{pmatrix}.$$

Da die Werbefläche oberhalb von $x_3 = 7$ beginnt, liegt der Punkt $W(1|7|3{,}5)$ nicht in der Werbefläche. Der Ball trifft die Werbefläche nicht.

f) $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \cdot h_{Pyramide}$

Mit $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 8$ und $h_{Pyramide} = 14$ folgt

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 14 = 298\frac{2}{3}\,\text{VE}$.

Das Volumen der Pyramide beträgt $298\frac{2}{3}\,\text{m}^3$.

21

a) $J(0|3|2)$, $H(2|0|2)$

b) k verändert nur die x_2-Koordinate von B_k. Dadurch bewegt sich B_k auf der x_2-Achse und bleibt immer gleich weit von A und C entfernt, die auf den anderen Achsen liegen. Das Dreieck ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{AC}$.

$\left|\overrightarrow{AB_k}\right| = \sqrt{36 + k^2}$ und $\left|\overrightarrow{CB_k}\right| = \sqrt{k^2 + 36}$

c) Ebenengleichung des Dreiecks AB_kC:

$$E_{AB_kC}: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-6\\k\\0\end{pmatrix}$$

Als Normalenvektor berechnet man z. B. $\overrightarrow{n_{AB_kC}} = \begin{pmatrix}k\\6\\k\end{pmatrix}$.

Setzt man den Normalenvektor in die Gleichung in die Koordinatenform ein, erhält man $kx_1 + 6x_2 + kx_3 = d$.

Durch Einsetzen von z. B. den Koordinaten des Punktes A kann man den Wert für d berechnen und erhält als Ebenengleichung in Koordinatenform $kx_1 + 6x_2 + kx_3 = 6k$.

d) x_2-Achse: $g: \vec{x} = l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Größe des Winkels zwischen der x_2-Achse und der Ebene soll 45° betragen.

Also muss $\sin(45°) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k \\ 6 \\ k \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} k \\ 6 \\ k \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{6}{1 \cdot \sqrt{k^2 + 36 + k^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ gelten.

$$\begin{aligned} \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{2}} &= \sqrt{k^2 + 36 + k^2} \\ \left(\frac{12}{\sqrt{2}}\right)^2 &= 2k^2 + 36 \\ 72 &= 2k^2 + 36 \\ 0 &= k^2 - 18 \\ k &= \pm\sqrt{18} \end{aligned}$$

e) (1) Einsetzen von I und E_{AB_kC}: $2k + 18 + 2k = 6k$.
Man erhält $k = 9$.
Für $k = 9$ verläuft die Ebene E_{AB_kC} durch den Punkt I.
(2) $V_{Quader} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12\,VE$

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyramide}$

$G = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{DA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DB_k}\right| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot k = 3k$

Mit $k = 9$ ergibt sich also $G = 27\,FE$.

$h_{Pyramide} = 6$

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 6 = 54\,VE$

Das Volumen der Pyramide beträgt 54 VE.

Berechnung des ausgefüllten Volumens: $\frac{12}{54} = \frac{2}{9} \approx 0{,}22$

Etwa 22 % der Pyramide sind ausgefüllt.

f) $g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} kt + 6t + k(-t) &= 6k \\ 6t &= 6k \\ t &= k \end{aligned}$$

k in g eingesetzt, ergibt $\overrightarrow{OS} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ -k \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt ist also $S(k|k|-k)$.

VII Lagebeziehungen und Abstände

Seite 247

Check-in

1

a) $d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2a \end{pmatrix}\right|$
$= \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 4a^2} = \sqrt{52 + 4a^2}$

$$\begin{aligned} \sqrt{52 + 4a^2} &= 14 \quad |\square^2 \\ 52 + 4a^2 &= 196 \quad |-52 \\ 4a^2 &= 144 \quad |:4 \\ a^2 &= 36 \\ a &= \pm 6 \end{aligned}$$

2

kollinear: $\vec{c}$ und $\vec{e}$, da $-1{,}5 \cdot \vec{c} = -1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \vec{e}$

orthogonal: $\vec{a}$ und $\vec{b}$, da $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -7 + 9 - 2 = 0$

$\vec{a}$ und $\vec{c}$, da $\vec{a} \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 14 - 12 - 2 = 0$

$\vec{a}$ und $\vec{e}$, da $\vec{a} \circ \vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = -21 + 18 + 3 = 0$

3

a) $E_1: 4x_1 - 0{,}5x_2 + 8x_3 = 1$, also $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -0{,}5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Mit $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -0{,}5 \\ 8 \end{pmatrix} = -0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -16 \end{pmatrix}$ und

$4 \cdot 8 - 0{,}5 \cdot (-2) + 8 \cdot (-4) = 1$ ergibt sich

$E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -16 \end{pmatrix} = 0.$

Mit dem Stützvektor $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ in E_1 sowie

$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -16 \end{pmatrix} = -4 - 4 + 8 = 0$ und

$\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -16 \end{pmatrix} = 16 - 8 - 8 = 0$ ergibt sich

$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$

$E_2: 0{,}5x_1 - 4x_2 - 0{,}5x_3 = 4$, also $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

Mit $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

$0{,}5 \cdot 8 - 4 \cdot (-0{,}5) - 0{,}5 \cdot 4 = 4$ ergibt sich

$E_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ -0{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$

Mit dem Stützvektor $\begin{pmatrix} 8 \\ -0{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$ in E_2 sowie

$\begin{pmatrix} 4 \\ -0{,}5 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$ und

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0$ ergibt sich

$E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -0{,}5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -0{,}5 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) $E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist eine Parameterform der Ebene E.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$; mit $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

erhält man $-2n_2 - 4n_3 = 0$ und $-7n_1 + 2n_2 - 4n_3 = 0$.
Wählt man z.B. $n_3 = 7$, erhält man

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Dies ergibt $E\colon -8x_1 - 14x_2 + 7x_3 = c$ und durch Einsetzen der Koordinaten von z.B. Punkt A erhält man
$c = -8 \cdot 2 - 14 \cdot (-2) + 7 \cdot 8 = 68$ und die Koordinatenform der Ebene E mit $E\colon -8x_1 - 14x_2 + 7x_3 = 68$.

Außerdem erhält man $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$ als Normalenform der Ebene E.

4

$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OD} + r \cdot \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 6r \\ -9r \\ 4 - 6r \end{pmatrix}$;

$H\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Mit $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$ erhält man

I $5n_1 - n_2 - 2n_3 = 0$
II $7n_1 - 4n_2 - 5n_3 = 0$
$4 \cdot$ I $-$ II liefert $13n_1 - 3n_3 = 0$; wählt man z.B. $n_3 = 13$, erhält man durch Einsetzen $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 13 \end{pmatrix}$ und damit

$H\colon 3x_1 - 11x_2 + 13x_3 = c$; durch Einsetzen der Koordinaten von z.B. Punkt A erhält man $c = 3 \cdot 1 + 13 \cdot 5 = 68$ und damit
$H\colon 3x_1 - 11x_2 + 13x_3 = 68$.
Das Einsetzen der Koordinaten von g in H liefert
$3 \cdot (1 + 6r) - 11 \cdot (-9r) + 13 \cdot (4 - 6r) = 39r + 55 = 68$, also $r = \frac{1}{3}$.
Einsetzen von r in g liefert $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit $S(3|-3|2)$.

5

a)
$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}5 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 8 & 8 & 7 & 22 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}5 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 8 & 13 & 59 \\ 0 & 24 & 39 & 166 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II_a = 6 \cdot I + II \\ III_a = 16 \cdot I + III \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}5 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 8 & 13 & 59 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right) \quad III_b = 3 \cdot II_a - III_a$$

Da die Gleichung $0 \cdot x_3 = 11$ niemals erfüllt ist, hat das LGS keine Lösung, also $L = \{\ \}$.

b)
$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2{,}5 \\ 3 & 2 & -5 & 0{,}5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -14 \\ 0 & -6 & 18 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II_a = I + 6 \cdot II \\ III_a = I - 2 \cdot III \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 84 & -84 \end{array}\right) \quad III_b = 6 \cdot II_a + 4 \cdot III_a$$

Aus III_b folgt $x_3 = -1$, aus II_a folgt $4x_2 - 2 = -14$, also $x_2 = -3$, und aus I folgt $6x_1 + 6 - 8 = 1$, also $x_1 = 0{,}5$.
Man erhält $L = \{(0{,}5; -3; -1)\}$.

c)
$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 4 & 9 \\ -2 & 1 & 5 & 9 \\ 4 & -3{,}5 & 11 & 22{,}5 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 14 & 27 \\ 0 & 0{,}5 & -7 & -13{,}5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II_a = I + 2 \cdot II \\ III_a = I - III \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II}_a \\ \text{III}_b \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 14 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad III_b = II_a + 2 \cdot III_a$$

Die dritte Gleichung ist immer erfüllt, man kann z.B. $x_3 = t$ frei wählen. Aus II_a folgt $-x_2 + 14t = 27$, also $x_2 = 14t - 27$, und aus I folgt $4x_1 - 3 \cdot (14t - 27) + 4 \cdot t = 9$, also $x_1 = 9{,}5t - 18$. Man erhält $L = \{(9{,}5t - 18; 14t - 27; t)\}$.

Seite 253

6

a) $\vec{u}_g = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\vec{u}_g \circ \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -8 + 10 - 2 = 0$

Punktprobe mit $P(3|4|-1)$: $4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - (-1) = 21$ ✓
Mit $\vec{u}_g \circ \vec{n}_E = 0$ und P in E gilt: Die Gerade g liegt in der Ebene E.

b) Für $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ gilt: $\vec{n}_E \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n}_E \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, also

I $3n_1 + n_2 + n_3 = 0$ und II $n_1 + 3n_2 + n_3 = 0$
I $-$ II liefert $2n_1 - 2n_2 = 0$, also $n_1 = n_2$; mit z.B. $n_1 = 1$ erhält man $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}_g \circ \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 + 5 - 8 = -5 \neq 0$, also gilt:
g schneidet E.

Wegen $(0|0|0)$ in E gilt für E: $x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$.
Setzt man die Koordinaten von g in E ein, erhält man:
$(3 - 2t) + (4 + 5t) - 4(2t - 1) = 0$, also $-5t = -11$ und damit $t = \frac{11}{5}$.

Einsetzen von t in g liefert $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{11}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ 15 \\ \frac{17}{5} \end{pmatrix}$ und damit $S\left(-\frac{7}{5} \middle| 15 \middle| \frac{17}{5}\right)$.

c) $\vec{u}_g = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\vec{u}_g \circ \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 16 - 20 + 4 = 0$

Punktprobe mit $P(3|4|-1)$:

$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -8 + 10 = 2 \neq 0$

Mit $\vec{u}_g \circ \vec{n}_E = 0$ und P nicht in E gilt: Die Gerade g verläuft parallel zur Ebene E.

Seite 255

14

individuelle Lösungen, z. B.:

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der Ursprung $O(0|0|0)$ liegt nicht in E.

(1) $g \parallel E$: $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$, also z. B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$. Mit $P(0|0|0)$ erhält man $g: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(2) g in E: Mit z. B. $Q(-1|0|0)$ aus E und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus (1) erhält man $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(3) $g \perp E$: Mit $Q(-1|0|0)$ aus E und $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ erhält man $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(4) g schneidet E: Mit $Q(-1|0|0)$ aus E und einem Vektor $\vec{u}$, der nicht orthogonal und nicht senkrecht zu Vektor $\vec{n}$ ist, z. B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, erhält man z. B.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{n_E} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $P(0|1|-1)$ liegt in E.

(1) $F \parallel E$: Mit z. B. $Q(0|1|1)$ nicht in E und $\vec{n_F} = \vec{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ erhält man F: $3x_2 - 5x_3 = -2$.

(2) $F \perp E$: Mit $P(0|1|-1)$ aus E und einem auf $\vec{n_E}$ senkrechten Vektor $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ erhält man z. B. F: $5x_2 + 3x_3 = 2$.

(3) F schneidet E mit der x_1-Achse als Schnittgerade: Da die Koordinatengleichung von E für alle beliebigen Werte von x_1 erfüllt ist, kann man für F die Spannvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \vec{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ wählen. Mit $\vec{n_F} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n_F} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$ erhält man $n_1 = 0$ und $3n_2 = 5n_3$, also $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Mit $P(0|1|-1)$ aus E erhält man also F: $-5x_2 + 3x_3 = -8$.

G **17**

a) $d = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ [LE]

b) Länge der Diagonale der Grundfläche:
$d_g = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$
Länge der Raumdiagonale:
$d = \sqrt{(\sqrt{13})^2 + 5^2} = \sqrt{13 + 25} = \sqrt{38} \approx 6{,}16$ [LE]

Seite 258

6

a) E: $-2x_1 + x_2 + 4x_3 - (-4 + 0{,}5 + 4) = 0$, also
E: $-2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0{,}5$.

Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2r \\ 2 + r \\ -2 + 4r \end{pmatrix}$

mit $\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten von l einsetzen in
E: $-2 \cdot (2 - 2r) + (2 + r) + 4 \cdot (-2 + 4r) = 0{,}5$ liefert
$21r - 10 = 0{,}5$ und damit $r = 0{,}5$.

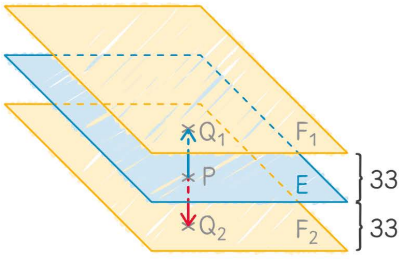
Lotfußpunkt: $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$, also
$F(1|2{,}5|0)$

Abstand: $d = |\overrightarrow{PF}| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{21}{4}} \approx 2{,}29$

b) Es gilt $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, also ist der Spiegelpunkt $P'(0|3|2)$.

7

Skizze



$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$, $|\vec{n}| = \sqrt{4 + 36 + 81} = \sqrt{121} = 11$

$\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP} + 3 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ -25 \end{pmatrix}$, also

$F_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ -25 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$

$\overrightarrow{OQ_2} = \overrightarrow{OP} - 3 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \\ 29 \end{pmatrix}$, also

$F_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \\ 29 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$

Seite 260

15

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$

$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, also $S_1(8|3|4)$

$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OM} - 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, also $S_1(0|-1|-4)$

b) Volumen der Pyramide $ABCDS_1$:

$|\overrightarrow{AC}| = 2 \cdot |\overrightarrow{AM}| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$; $2 \cdot |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$,

also $|\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{|\overrightarrow{AC}|^2}{2} = 4$

Damit gilt $V_{ABDCS_1} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 = 8$ und somit

$V_{ABDCS_1S_2} = 2 \cdot V_{ABDCS_1} = 2 \cdot 8 = 16\,[VE]$.

G **18**

Länge der Grundseite: $a = \sqrt{36} = 6$,

Länge der Mantelkante: $m = 5$

Abstand eines Eckpunktes A zum Mittelpunkt M der Grundfläche: $d(A, M) = \sqrt{\frac{6^2}{2}} = \sqrt{18}$, da $2 \cdot d^2 = a^2 = 6^2$

(d ist die Diagonale der Grundfläche)

Die Höhe der Pyramide ist somit

$h = \sqrt{m^2 - d^2} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7} \approx 2{,}65\,[LE]$.

Seite 263

4

a) Hilfsebene H durch $R(-2|-1|1)$ mit $\vec{n} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

aufstellen: $H: x_1 - x_2 + x_3 = c$; aus $c = -2 + 1 + 1 = 0$ folgt $H: x_1 - x_2 + x_3 = 0$

Koordinaten von g in E einsetzen:

$(1 + t) - (1 - t) + t = 0$, also $3t = 0$ und damit $t = 0$.

Der Lotfußpunkt (Punkt auf g mit geringster Entfernung zu R) ist also $F(1|1|0)$.

Abstand von R zu g: $d = |\overrightarrow{RF}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{14} \approx 3{,}74\,[LE]$

b) Hilfsebene H durch $R(1|2|-3)$ mit $\vec{n} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

aufstellen: $H: 2x_1 + x_2 - x_3 = c$; aus $c = 2 + 2 + 3 = 7$ folgt $H: 2x_1 + x_2 - x_3 = 7$

Koordinaten von g in E einsetzen:

$2 \cdot (2 + 2t) + (3 + t) - (2 - t) = 7$, also $6t = 2$ und damit $t = \frac{1}{3}$.

$t = \frac{1}{3}$ eingesetzt in g ergibt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

Der Lotfußpunkt (Punkt auf g mit geringster Entfernung zu R) ist daher $F\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{10}{3}\middle|\frac{5}{3}\right)$.

Abstand von R zu g: $d = |\overrightarrow{RF}| = \left|\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{237}{9}} \approx 5{,}13\,[LE]$

Seite 264

11

Bewegungsgleichung des Hubschraubers

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -0 \\ 0{,}3 & -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$

Sei F der Lotfußpunkt der Lotgeraden von Punkt $K(10|0|0{,}1)$ auf h. Dann gilt $\overrightarrow{FK} \circ \vec{u} = 0$, also

$\begin{pmatrix} 10 - (4 - 4t) \\ 0 \\ 0{,}1 - (0{,}2 + 0{,}1t) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 4t \\ 0 \\ -0{,}1 - 0{,}1t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$

$= -24{,}01 - 16{,}01t = 0.$

Damit erhält man $t = \frac{24{,}01}{16{,}01} \approx -1{,}5$. Eingesetzt in g erhält man

$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} - 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}$ und damit $F(10|0|0{,}05)$.

Abstand von K zu F: $|\overrightarrow{FK}| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}05 \end{pmatrix} = 0{,}05$

Der Hubschrauber hat eine minimale Entfernung von der Kirchturmspitze von ca. 50 m und könnte damit gegebenenfalls eine Gefahr darstellen.

12

a) Hilfsebene H durch den Punkt $P(2|4|2)$ mit $\vec{n} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, sodass g senkrecht zu H verläuft: $H: 4x_1 - 3x_3 = c$;
mit $c = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2$ ergibt sich $H: 4x_1 - 3x_3 = 2$.
Für einen Punkt A in der Ebene H, der von P den Abstand 5 LE hat, müssen die folgenden Bedingungen gelten:

Mit $\overrightarrow{PA} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = 5$ und $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$.

Durch Probieren findet man z. B. $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und wegen

$\vec{v_1} = \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 \\ a_2 - 4 \\ a_3 - 2 \end{pmatrix}$ erhält man $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Mit $\vec{v_2} = -\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ erhält man $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

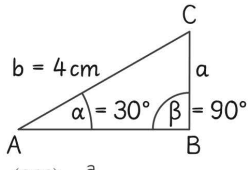
Als dritten Vektor findet man z. B. $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Mit den Punkten A, B und C erhält man die zu g parallelen Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) Alle Geraden, die vom Punkt P den Abstand 5 LE haben und parallel zueinander verlaufen, bilden einen Zylinder mit dem Durchmesser 10 LE, da alle Punkte, die in H liegen und von P den Abstand 5 haben, auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt P liegen.

G **16**

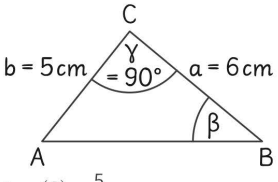
a)



$\sin(30°) = \frac{a}{4}$

$a = 4 \cdot \sin(30°) = 4 \cdot 0{,}5 = 2\,[\text{cm}]$

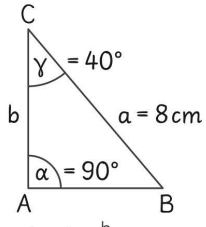
b)



$\tan(\beta) = \frac{5}{6}$

$\beta \approx \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) \approx 39{,}81°$

c)



$\cos(40°) = \frac{b}{8}$

$b = 8 \cdot \cos(40°) \approx 6{,}13\,[\text{cm}]$

Seite 267

4

a) Gewählte Methode: Bestimmung der kürzesten Verbindungsstrecke

$G_r = (4|2 - 3r|25 + r)$ und $H_t = (3 + 6t|2 + 2t|5 - t)$;

$\overrightarrow{G_rH_t} = \begin{pmatrix} -1 + 6t \\ 2t + 3r \\ -20 - t - r \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{G_rH_t} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\overrightarrow{G_rH_t} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ liefern das LGS

I: $-6t - 9r - 20 - t - r = 0$

II: $-6 + 36t + 4t + 6r + 20 + t + r = 0$

I: $-7t - 10r = 20$

II: $41t + 7r = -14$

Man erhält die Lösung $t = 0$ und $r = -2$ und damit die Punkte $G(3|2|5)$ und $H(4|8|23)$.

Damit gilt $d = |\overrightarrow{GH}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1 + 36 + 324} = \sqrt{361}$

$= 19\,[\text{LE}]$.

b) Gewählte Methode: Rückführung auf den Abstand eines Punktes von einer Ebene

Mit $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ erhält man

$3n_2 - 2n_3 = 0$ und $3n_1 - n_2 = 0$.

Wählt man z. B. $n_2 = 6$, ergibt sich mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ und dem Stützvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Hilfsebene $H: 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 17$.

Abstand $Q(9|5|10)$ von H:

Einsetzen der Lotgeraden $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ in H liefert

$2 \cdot (9 + 2r) + 6 \cdot (5 + 6r) + 9$.

$(10 + 9r) = 17$, also $121r + 138 = 17$ und damit $r = -1$.

Es ergibt sich der Lotfußpunkt $F(7|-1|1)$ und damit der Abstand $d = |\overrightarrow{QF}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 36 + 81} = \sqrt{121} = 11\,[\text{LE}]$.

Seite 268

10

a) $|BC| = 4$ LE; legt man den Punkt D in den Ursprung, erhält man $A(4|0|0)$, $B(4|4|0)$, $C(0|4|0)$ sowie $S(2|2|6)$. Man erhält $g_{rot}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g_{blau}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Die Punkte auf den Geraden lassen sich daher als $G_{rot} = (4|4r|0)$ und $G_{blau} = (2t|4 - 2t|6t)$ beschreiben.

$\overrightarrow{G_{rot}G_{blau}} = \begin{pmatrix} 2t - 4 \\ -2t - 4r + 4 \\ 6t \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{G_{rot}G_{blau}} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\overrightarrow{G_{rot}G_{blau}} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$ liefern das LGS

I: $-8t - 16r + 16 = 0$
II: $4t - 8 + 4t + 8r - 8 + 36t = 0$ $\rightarrow$ I: $-8t - 16r = -16$, II: $44t + 8r = 16$

Man erhält die Lösung $t = 0{,}2$ und $r = 0{,}9$ und damit die Punkte $G_{blau}(0{,}4|3{,}6|1{,}2)$ und $G_{rot}(4|3{,}6|0)$. Damit gilt

$d = \left|\overrightarrow{G_{blau}G_{rot}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 0 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{12{,}96 + 1{,}44} = \sqrt{14{,}4}$

$\approx 3{,}79$ [LE] $< |BC|$.

b) Da die beiden Punkte mit der geringsten Entfernung dieselbe x_2-Koordinate 3,6 haben, liegen sie beide in einer Ebene, die parallel zur x_1-x_3-Ebene verläuft und zur Kante $\overline{BC}$ den Abstand 0,4 LE hat.

G **14**

a) Länge einer Grundkante: $a = \sqrt{16} = 4$ [LE]
Länge einer halben Diagonale d der Grundfläche:
$d = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$
Mit der Höhe $h = 1$ erhält man die Länge der Mantelkante
$m = \sqrt{d^2 + h^2} = \sqrt{8 + 1} = \sqrt{9} = 3$ [LE].

b) Radius der Grundfläche: $G = \pi r^2 = 25\pi$, also $r = \sqrt{\frac{25\pi}{\pi}} = 5$
Länge der Mantellinie: $m = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$
$= 5 \cdot \sqrt{2}$ [LE]

Seite 272

5

1. Schritt: gesucht: Koordinaten der beiden Pyramidenspitzen S_1 und S_2
gegeben: Punkte A, B, C und D der Grundfläche, Höhe h und Gerade g, auf der S_1 und S_2 liegen
2. Schritt: Man stellt die Ebene E auf, in der die Grundfläche liegt, bestimmt zu E zwei parallele Ebenen F_1 und F_2 mit Abstand 3 LE und erhält S_1 und S_2 als Schnittpunkte der beiden Ebenen F_1 und F_2 mit der Geraden g.
3. Schritt:
- Aufstellen der Ebene E: Die Grundfläche liegt in der x_1x_2-Ebene, also gilt $E: x_3 = 0$.
- Für die zu E parallelen Ebenen F_1 und F_2 gilt damit $F_1: x_3 = 3$ und $F_2: x_3 = -3$.
- Schnittpunkte S_1 und S_2 von g mit F_1 und F_2:
- Mit $x_3 = 3$ ergibt sich $\lambda = 3$ und damit $S_1(3|-6|3)$.
- Mit $x_3 = -3$ ergibt sich $\lambda = -3$ und damit $S_2(-3|6|-3)$.

4. Schritt: Die Pyramidenspitzen sind $S_1(3|-6|3)$ und $S_2(-3|6|-3)$.
Alternative: Wenn man unmittelbar erkennt, dass die Grundfläche in der x_1x_2-Ebene liegt und dass damit die x_3-Koordinaten der Pyramidenspitzen den Betrag 3 haben müssen, kann man ihre Koordinaten direkt mithilfe von g bestimmen.

Seite 273

10

a) 1. Schritt: gesucht: das Volumen der geraden Pyramide
gegeben: die Ebene E, in der die quadratische Grundfläche liegt, die Länge m der Mantelkanten
2. Schritt: Der Abstand vom Punkt S zur Ebene liefert die Höhe h der Pyramide, mithilfe der Kantenlänge m lässt sich zunächst jeweils mit dem Satz des Pythagoras die halbe Diagonale d der Grundfläche und anschließend die Länge der Grundkante k bestimmen. Mit k und h berechnet man dann abschließend das Volumen der Pyramide.
3. Schritt:
- Abstand von S zur Ebene E:
Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8{,}25 \\ -8{,}25 \\ 8{,}25 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}25 + r \\ -8{,}25 - r \\ 8{,}25 + r \end{pmatrix}$
Einsetzen von l in E: $(8{,}25 + r) - (-8{,}25 - r) + (8{,}25 + r) = 4$,
also $r \approx -6{,}92$
Man erhält den Lotfußpunkt $F(1{,}33|-1{,}33|1{,}33)$ und
somit $h = \left|\overrightarrow{SF}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6{,}92 \\ 6{,}92 \\ -6{,}92 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3 \cdot 6{,}92^2} \approx 11{,}99 \approx 12$ [LE].
- Länge der halben Flächendiagonale:
$d = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ [LE]
- Länge der Grundkante: $k = \sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{50}$ [LE]
- Volumen der Pyramide:
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{50})^2 \cdot 12 = 200$ [VE]

4. Schritt: Das Volumen der Pyramide beträgt ca. 200 VE.

b) Punkt auf Grundfläche: $F(1{,}33|-1{,}33|1{,}33)$ oder
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OF} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $P(2{,}33|-0{,}33|1{,}33)$
Punkt Q innerhalb: z. B. $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OF} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 1{,}33 \\ -1{,}33 \\ 1{,}33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
also $Q(2{,}33|-2{,}33|2{,}33)$
Punkt R außerhalb:
z. B. $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OF} + 10 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1{,}33 \\ -1{,}33 \\ 1{,}33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$, also
$R(11{,}33|-11{,}33|11{,}33)$

G **13**

a) Da der Punkt F auf einem Thaleskreis über der Strecke $\overline{AB}$ mit $A(0|-3|0)$ und $B(0|3|0)$ liegt, ist das Dreieck ABF rechtwinklig. Da der Punkt $C(3|0|0)$ auf einem weiteren Thaleskreis über der Strecke $\overline{AB}$ liegt, ist auch das Dreieck ABC rechtwinklig.

b) Satz des Pythagoras:

– $|\overline{AB}| = 6$, $|\overline{AF}| = \left|\begin{pmatrix}0\\4{,}3\\2{,}7\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 4{,}3^2 + 2{,}7^2} \approx 5{,}08$

$|\overline{BF}| = \left|\begin{pmatrix}0\\-1{,}7\\2{,}7\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 1{,}7^2 + 2{,}7^2} \approx 3{,}19$

$|\overline{AF}|^2 + |\overline{BF}|^2 = 5{,}08^2 + 3{,}19^2 \approx 35{,}98 \approx 36 = |\overline{AB}|^2 = 36$

– $|\overline{BC}| = |\overline{AC}| = \left|\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$;

$|\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2 = 36 = |\overline{AB}|^2$

Skalarprodukt:

– $\overrightarrow{AF} \circ \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}0\\4{,}3\\2{,}7\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\-1{,}7\\2{,}7\end{pmatrix} = 0 - 7{,}31 + 7{,}29 \approx 0$

– $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} = 9 - 9 = 0$

c) $G = 0{,}5 \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{BC}| = 9$; $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2{,}7 = 8{,}1\,[VE]$

Seite 274

Klausurtraining

1

A – 4: Der Normalenvektor von E und der Richtungsvektor von g sind weder kollinear noch orthogonal.

B – 1: Der Normalenvektor von E steht wegen $\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix} = 0$ senkrecht auf dem Richtungsvektor von g, P(0|3|2) aus g liegt wegen $\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = 0$ in E, also liegt g in E.

C – 2: Der Normalenvektor von E steht wegen $\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix} = 0$ senkrecht auf dem Richtungsvektor von g, P(9|4|2) aus g liegt wegen $27 - 12 - 4 = 11 \neq 21$ nicht in E, also verläuft g parallel zu E.

D – 3: Beide Spannvektoren von E stehen wegen $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix} = 0$ senkrecht auf dem Richtungsvektor von g, also schneidet g die Ebene E orthogonal.

2

individuelle Lösungen, zum Beispiel:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$; $F: 2x_1 - x_3 = 8$ bzw.

$F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = 0$ bzw.

$F: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$; $F: 2x_1 + x_2 - x_3 = 6$ bzw.

$F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$ bzw.

$F: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $F: -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -12$ bzw.

$F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} = 0$ bzw.

$F: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

3

a) Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\10\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 + 2r\\1 + 10r\\1 + 11r\end{pmatrix}$ in E: $2 \cdot (3 + 2r) + 10 \cdot (1 + 10r) + 11 \cdot (1 + 11r) = 252$ liefert $225r + 27 = 252$, also $r = 1$ und damit den Lotfußpunkt F(5|11|12). Man erhält $d = |\overrightarrow{PF}| = \left|\begin{pmatrix}2\\10\\11\end{pmatrix}\right| = \sqrt{225} = 15$.

b) Der Richtungsvektor von g ist nicht orthogonal zum Normalenvektor von E, also schneiden g und E sich.

Schnittpunkt g und E; Koordinaten von g in E eingesetzt:

$2 \cdot (-6 - 3r) + 10 \cdot (4 + r) + 11 \cdot (4 + r) = 252$

liefert $15r + 72 = 252$, also $r = 12$ und damit S(–42|16|16).

$\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix}45\\-15\\-15\end{pmatrix}$ und

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix}-42\\16\\16\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}45\\-15\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-87\\31\\31\end{pmatrix}$;

also Q(–87|31|31).

4

Die Höhe der Pyramide h entspricht dem Abstand des Punktes S von E.

Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-4\\7\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 + 3r\\-4 - 3r\\7 + 5r\end{pmatrix}$ in E: $3 \cdot (2 + 3r) - 3 \cdot (-4 - 3r) + 5 \cdot (7 + 5r) = 10$ liefert $43r + 53 = 10$, also $r = -1$ und damit den Lotfußpunkt F(–1|–1|2). Man erhält $d = |\overrightarrow{SF}| = \left|\begin{pmatrix}-3\\3\\-5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{43} \approx 6{,}56\,[LE]$.

Damit gilt $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{43} \approx 2{,}19a^2$.

5

a) Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\-6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 + 2r\\4 + 3r\\-6 - 5r\end{pmatrix}$ in E: $2 \cdot (3 + 2r) + 3 \cdot (4 + 3r) - 5 \cdot (-6 - 5r) = 10$ liefert $38r + 48 = 10$, also $r = -1$ und damit den Lotfußpunkt F(1|1|–1).

Man erhält nun $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}$, also A'(–1|–2|4).

b) Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2r \\ 8+3r \\ -10-5r \end{pmatrix}$ in

$E: 2 \cdot (6+2r) + 3 \cdot (8+3r) - 5 \cdot (-10-5r) = 10$ liefert

$38r + 86 = 10$, also $r = -2$ und damit den Lotfußpunkt $F(2|2|0)$.

Man erhält nun $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$,

also $A'(-2|-4|10)$.

c) Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+2r \\ -10+3r \\ 12-5r \end{pmatrix}$ in

$E: 2 \cdot (-7+2r) + 3 \cdot (-10+3r) - 5 \cdot (12-5r) = 10$ liefert

$38r - 104 = 10$, also $r = 3$ und damit den Lotfußpunkt $F(-1|-1|-3)$.

Man erhält nun $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -18 \end{pmatrix}$,

also $A'(5|8|-18)$.

6

a) Hilfsebene H durch $R(11|5|-4)$ mit $\vec{n} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

aufstellen: $H: x_1 + x_2 + 4x_3 = c$; aus $c = 11 + 5 - 16 = 0$

folgt $H: x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$.

Koordinaten von g in H einsetzen:

$(2+r) + (4+r) + 4 \cdot (-6+4r) = 0$, also $18r = 18$ und damit $r = 1$

Schnittpunkt von g und H: $F(3|5|-2)$.

Abstand von R zu g: $d = |\overrightarrow{RF}| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{68} \approx 8{,}25\,[\text{LE}]$

b) Hilfsebene H durch $R(9|1|10{,}5)$ mit $\vec{n} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

aufstellen: $H: 8x_1 + x_3 = c$; aus $c = 72 + 10{,}5 = 82{,}5$ folgt $H: 8x_1 + x_3 = 82{,}5$.

Koordinaten von g in H einsetzen:

$8 \cdot (-2+8r) + (1+r) = 82{,}5$, also $65r = 97{,}5$ und damit $r = 1{,}5$.

Schnittpunkt von g und H: $F(10|1|2{,}5)$.

Abstand von R zu g: $d = |\overrightarrow{RF}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{65} \approx 8{,}06\,[\text{LE}]$

7

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{CD}$, also sind die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel. Die Höhe h entspricht dem Abstand z. B. des Punktes C von der Geraden g durch A und B mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Mit C und $\vec{n} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ erhält man die Hilfsebene $H: 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 16$. Einsetzen von g in H liefert $2 \cdot (1+2r) + 4 \cdot (1+4r) - 4 \cdot (2-4r) = 16$, also $36r = 18$, also $r = 0{,}5$. Der Schnittpunkt von g und H ist $F(2|3|0)$.

Damit gilt $h = |\overrightarrow{CF}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9} = 3$.

Man erhält $G = \frac{1}{2} \cdot \left(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}| \right) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (6+3) \cdot 3 = 13{,}5\,[\text{FE}]$.

Seite 275

8

a) Hilfsebene H durch $P(4|-3|7)$ mit $\vec{n} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufstellen: $H: 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 = c$; aus $c = 8 - 33 + 28 = 3$ folgt $H: 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 3$.

Koordinaten von g in H einsetzen:

$2 \cdot (4+2s) + 11 \cdot (12+11s) + 4 \cdot (1+4s) = 3$, also $141s = -141$ und damit $s = -1$. Schnittpunkt von g und H: $F(2|1|-3)$.

Man erhält $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix}$ und damit $P(0|5|-13)$.

b) Hilfsebene H durch $P(10|12|-2)$ mit $\vec{n} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufstellen: $H: 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 = c$; aus $c = 20 + 132 - 8 = 144$ folgt $H: 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 144$

Koordinaten von g in H einsetzen:

$2 \cdot (4+2s) + 11 \cdot (12+11s) + 4 \cdot (1+4s) = 144$, also $141s = 0$ und damit $s = 0$. Schnittpunkt von g und H: $F(4|12|1)$.

Man erhält $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$ und damit $P(-2|12|4)$.

c) Hilfsebene H durch $P(14|30|17)$ mit $\vec{n} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufstellen: $H: 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 = c$; aus $c = 28 + 330 + 68 = 426$ folgt $H: 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 426$

Koordinaten von g in H einsetzen:

$2 \cdot (4+2s) + 11 \cdot (12+11s) + 4 \cdot (1+4s) = 426$, also $141s = 282$ und damit $s = 2$.

Schnittpunkt von g und H: $F(8|34|9)$.

Man erhält $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 8 \\ 34 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 38 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit $P(2|38|1)$.

9

Es genügt zu zeigen, dass $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 - 30 + 32 = 0$ gilt.

10

Legt man z. B. den Punkt D in den Ursprung, erhält man $S(1{,}5|1{,}5|4)$ sowie mit den Punkten $P(3|2|0)$ und $Q(2|3|0)$ die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hilfsebene H durch S mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufstellen: $H: -x_1 + x_2 = 0$. Die Koordinaten von g in H einsetzen: $-(3-r) + (2+r) = 0$, also $r = \frac{1}{2}$.

Der Schnittpunkt von g und H ist $F(2{,}5|1{,}5|0)$. Man erhält somit $d = |\overrightarrow{SF}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{17} \approx 4{,}12$.

11

a) Bestimmung der kürzesten Verbindungsstrecke:

$G_r = (7 + 2r|7 + 2r|4 + r)$ und $H_t = (7 + 2t|-1 + t|5)$;

$\overrightarrow{G_rH_t} = \begin{pmatrix} 2t - 2r \\ t - 2r - 8 \\ 1 - r \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{G_rH_t} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\overrightarrow{G_rH_t} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ liefern das LGS

I: $4t - 4r + 2t - 4r - 16 + 1 - r = 0$ $\quad$ I: $6t - 9r = 15$

II: $4t - 4r + t - 2r - 8 = 0$ $\rightarrow$ II: $5t - 6r = 8$

Man erhält die Lösung $t = -2$ und $r = -3$ und damit die Punkte $G(1|1|1)$ und $H(3|-3|5)$.

Damit gilt $d = |\overrightarrow{GH}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$ [LE].

b) Bestimmung der kürzesten Verbindungsstrecke:

$g_r: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 22 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix}$

$G_r = (2 - 6r|7|6)$ und $H_t = (2|-6 + 16t|22 - 12t)$;

$\overrightarrow{G_rH_t} = \begin{pmatrix} 6r \\ 16t - 13 \\ -12t + 16 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{G_rH_t} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\overrightarrow{G_rH_t} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} = 0$ liefern das LGS

I: $-36r = 0$ $\quad$ I: $r = 0$

II: $256t - 208 + 144t - 192 = 0$ $\rightarrow$ II: $400t = 400$

Man erhält die Lösung $t = 1$ und $r = 0$ und damit die Punkte $G(2|7|6)$ und $H(2|10|10)$.

Damit gilt $d = |\overrightarrow{GH}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ [LE].

12

Legt man eine Ecke der quadratischen Grundfläche ABCD in den Ursprung, erhält man $A(0|0|0)$, $B(1|0|0)$, $C(1|1|0)$ und $D(0|1|0)$. Für die Spitze $S(0{,}5|0{,}5|a)$ gilt

$|\overrightarrow{AS}| = \left|\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ a \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}5 + a^2} = 1$, also $a = \sqrt{0{,}5}$ und damit

$S(0{,}5|0{,}5|\sqrt{0{,}5})$.

Damit erhält man zwei Geraden $g(A, B)$ und $h(C, S)$, auf denen zwei windschiefe Kanten liegen: $g: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ \sqrt{0{,}5} \end{pmatrix}$.

Bestimmung der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen $G_r = (r|0|0)$ und $H_s = (1 - 0{,}5s|1 - 0{,}5s|\sqrt{0{,}5} \cdot s)$ liefert

$\overrightarrow{G_rH_s} = \begin{pmatrix} 1 - 0{,}5s - r \\ 1 - 0{,}5s \\ \sqrt{0{,}5} \cdot s \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{G_rH_s} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\overrightarrow{G_rH_s} \circ \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ \sqrt{0{,}5} \end{pmatrix} = 0$ liefern das LGS

I: $1 - 0{,}5s - r = 0$

II: $-0{,}5 + 0{,}25s + 0{,}5r - 0{,}5 + 0{,}25s + 0{,}5s = 0$

I: $0{,}5s + r = 1$

II: $s + 0{,}5r = 1$

Man erhält die Lösung $s = \frac{2}{3}$ und $r = \frac{2}{3}$ und damit die Punkte $G\left(\frac{2}{3}\middle|0\middle|0\right)$ und $H\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{2}{3}\middle|\sqrt{0{,}5} \cdot \frac{2}{3}\right)$.

Damit gilt $d = |\overrightarrow{GH}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \sqrt{0{,}5} \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 0{,}5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}}$

$\approx 0{,}82$ [LE].

13

1. Schritt: gesucht: Zeitpunkt und Wert der minimalen Entfernung

gegeben: Koordinaten zweier Punkte des Schiffs (zu bestimmten Zeiten) und der Boje

2. Schritt: Bewegungsgleichung des Schiffes aufstellen, Abstand der Boje von der Bewegungsgeraden ermitteln.

3. Schritt: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2t \\ 1 + t \end{pmatrix}$ mit t in h;

Lotgerade l von C auf g: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen der Geradengleichungen von g und l führt auf das LGS

I: $10 + r = 5 + 2t$

II: $3 - 2r = 1 + t$

mit der Lösung $r = -0{,}2$ und $t = 2{,}4$

4. Schritt: Das Schiff kommt der Boje nach t Stunden, also nach 2 Stunden und 24 Minuten am nächsten und ist dann $\sqrt{0{,}2}$ km ≈ 447 m entfernt.

14

a) Für die Eckpunkte A, B und C des Dreiecks gilt $A(4|a|3)$, $B(4|5|b)$ und $C(c|5|3)$. Durch Einsetzen in die Ebenengleichung erhält man die Werte für a, b und c und damit $A(4|1{,}5|3)$, $B\left(4\middle|5\middle|\frac{2}{3}\right)$ und $C(0{,}5|5|3)$.

b) Mit der Grundfläche ABD mit $D(4|5|3)$ und der Spitze C erhält man

$V = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{CD}| = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$

$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot \frac{7}{3} \cdot 3{,}5 \approx 4{,}76$ [VE].

15

1. Schritt: gesucht: minimaler Abstand der Flugzeuge

gegeben: Koordinaten der Flugobjekte zu zwei Zeitpunkten

2. Schritt: Aufstellen der Bewegungsgleichungen mit gleichem Parameter t, Berechnen des allgemeinen Differenzvektors und Ermitteln des Minimums der Funktion, die den quadrierten Betrag des Differenzvektors in Abhängigkeit von t angibt.

3. Schritt: $f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ und $f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\8\\7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ (t in 10 Sekunden);

$\vec{d} = \begin{pmatrix}2-2t\\4-2t\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3+3t\\8-t\\7-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-5t\\-4-t\\-8+t\end{pmatrix}$, also

$|\vec{d}|^2 = d^2(t) = (5-5t)^2 + (-4-t)^2 + (-8+t)^2$
$= 25 - 50t + 25t^2 + 16 + 8t + t^2 + 64 - 16t + t^2$
$= 27t^2 - 58t + 105;$

man erhält $t = \frac{29}{27} \approx 1{,}07$ und $d^2(t) \approx 73{,}85$, also $d(t) = \sqrt{73{,}85} \approx 8{,}5$ [LE].

4. Schritt: Die beiden Flugzeuge fliegen in einem minimalen Abstand von ca. 8,6 km aneinander vorbei, es besteht damit keine Kollisionsgefahr.

Seite 276

16

a) $\overrightarrow{u_g} = \begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{n_E} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$, also $a = 2{,}5$

b) $E_1: 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1$; $\overrightarrow{u_g} = \begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix} \perp \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$, also

$\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} = 2 + 8 + 5a = 0$, also $a = -2$

Abstand vom Punkt $P(1|1|0)$ auf g zu E_1:

Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$ in E_1 liefert

$2\cdot(1+2t) + 4\cdot(1+4t) + 5\cdot 5t = 1$, also $45t = -5$, also $t = -\frac{1}{9}$. Mit dem Schnittpunkt $S\left(\frac{7}{9}\middle|\frac{5}{9}\middle|-\frac{5}{9}\right)$ erhält man den

Abstand $d = |\overrightarrow{PS}| = \left|\begin{pmatrix}-\frac{2}{9}\\-\frac{4}{9}\\-\frac{5}{9}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{45}{81}} \approx 0{,}75.$

c) $a = -2$ (siehe Teilaufgabe b)), $g_{-2}: \vec{x} = \begin{pmatrix}1+\lambda\\1+2\lambda\\-2\lambda\end{pmatrix}$ einsetzen in $E_b: 2\cdot(1+\lambda) + 4\cdot(1+2\lambda) + 5\cdot(-2\lambda) = b$ liefert $6 = b$.

17

(1) $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = -0{,}5\cdot\begin{pmatrix}-4\\-2\\-6\end{pmatrix} = \overrightarrow{n_2}$, damit sind die zugehörigen Ebenen parallel. Figur B gehört zu (1).

(2) $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ sind weder kollinear noch senkrecht, die Ebenen schneiden sich. Figur A gehört zu (2).

(3) $\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$, die zugehörigen Ebenen stehen senkrecht aufeinander. Figur C gehört zu (3).

18

a) Die Aussage ist falsch. Begründung: Der Normalenvektor von E steht orthogonal auf E, daher verläuft die Gerade g parallel zur Ebene E oder liegt vollständig in der Ebene E.

b) Die Aussage ist wahr. Begründung: Die Gerade g verläuft in dem Fall parallel oder liegt vollständig in der Ebene E, hat also keinen oder unendlich viele Punkte mit der Ebene gemeinsam.

c) Die Aussage ist wahr. Begründung: In dem Fall liegt der Normalenvektor der Ebene E in der Ebene F. Ihre Normalenvektoren stehen damit senkrecht aufeinander.

d) Die Aussage ist falsch. Begründung: Es wäre notwendig, dass beide Spannvektoren der Ebene F auf dem Normalenvektor der Ebene E senkrecht stehen. Gilt dies nur für einen Spannvektor, schneiden sich E und F.

19

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix}$;

Spiegelung an E: Einsetzen von g in E liefert $2 - 4r = 1$, also $r = 0{,}25$ und damit erhält man den Schnittpunkt von g und E: $S_E(-1|1|1)$. Spiegelung des Punktes $P(-2|2|0)$ an E:

Einsetzen der Lotgeraden $l: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ in E ergibt $2 + t = 1$, also $t = -1$ und damit $P_E(-2|1|0)$. Damit erhält man $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_E} + \overrightarrow{PP_E} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$ und $g_E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Spiegelung an F: Einsetzen von g in F liefert $-3\cdot(-2+4r) + 4r = 0$, also $r = 0{,}75$. Damit erhält man den Schnittpunkt $S_F(1|-1|3)$ von g und F.

Spiegelung des Punktes $P(-2|2|0)$ an F: Einsetzen der Lotgeraden $m: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ in F ergibt $-3\cdot(-2-3s) + s = 0$, also $s = -0{,}6$ und damit $P_F(-0{,}2|2|-0{,}6)$.

Damit erhält man

$\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OP_F} + \overrightarrow{PP_F} = \begin{pmatrix}-0{,}2\\2\\-0{,}6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1{,}8\\0\\-0{,}6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}6\\2\\-1{,}2\end{pmatrix}$ und $g_F: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-0{,}6\\-3\\4{,}2\end{pmatrix}$.

b) (1) Aus a) ist bekannt: $S_F = A(-1|1|1)$, $S_E = B(1|-1|3)$; einsetzen von g_E in F ergibt $-3(-1+\lambda) + (1+\lambda) = 0$, also $-2\lambda + 4 = 0$, also $\lambda = 2$ und damit $C(1|3|3)$.

Einsetzen von g_F in E ergibt $-1 - 3\mu = 1$, also $\mu = -\frac{2}{3}$, und damit $D(1{,}4|1|0{,}2)$.

Grundfläche ABC:

$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ mit $0 \le r, s \le 1$ und $r + s = 1$.

(2) $A_{ABC} = 0{,}5 \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot h$; h ist der Abstand von C zur Geraden $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Hilfsebene H mit C: $\overrightarrow{n_H} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und C ergibt H:

$2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2$; g_{AB} eingesetzt in H liefert

$2 \cdot (-1 + 2r) - 2 \cdot (1 - 2r) + 2 \cdot (1 + 2r) = 2$, also $12r - 2 = 2$,

also $r = \frac{1}{3}$ und damit $S\left(-\frac{1}{3} \middle| \frac{1}{3} \middle| \frac{5}{3}\right)$.

$d = |\overrightarrow{CS}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{96}{9}} \approx 3{,}27\,[\text{LE}]$.

Man erhält mit $|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{12} \approx 3{,}46\,[\text{LE}]$ schließlich

$A_{ABC} = 0{,}5 \cdot 3{,}46 \cdot 3{,}27 \approx 5{,}66\,[\text{FE}]$.

Seite 277

20

a) Schnittpunkt der beiden Geraden:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, also

I $4\lambda - 2\mu = 2$

II $-\lambda - \mu = -5$ $\rightarrow \lambda = 2$ und $\mu = 3$, einsetzen in III:

$-3 + 4 = 13 - 12$ ✓ $\Rightarrow$ A(10|0|1)

Schnittpunkte der Geraden mit der Ebene:

g in E: $3 \cdot (2 + 4\lambda) - (-3 + 2\lambda) = 19 \Rightarrow 10\lambda = 10$,

also $\lambda = 1 \Rightarrow B(6|1|-1)$

h in E: $3 \cdot (4 + 2\mu) - (13 - 4\mu) = 19 \Rightarrow 10\mu = 20$,

also $\mu = 2 \Rightarrow C(8|-1|5)$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{21}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit

$|\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{21}$; wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ ist das Dreieck gleichschenklig. Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 0{,}5 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

gilt, dass das Dreieck in einer zu E orthogonalen Ebene liegt.

c) Da B und C in E liegen, bleiben sie bei der Spiegelung an E unverändert.

Spiegelung von A an der Ebene E:

Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ in E ergibt

$3 \cdot (10 + 3r) - (1 - r) = 19$, also $r = -1$, also $S(7|0|2)$.

Damit ergibt sich $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$,

also $A'(4|0|3)$.

d) Die Höhe eines Kegels beträgt

$h = 0{,}5 \cdot |\overrightarrow{BC}| = 0{,}5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 0{,}5 \cdot \sqrt{44} = \sqrt{11}$.

Für den Radius r gilt $r = \sqrt{21 - 11} = \sqrt{10}$, also gilt

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10 \cdot \sqrt{11} \approx 69{,}46\,[\text{VE}]$.

e) Zunächst kann man prüfen, ob der Punkt P zwischen der Ebene, in der die Grundfläche liegt, und einer der Ebenen liegt, in der die obere bzw. untere Spitze liegt. Ist dies der Fall und hat man den Abstand von der Ebene mit der Spitze ermittelt, kann man z. B. mithilfe des Strahlensatzes ermitteln, wie groß der Abstand von P zur Geraden m sein darf, auf der der Kreismittelpunkt der Grundfläche und die Spitzen liegen. P liegt nun innerhalb eines der Kegel, wenn dieser maximale Abstand nicht überschritten ist.

21

a) Gerade $g(A, B): \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 + 4r \\ 0 \end{pmatrix}$ in

E_t: $t \cdot 2 + 0 = 2t$ ✓, also liegt g in E_t für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Für $t = 0$ erhält man E_0: $x_3 = 0$, also liegt die Grundfläche in der Ebene E_0.

Für $S(0|0|4)$ in E_t erhält man $4 = 2t$, also liegt die Spitze für $t = 2$ in E_2.

c) E_1: $x_1 + x_3 = 2$

A und B bilden die zwei unteren Punkte des Trapezes, E und F sind die Schnittpunkte der Geraden

$g(C, S): \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $g(D, S): \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

mit E_1.

g(C, S) in E_1 liefert $-2 + 2r + 4r = 2$, also $r = \frac{2}{3}$, also

$E\left(-\frac{2}{3} \middle| \frac{2}{3} \middle| \frac{8}{3}\right)$.

g(D, S) in E_1 liefert $-2 + 2r + 4r = 2$, also $r = \frac{2}{3}$, also

$F\left(-\frac{2}{3} \middle| -\frac{2}{3} \middle| \frac{8}{3}\right)$.

$|\overrightarrow{AB}| = 4$; $|\overrightarrow{EF}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{4}{3}$

Höhe des Trapezes

$h = |\overrightarrow{OM_{AB}} - \overrightarrow{OM_{EF}}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{128}{9}} \approx 3{,}77$,

also gilt $A = \frac{4 + \frac{4}{3}}{2} \cdot 3{,}77 \approx 10{,}05\,[\text{FE}]$.

d) Abstand von $M(0|0|0)$ zu E_t: Lotgerade $l: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in E_t

liefert $t \cdot (r \cdot t) + r = 2t$, also $rt^2 + r = 2t$ und damit $r = \frac{2t}{t^2 + 1}$.

Damit ist der Lotfußpunkt $L\left(\frac{2t^2}{t^2 + 1} \middle| 0 \middle| \frac{2t}{t^2 + 1}\right)$, also

$\overrightarrow{ML} = \begin{pmatrix} \frac{2t^2}{t^2 + 1} \\ 0 \\ \frac{2t}{t^2 + 1} \end{pmatrix}$. Da $|\overrightarrow{ML}| = \sqrt{2}$ sein soll, erhält man

$\left|\begin{pmatrix}\frac{2t^2}{t^2+1}\\0\\\frac{2t}{t^2+1}\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{4t^4+4t^2}{t^4+2t^2+1} = 2$, also $2t^4+2t^2 = t^4+2t^2+1$

und damit $t^4 = 1$ bzw. $t_1 = 1$ und $t_2 = -1$.

Die Ebenen $E_1: x_1 + x_3 = 2$ und $E_{-1}: -x_1 + x_3 = -2$ haben also von M den Abstand $\sqrt{2}$.

e) (1) Mit $B(2|2|0)$, $C(-2|2|0)$ und $S(0|0|4)$ erhält man z.B. $E_{BCS}: 2x_2 + x_3 = 4$.

Spiegelung von A:

Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ in $E_{BCS}: 2\cdot(-2+2r)+r = 4$

ergibt $r = 1{,}6$ und damit den Lotfußpunkt $P(2|1{,}2|1{,}6)$.

Damit gilt: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}2\\1{,}2\\1{,}6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3{,}2\\1{,}6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4{,}4\\3{,}2\end{pmatrix}$,

also $A'(2|4{,}4|3{,}2)$.

Spiegelung von D: Lotgerade $m: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ in

$E_{BCS}: 2\cdot(-2+2r)+r = 4$ ergibt $r = 1{,}6$ und damit den Lotfußpunkt $Q(-2|1{,}2|1{,}6)$.

Damit gilt: $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{DQ} = \begin{pmatrix}-2\\1{,}2\\1{,}6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3{,}2\\1{,}6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4{,}4\\3{,}2\end{pmatrix}$,

also $D'(-2|4{,}4|3{,}2)$.

(2) Gesucht ist der Winkel, den die Ebenen BCS und ADS einschließen. Mit $A(2|-2|0)$, $D(-2|-2|0)$ und $S(0|0|4)$ erhält man z.B. $E_{ADS}: -2x_2 + x_3 = 4$.

Für den Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_{BCS}}$ und $\overrightarrow{n_{ADS}}$: $\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_{BCS}}\circ\overrightarrow{n_{ADS}}|}{|\overrightarrow{n_{BCS}}|\cdot|\overrightarrow{n_{ADS}}|} = \frac{3}{5} = 0{,}6$, also $\alpha \approx 53{,}13°$.

Da $360° : 53{,}13°$ nicht ganzzahlig ist, ist kein Zusammenfallen der Seitenflächen bei fortgesetzter Spiegelung möglich.

22

a) $F_1(-2|5|5)$, $F_2(0|-2|3)$ und $T(3|2|0{,}5)$;

$|\overrightarrow{F_1T}| = \left|\begin{pmatrix}5\\-3\\-4{,}5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+9+20{,}25} = \sqrt{54{,}25} \approx 7{,}365$;

$|\overrightarrow{F_2T}| = \left|\begin{pmatrix}3\\4\\-2{,}5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16+6{,}25} = \sqrt{31{,}25} \approx 5{,}590$.

F_1 ist ca. 7265 m und F_2 ca. 5590 m vom Tower entfernt.

b) $f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\5\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0{,}27\end{pmatrix}$

wegen $\tan(15°) \approx 0{,}27$

$|\overrightarrow{F_1T}| = \left|\begin{pmatrix}5+t\\-3+t\\-4{,}5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(5+t)^2+(-3+t)^2+4{,}5^2}$, also

$d^2(F_1, T) = 2t^2 + 4t + 54{,}25$

Das Minimum wird erreicht für $t = -1$ mit einer Entfernung von $\sqrt{52{,}25} \approx 7{,}228$ [km].

$|\overrightarrow{F_2T}| = \left|\begin{pmatrix}3\\4-t\\-2{,}5-0{,}27t\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+(4-t)^2+(-2{,}5-0{,}27t)^2}$,

also $d^2(F_2, T) = 1{,}0729t^2 - 6{,}65t + 31{,}25$

Das Minimum wird erreicht für $t = 3{,}10$ mit einer Entfernung von $\sqrt{20{,}95} \approx 5{,}577$ [km].

c) Gesucht ist der Abstand der Geraden $f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\5\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

und $f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0{,}27\end{pmatrix}$

$F_1 = (-2-t|5-t|5)$ und $F_2 = (0|-2+s|3+0{,}27s)$;

$\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix}2+t\\-7+t+s\\-2+0{,}27s\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{F_1F_2}\circ\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$ und $\overrightarrow{F_1F_2}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\0{,}27\end{pmatrix} = 0$ liefern das LGS

I: $5 - 2t - s = 0$ I: $2t + s = 5$

II: $-7{,}54 + t + 1{,}0279s = 0 \rightarrow$ II: $t + 1{,}0279s = 7{,}54$

Man erhält die Lösung $t \approx -2{,}27$ und $s \approx 9{,}55$ und damit die Punkte $F_1(0{,}27|7{,}27|5)$ und $F_2(0|7{,}55|5{,}58)$.

Damit gilt $d = |\overrightarrow{F_1F_2}| = \left|\begin{pmatrix}-0{,}27\\0{,}28\\0{,}58\end{pmatrix}\right| \approx 5{,}594$ [km].

Im ungünstigsten Fall haben die Flugzeuge einen Abstand von etwas über 5 km.

d) Wegen $\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2}$ gilt nun $f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\5\\5\end{pmatrix} + t\cdot\frac{800}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Wegen $\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0{,}27\end{pmatrix}\right| \approx 1{,}036$ gilt nun

$f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\frac{600}{1{,}036}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0{,}27\end{pmatrix}$.

$d^2(F_1F_2) = \left|\begin{pmatrix}2+565{,}69\cdot t\\-7+1144{,}84\cdot t\\-2+156{,}37\cdot t\end{pmatrix}\right|$

$= (2+565{,}69t)^2 + (-7+1144{,}84t)^2 + (-2+156{,}37t)^2$

Man erhält das Minimum für $t \approx 0{,}0042$ mit einer Entfernung von $\sqrt{25{,}72} \approx 5{,}07$. Die Flugzeuge sind also mindestens 5,07 km voneinander entfernt.

VIII Daten und Wahrscheinlichkeit

Seite 285

Check-in

1

a) $\frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$

b) Die relative Häufigkeit der Nieten beträgt $75\% = \frac{3}{4}$.

Jana hat also $\frac{3\cdot12}{4} = 9$ Nieten gezogen, die absolute Häufigkeit ist 9.

2

Insgesamt wurden 2500 + 3500 + 4000 = 10000 Stimmen abgegeben.

Anteile: C4U: $\frac{2500}{10000} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$;

SAD: $\frac{3500}{10000} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20} = 0{,}35 = 35\,\%$;

G2H: $\frac{4000}{10000} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\,\%$

3

Die Reihe besteht aus acht Zahlen. Der arithmetische Mittelwert ist daher $\frac{1}{8} \cdot (2{,}5 + 6{,}3 + 1{,}9 + 10{,}0 + 2{,}8 + 5{,}6 + 5{,}1 + 7{,}8) = 5{,}25$.

4

Um die Wahrscheinlichkeiten zu schätzen, bildet man zunächst die relativen Häufigkeiten.

Augenzahl	1	2	3	4	5
relative Häufigkeit	0,347	0,123	0,097	0,113	0,32
Wahrscheinlichkeit	0,33	0,11	0,11	0,12	0,33

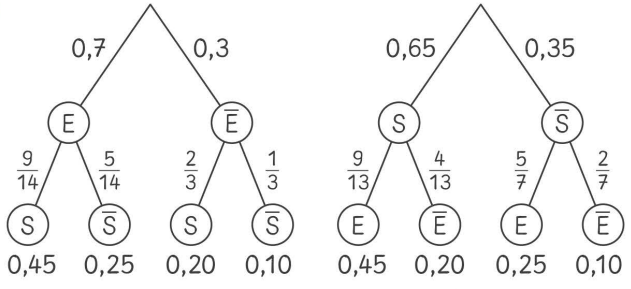
Für die Augenzahlen 1 und 5 bzw. 2 und 3 werden wegen der Symmetrie des „Würfels" jeweils gleiche Wahrscheinlichkeiten festgelegt, die sich etwa als Mittelwerte der relativen Häufigkeiten ergeben. Die Wahrscheinlichkeit für 4 ergibt sich dann, weil die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss.

5

a)

	S	$\overline{S}$	
E	450	250	**700**
$\overline{E}$	**200**	100	**300**
	650	**350**	1000

b)



Im linken Baumdiagramm wird zunächst erfasst, ob der Schüler oder die Schülerin Englisch mag, im rechten Baumdiagramm wird zuerst die Stufe erfasst. Am Ende ergeben sich jeweils die gleichen Wahrscheinlichkeiten.

c) (1) $P(E) = 0{,}7 = 70\,\%$ (2) $P(S) = 0{,}65 = 65\,\%$

(3) $P(\overline{S} \text{ und } E) = 0{,}25 = 25\,\%$

Seite 291

7

a) (1) Wenn man auf die Zahlen achtet, ist $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Ergebnis	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1

(2) Wenn man auf die Farben achtet, ist $S = \{\text{hellblau, dunkelblau}\}$.

Ergebnis	hellblau	dunkelblau	Summe
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,6	1

b) Vier von den zehn Zahlen sind kleiner als 4. Die zugehörigen Sektoren sind alle gleich groß, daher wird in etwa 40 % der Drehungen eine Zahl vorkommen, die kleiner als 4 ist. 40 % von 250 sind 100, also könnte hundertmal eine Zahl kleiner als 4 vorkommen. Genau 100 solcher Zahlen kommen aber eher selten vor, die Anzahlen streuen um 100.

8

a) Eine passende Ergebnismenge besteht aus $3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 = 26$ Ergebnissen der Form (Frucht 1, Frucht 2, Frucht 3), weil die Birne maximal zweimal gezogen werden kann. Die „Frucht x" kann jeweils Orange (O), Apfel (A) oder Birne (B) sein. Die vollständige Ergebnismenge könnte man durch ein Baumdiagramm ermitteln oder formal durch die Menge $S = \{(X, Y, Z) \mid X, Y, Z \in \{A; B; O\}\} \setminus \{(B, B, B)\}$ beschreiben.

b) $E = \{(A, A, A)\}$; $P(E) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{1}{11} \approx 9{,}1\,\%$

$F = \{(B, B, A); (B, A, B); (A, B, B)\}$;

$P(F) = 3 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3}{110} \approx 2{,}7\,\%$

$G = \{(A, B, O); (A, O, B); (B, A, O); (B, O, A); (O, A, B); (O, B, A)\}$;

$P(G) = 6 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{12}{55} \approx 21{,}8\,\%$

Seite 292

13

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{61}{252} \approx 24{,}2\,\%$

b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{179}{252} \approx 71{,}0\,\%$

c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{126} \approx 10{,}3\,\%$

G **15**

a) $\frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\,\%$

b) $0{,}7 = \frac{7}{10} = 70\,\%$

c) $15\,\% = 0{,}15 = \frac{3}{20}$

d) $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} = 66{,}\overline{6}\,\%$

e) $0{,}425 = \frac{17}{40} = 42{,}5\,\%$

f) $1{,}5\,\% = 0{,}015 = \frac{3}{200}$

g) $\frac{1}{50} = 0{,}02 = 2\,\%$

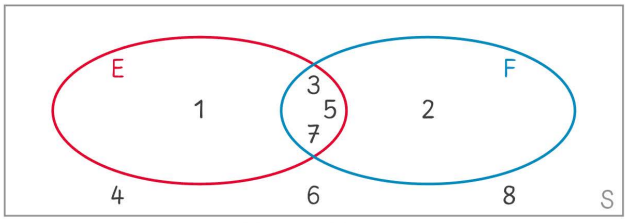
h) $0{,}\overline{7} = \frac{7}{9} = 77{,}\overline{7}\,\%$

i) $\frac{1}{2}\,\% = 0{,}005 = \frac{1}{200}$

Seite 295

5

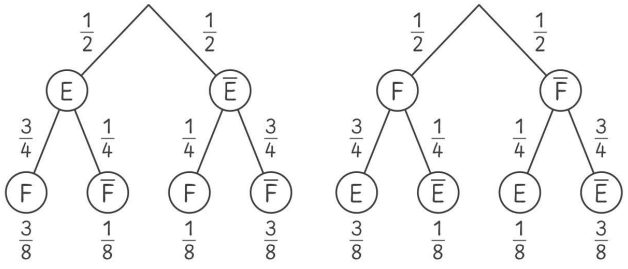
a) Mengendiagramm mit $S = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$, $E = (1, 3, 5, 7)$, $F = \{2, 3, 5, 7\}$



b) $E \cup F = \{1, 2, 3, 5, 7\}$; $E \cap \overline{F} = \{1\}$; $\overline{E} = \{2, 4, 6, 8\}$; $E \setminus F = \{1\}$

c)

	E	$\overline{E}$	
F	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{F}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1



d) $P(E \cup F) = \frac{5}{8}$; $P(E \cap \overline{F}) = \frac{1}{8}$; $P(\overline{E}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $P(E \setminus F) = \frac{1}{8}$

Seite 296

11

$E = \{ZZ, ZW\}$ und $F = \{ZW, WW\}$

a) $E \cup F = \{ZZ, ZW, WW\}$; $E \cap F = \{ZW\}$; $E \setminus F = \{ZZ\}$; $\overline{E} \cap \overline{F} = \{WZ\}$

b) $A = \{ZZ\} = E \cap \overline{F}$; $B = \{ZZ, ZW, WZ\} = E \cup \overline{F}$

G **14**

a) $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ **b)** $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ **c)** $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$

d) $\frac{3}{8} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ **e)** $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$ **f)** $\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

g) $\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right) : \frac{1}{5} = \frac{5}{2}$ **h)** $\frac{1}{5} : \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right) = \frac{2}{5}$

Seite 299

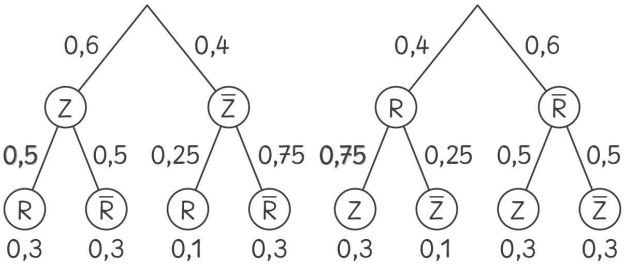
6

a)

	Z	$\overline{Z}$	
R	30 %	**10 %**	30 %
$\overline{R}$	**30 %**	30 %	**60 %**
	60 %	**40 %**	**100 %**

b) Die Wahrscheinlichkeiten $P_R(Z) = \frac{30\,\%}{40\,\%} = \frac{3}{4} = 75\,\%$ und $P_Z(R) = \frac{30\,\%}{60\,\%} = \frac{1}{2} = 50\,\%$ sind verschieden: Die Ereignisse Z und R dürfen folglich nicht vertauscht werden.
Außerdem gilt $P_R(Z) \neq P(Z)$ und $P_Z(R) \neq P(R)$, folglich sind die Ereignisse R und Z nicht stochastisch unabhängig.

c) Je nachdem, ob man das Merkmal Z, oder das Merkmal R zuerst betrachtet, erhält man zwei zugehörige Baumdiagramme.



Im linken Baumdiagramm ist $P_Z(R) = 0{,}5$ ganz links auf der zweiten Stufe zu finden.
Im rechten Baumdiagramm ist $P_R(Z) = 0{,}75$ ganz links auf der zweiten Stufe zu finden.

7

a) Insgesamt sind es 21 Kugeln, 12 rote und 9 blaue. Daraus erhält man $P(E) = \frac{1}{2}$, $P(F) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$, $P(E \cap F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}$.
Also sind E und F stochastisch unabhängig.

b) Für die Ereignisse $\overline{E}$ und $\overline{F}$ ergeben sich $P(\overline{E}) = \frac{1}{2}$, $P(\overline{F}) = \frac{4}{7}$ und $P(\overline{E} \cap \overline{F}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}$. Sie sind stochastisch unabhängig.

Seite 300

11

a) Es sei E: „Einheimisch sein“ und F: „Zum THG gehen“.
$P(E) = \frac{420}{1050}$, $P(F) = \frac{600}{1050}$, $P(E \cap F) = \frac{240}{1050} = \frac{8}{35}$, $P(E) \cdot P(F) = \frac{8}{35}$
Also sind E und F stochastisch unabhängig. Das sieht man auch daran, dass der Anteil der einheimischen THG-Schüler bei den Einheimischen ebenso groß ist wie der Anteil aller THG-Schüler bei allen Schülern. Man kann sogar rechnerisch das eine in das andere überführen:

$$P(E) \cdot P(F) = P(E \cap F) \Leftrightarrow \frac{420}{1050} \cdot \frac{600}{1050} = \frac{240}{1050}$$
$$\Leftrightarrow 420 \cdot \frac{600}{1050} = 240$$
$$\Leftrightarrow \frac{600}{1050} = \frac{240}{420},$$

und das bedeutet gerade, dass der Anteil der einheimischen THG-Schüler bei den Einheimischen ebenso groß ist wie der Anteil aller THG-Schüler bei allen Schülern.

b) Wenn nur ein Schüler das THG verlässt, gilt $P(E) \cdot P(F) = P(E \cap F)$ schon nicht mehr, die „Verhältnisse" sind dann leicht verändert. Bei realen Zahlen wird man es allerdings selten haben, dass $P(E) \cdot P(F) = P(E \cap F)$ genau erfüllt ist. Ist die Beziehung näherungsweise erfüllt, kann man von „statistischer" Unabhängigkeit sprechen.

G **15**

a) $\frac{1}{8} + 0{,}5 = \frac{5}{8}$ **b)** $0{,}35 - \frac{3}{5} = -0{,}25$ **c)** $\frac{5}{6} \cdot 0{,}1 = \frac{1}{12}$

d) $\frac{3}{8} : 37{,}5 = 0{,}01$ **e)** $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot 0{,}2 = \frac{1}{3}$ **f)** $\left(1{,}6 - \frac{1}{6}\right) \cdot 6 = 8{,}6$

g) $\left(\frac{1}{5} + 1{,}5\right) : 5 = 0{,}34$

Seite 303

4

a) individuelle Lösung, zum Beispiel:
Man verwendet eine Urne mit 10 Kugeln, von denen eine rot und die anderen neun nicht rot sind. Bei 20 Ziehungen mit Zurücklegen wird ein Wert nahe 18 Treffern (nicht rote Kugeln) herauskommen. Die relative Häufigkeit liegt bei 0,9.

b) Eine Simulation für $n = 200$ ergibt wieder Werte um 0,9, aber diese Werte streuen deutlich weniger als in Teilaufgabe a).

Seite 304

11

Simulation: individuelle Lösung, zum Beispiel:
In einer Urne liegen vier Kugeln mit den Zahlen 1 bis 4. Man zieht n-mal vier Kugeln mit Zurücklegen aus dieser Urne und prüft jeweils, ob zwei gleiche Zahlen dabei sind. Falls nicht, erhöht man einen Zähler z, der anfangs auf 0 steht, um 1. Am Ende gibt man $\frac{z}{n}$ als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit an.
exakte Wahrscheinlichkeit: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3}{32} \approx 0{,}094$
Bei 100 Wiederholungen schwankt das Ergebnis um 0,09. Die relative Häufigkeit ist also eine gute Näherung für die berechnete Wahrscheinlichkeit.
Je mehr Ziehungen man macht, umso weniger schwankt das Ergebnis um die Wahrscheinlichkeit.

G **14**

a) $\frac{1}{4} = 25\,\%$ **b)** $0{,}35 = 35\,\%$

c) $\frac{5}{8} = 62{,}5\,\%$ **d)** $0{,}375 = 37{,}5\,\%$

e) $\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\,\%$ **f)** $1{,}6 = 160\,\%$

g) $\frac{2}{500} = 0{,}4\,\%$ **h)** $\frac{0{,}001}{0{,}5} = \frac{1}{500} = 0{,}2\,\%$

i) $\frac{0{,}1}{\frac{2}{25}} = 125\,\%$

Seite 308

6

Mittelwert: $\bar{x} = 8$
empirische Varianz: $v = 6$
empirische Standardabweichung: $s = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

7

a) $\bar{x} = 1 \cdot 0{,}75 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}05 = 1{,}35$

$s = \sqrt{(1 - 1{,}35)^2 \cdot 0{,}75 + (2 - 1{,}35)^2 \cdot 0{,}2 + (4 - 1{,}35)^2 \cdot 0{,}05}$

$= \sqrt{0{,}5275} \approx 0{,}73$

b) Bei dem Spiel gewinnt man auf lange Sicht etwa 1,35 €. Die Gewinne streuen vorwiegend im Bereich 1,35 € ± 0,73 €.
Man wird also häufiger 1 € oder 2 € gewinnen, seltener 4 €.

Seite 309

13

a) Man erzeugt 200 Zufallszahlen (zwischen 0 und 1). Dann zählt man, wie viele dieser Zahlen kleiner als 0,9 sind. Das ergibt die Anzahl der mitfliegenden Gäste. Sie schwankt um 180.

b) Eine Simulation von 25 Flügen mit einem MMS ergab die Liste {181, 179, 173, 178, 181, 183, 182, 186, 187, 185, 182, 180, 184, 174, 185, 174, 177, 173, 183, 181, 178, 178, 178, 184, 179} mit dem Mittelwert $\bar{x} = 180{,}2$ und der empirischen Standardabweichung $s = 3{,}96$.

c) Etwa 68 % der Fluggastzahlen liegen im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s] = [177; 184]$ (nach innen gerundet). Vier Zahlen sind kleiner als 177, das machen etwa $32\,\% : 2 = 16\,\%$ aus, vier Zahlen sind größer als 184, das sind ebenso 16 %.
184 oder weniger Fluggäste kommen also in etwa 84 % der Flüge. Wenn das Flugzeug 190 Sitze bietet, dürfte das Angebot fast immer ausreichen.

G **16**

a) (1) $\frac{1}{100}$ (2) $\frac{19}{100}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{19}{20}$

b) (1) $0{,}2 \cdot 3{,}2 = 0{,}64$ (2) $0{,}005 \cdot 3{,}2 = 0{,}016$
(3) $0{,}0025 \cdot 7000 = 17{,}5$

Seite 312

4

a) $\mu = 4{,}15$; $\sigma \approx 2{,}59$; $V(x) = 6{,}7275$

b) Man kann erwarten, dass die relativen Häufigkeiten um die Wahrscheinlichkeiten und die empirischen Kenngrößen um die Kenngrößen des Modells schwanken. Die Wahrscheinlichkeiten und die Modell-Kenngrößen sind dabei fest, die relativen Häufigkeiten und die empirischen Kenngrößen variieren, aber sie befinden sich nahe bei den Werten des Modells. Diese Aussage gilt stets für

Simulationen mit einem großen Stichprobenumfang n. Für n = 5, 10 oder 20 können die Abweichungen vom Modell hingegen erheblich sein.

Seite 313

8

a) Den Wertebereich der Zufallsgröße und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten ermittelt man zum Beispiel mithilfe eines zweistufigen Baumdiagramms.
X: Geldwert der gezogenen Münzen (in Euro)
Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

k	1	1,5	2	2,5	3	4
P(X = k)	22 %	20 %	$3\frac{1}{3}$ %	32 %	$13\frac{1}{3}$ %	$9\frac{1}{3}$ %

$m = \mu = 2{,}16$

b) $\sigma = 0{,}91$
Die Standardabweichung von X ist eine Modellgröße, die bei der häufigen Wiederholung eine Prognose für die empirische Standardabweichung der Versuchsergebnisse liefert. Die empirischen Standardabweichungen schwanken um die Standardabweichung des Modells.

c) individuelle Lösung, zum Beispiel:
- die Anzahl der 50-ct-Münzen
- das Produkt der gezogenen Geldwerte
- die Differenz des ersten und des letzten gezogenen Geldwertes

G **11**

Grundwert	500	800	5000	**6400**
Prozentsatz	3 %	6 %	**5 %**	5 %
Prozentwert	15	**48**	250	320

individuelle Lösung, zum Beispiel:
Prozenzwert berechnen:
6 % von 800: $\frac{6}{100} \cdot 800 = 6 \cdot \frac{800}{100} = 6 \cdot 8 = 48$
Prozenzsatz berechnen:
$\text{Prozentsatz} = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}} = \frac{250}{5000} = \frac{250}{50} \cdot \frac{1}{100} = 5 \cdot \frac{1}{100} = 5\,\%$
Grundwert berechnen:
5 % von G: $\frac{5}{100} \cdot G = 320 \Rightarrow G = \frac{320}{\frac{5}{100}} = 320 \cdot \frac{100}{5} = 320 \cdot 20 = 6400$
Alternativ können die Ergebnisse auch mithilfe der Dreisatz-Rechnung berechnet werden, d.h., es wird zunächst der zugehörige Wert zu 1 % ermittelt.
1 % vom Grundwert 800 beträgt 8. Beträgt der Prozentwert 6 %, so rechnet man $8 \cdot 6 = 48$.
1 % vom Grundwert 5000 beträgt 50. Die Rechnung $250 : 50 = 5$ ergibt den Prozentsatz 5 %.
1 % vom Prozentwert berechnet man mit $320 : 5 = 64$. Für den Grundwert berechnet man $100 \cdot 64$ und erhält 6400.

Seite 314

Klausurtraining

1

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten ergibt $\frac{83}{80} > 1$. Also stellt die Tabelle keine Wahrscheinlichkeitsverteilung dar.

2

$P(A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 40\,\%$;
$P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 60\,\%$.

3

Als Ergebnismenge geht man von der Menge S mit 16 Elementen der Form (a, b) aus, bei der a und b die Werte 1, 2, 4, 8 annehmen können: $S = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 2, 4, 8\}\}$.
Das gefragte Ereignis kann man als Vereinigungsmenge $E \cup F$ darstellen, wobei

a) E: „Beim ersten Drehen erscheint mindestens 4."
$E = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4), (4, 8), (8, 1), (8, 2), (8, 4), (8, 8)\}$
F: „Beim zweiten Drehen erscheint höchstens 2."
$F = \{(1, 1), (2, 1), (4, 1), (8, 1), (1, 2), (2, 2), (4, 2), (8, 2)\}$
$E \cup F = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (4, 8), (8, 1), (8,2), (8,4), (8,8)\}$
$P(E \cup F) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 75\,\%$

b) E = „Beim ersten Drehen erscheint höchstens 2."
$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 8), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 8)\}$
F: „Die Summe der Zahlen beträgt höchstens 4."
$F = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
$E \cup F = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 4), (1, 8), (2, 4), (2, 8)\}$
$P(E \cup F) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 50\,\%$
Alternative Lösung: Weil F eine Teilmenge von E ist, gilt $E \cup F = E$ und somit $P(E \cup F) = P(E) = 50\,\%$.

4

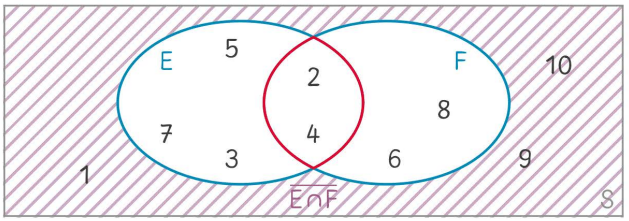
$\frac{43}{49} \cdot \frac{42}{48} = \frac{43}{56} \approx 0{,}77$
Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste und zweite Kugel nicht Valentins Zahlen tragen, ist etwa 77 %.

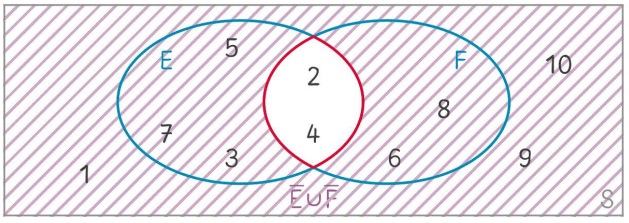
5

a) $E = \{2, 3, 4, 5, 7\}$; $F = \{2, 4, 6, 8\}$ und
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

b) $E \cap F = \{2, 4\}$

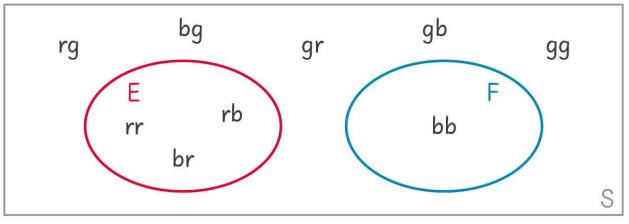
c)





6

a) Als Ergebnismenge wird $S = \{rr, rb, rg, br, bb, bg, gr, gb, gg\}$ verwendet, wobei r für den roten, b für den blauen und g für den grünen Sektor steht.



b) $P(b) = \frac{3}{8}$; $P(g) = \frac{1}{8}$; $P(r) = \frac{1}{2}$

e	rr	rb	rg	br	bb	bg	gr	gb	gg
P(e)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$

(1) $P(E \cap F) = 0$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zweimal blau erscheint und dass man höchstens 4 € erhält. Das Ereignis $E \cap F$ ist das „unmögliche" Ereignis.

(2) $P(E \cap \overline{F}) = P(E) = \frac{5}{8}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht zweimal blau erscheint und man höchstens 4 € erhält.

(3) $P(\overline{E \cap F}) = P(S) = 1$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 1 € ausgezahlt wird. Das Ereignis $\overline{E} \cap \overline{F}$ ist das „sichere" Ereignis.

(4) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{49}{64}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zweimal blau erscheint oder dass man höchstens 4 € erhält.

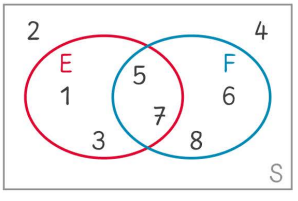
(5) $P(E \setminus F) = P(E) = \frac{5}{8}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht zweimal blau erscheint und man höchstens 4 € erhält.

7

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $E = \{1, 3, 5, 7\}$; $F = \{5, 6, 7, 8\}$

a)

	E	$\overline{E}$	
F	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{F}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1



b) $P(E) = \frac{1}{2}$; $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$; $P(\overline{E} \cap \overline{F}) = \frac{1}{4}$; $P(\overline{E}) = \frac{1}{2}$

c) $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$ und $P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, also sind E und F stochastisch unabhängig.

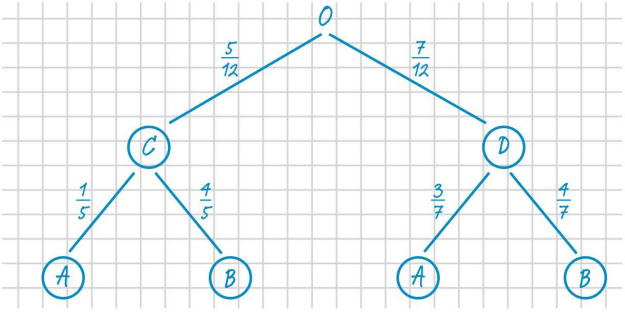
8

a) $B = \overline{A}$ (Vater ist nicht Linkshänder);
$D = \overline{C}$ (Tochter ist nicht Linkshänderin)

b)

	A (Vater Linkshänder)	B (Vater nicht Linkshänder)	
C (Tochter Linkshänderin)	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$
D (Tochter nicht Linkshänderin)	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{7}{12}$
	$\frac{4}{12}$	$\frac{8}{12}$	

c)



d) $P_A(C) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{4}{12}} = \frac{1}{4}$: Die Tochter eines Vaters, der Linkshänder ist, ist mit 25 % Wahrscheinlichkeit auch Linkshänderin.

$P_C(A) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}$: Die Tochter, die Linkshänderin ist, hat mit 20 % Wahrscheinlichkeit einen Linkshänder als Vater.

e) $P(A \cap D) = \frac{3}{12}$, $P(A) \cdot P(D) = \frac{4}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{36}$

A und D sind nicht stochastisch unabhängig.

Seite 315

9

a) Die Anzahl liegt vorwiegend im Bereich um 18.

b) Mittelwert: $\bar{x} \approx 18$
empirische Standardabweichung: $\sigma \approx 1{,}3$
Bei Wiederholungen schwanken die Ergebnisse um diese Werte.

10

a) Man bestimmt eine Liste von 50 Würfen und zählt die relative Häufigkeit der Sechsen.
Mittelwert: $\bar{x} \approx 0{,}16$; Standardabweichung: $\sigma \approx 0{,}053$.

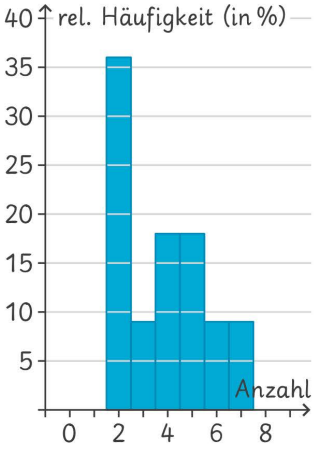
b) Man geht vor wie in Teilaufgabe a) mit $n = 200$.
Mittelwert: $\bar{x} \approx 0{,}16$; Standardabweichung: $\sigma \approx 0{,}026$
Man erkennt, dass die Schwankungen bei vierfacher Versuchszahl nur noch etwa halb so groß sind. $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\text{-Gesetz}\right)$.

11

Werte gerundet

a)

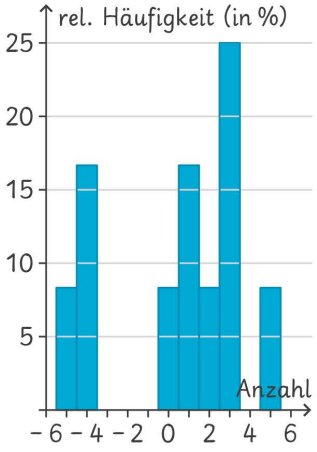
Merkmals-ausprägung	relative Häufigkeit
2	36,36 %
3	9,09 %
4	18,18 %
5	18,18 %
6	9,09 %
7	9,09 %



Arithmetisches Mittel: 3,82
Empirische Varianz: 2,88
Empirische Standard-abweichung: 1,70

b)

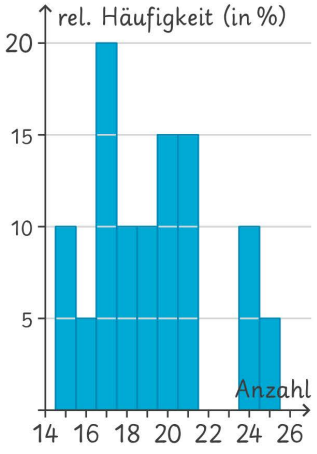
Merkmals-ausprägung	relative Häufigkeit
−5	8,33 %
−4	16,67 %
0	8,33 %
1	16,67 %
2	8,33 %
3	25 %
5	16,67 %



Arithmetisches Mittel: 0,83
Empirische Varianz: 10,97
Empirische Standard-abweichung: 3,31

c)

Merkmals-ausprägung	relative Häufigkeit
15	10 %
16	5 %
17	20 %
18	10 %
19	10 %
20	15 %
21	15 %
24	10 %
25	5 %



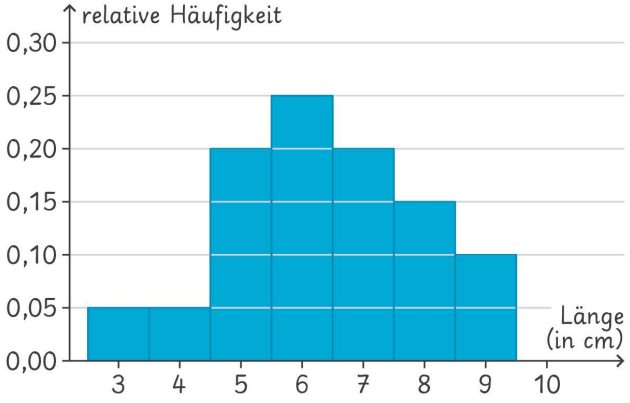
Arithmetisches Mittel: 19,2
Empirische Varianz: 7,95
Empirische Standard-abweichung: 2,82

12

a) Mittelwert: $\bar{x} = 6{,}35\,\text{cm}$; empirische Varianz: $v = 2{,}4275\,\text{cm}^2$; empirische Standardabweichung: $s \approx 1{,}558\,\text{cm}$

b) Die empirische Varianz hat die Einheit cm^2, daher ist sie als Streumaß nicht geeignet. Sie dient bei Berechnungen als Hilfsmittel. Die Standardabweichung ist sehr nützlich, da bei vielen Verteilungen etwa 68 % der Werte im Intervall $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ liegen, siehe Teilaufgabe c).

c)



d) Die Verteilung verläuft nur für $x \geq 6$ glockenförmig. Im Bereich $[\bar{x} - s; \bar{x} + s] = [5; 7]$ (nach innen gerundet) liegen 65 % der Werte. Die 68 %-Regel ist näherungsweise erfüllt.

13

a) $\mu = \frac{5}{6}$; $\sigma = \sqrt{\frac{1625}{36}} \approx 6{,}72$

b) Drei Kugeln der Urne sind zum Beispiel beschriftet mit „−10“, zwei Kugeln tragen die „0“, sechs Kugeln tragen die „5“, und eine Kugel ist mit „10“ beschriftet. Auf diese Weise entsprechen die relativen Häufigkeiten der Werte auf den Kugeln den gegebenen Wahrscheinlichkeiten.
Daher verwendet man als Ziehungsliste
$L = \{-10, -10, -10, 0, 0, 5, 5, 5, 5, 5, 10\}$.
Eine Simulation mit $n = 20$ Ziehungen ergab z. B. die Urliste $\{5, -10, 0, 10, 10, 0, 0, 5, 5, -10, 5, 5, -10, 10, 5, 5, -10, 5, -10, 5\}$ mit dem Mittelwert $\bar{x} = 1{,}25$ und der empirischen Standardabweichung $s \approx 7{,}05$. Die Werte liegen in der Nähe der Modellwerte, streuen bei nur $n = 20$ Wiederholungen der Simulation aber noch sehr stark. Bei mehr Ziehungen, z. B. $n = 100$, erhält man Werte nahe der Modellwerte, die nicht so stark streuen.

14

a) Die Werte der Zufallsgröße X (Gewinn in Cent) bestimmt man, indem man von den ausgezahlten Werten (auf den Kugeln) 20 Cent Einsatz subtrahiert. Damit ergibt sich für X die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

g	−20	−10	0	30
P(X = g)	0,38	0,39	0,08	0,15

b) $\mu = -20 \cdot 0{,}38 - 10 \cdot 0{,}39 + 0 \cdot 0{,}08 + 30 \cdot 0{,}15 = -7$
Der Erwartungswert beträgt −7 Cent.
$\sigma^2 = (-20 + 7)^2 \cdot 0{,}38 + (-10 + 7)^2 \cdot 0{,}39 + (0 + 7)^2 \cdot 0{,}08 + (30 + 7)^2 \cdot 0{,}15 = 277$; also $\sigma \approx 16{,}64$.

c) Der Erwartungswert muss dazu 0 sein, also muss man 13 Cent Einsatz nehmen.

Seite 316

15

Man berechnet die Wahrscheinlichkeit, mit der das „Indiz" TNTT bei den beiden Alternativen zu erwarten wäre, als erste Zeile einer Vierfeldertafel.

	p = 0,3	p = 0,7	Summe
TNTT	0,0189	0,1029	0,1218
	15,5 %	84,5 %	100 %

Dann bestimmt man die Wahrscheinlichkeit, mit der das Indiz von der zweiten Alternative stammt, mit $\frac{0{,}1029}{0{,}1218} \approx 84{,}5\,\%$.

16

a) $E = \{(1; 1), (2; 1), (1; 2)\}$

b) F: „Der zweite Zug liefert eine ‚1'."
$\overline{E}$: „Die Augensumme liegt über 3."

c) $P(E) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{9}$

$P(F) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

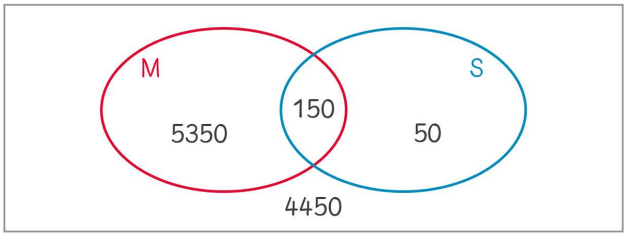
Alternative Berechnung: Weil Ziehen mit Zurücklegen stattfindet, gilt $P(F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

d) $P(E \cap F) = P(\{(1; 1), (2; 1)\}) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{6} \neq P(E) \cdot P(F)$.
E und F sind nicht stochastisch unabhängig.

17

a) Es werden z. B. 10 000 Fahrgäste zugrunde gelegt. Damit erhält man die folgende Tabelle.

	Männlich (M)	nicht männlich ($\overline{M}$)	Gesamt
Ohne Fahrschein (S)	150	50	200
Mit Fahrschein ($\overline{S}$)	5350	4450	9800
Gesamt	5500	4500	10 000



b) $P(\overline{M} \cap \overline{S}) = 0{,}445 = 44{,}5\,\%$

c) $P(M \cup \overline{S}) = 0{,}55 + 0{,}445 = 0{,}995 = 99{,}5\,\%$

18

a) $P(X = k) = \frac{1}{6}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq 6$

$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$; $\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{6} (3{,}5 - k)^2 \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}71$

b) Man erhält beispielsweise (gerundet auf 2 Dezimalstellen)
- für n = 25: $\bar{x} = 3{,}54$; $s = 0{,}37$
- für n = 100: $\bar{x} = 3{,}48$; $s = 0{,}17$
- für n = 400: $\bar{x} = 3{,}51$; $s = 0{,}085$

Bei Wiederholungen ergeben sich ähnliche Ergebnisse. Man erkennt, dass die Mittelwerte um den Erwartungswert von X schwanken und dass die empirischen Standardabweichungen mit wachsendem n abnehmen.

Genauer gilt $s \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Da man die Augensumme von n Würfen durch n teilt, erhält man jeweils näherungsweise den Erwartungswert von X. Bei den Standardabweichungen kann man die abnehmenden Schwankungen durch das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz erklären.

19

a) individuelle Lösungen, zum Beispiel:
(1) $A = E \cap F \cap G$ (2) $B = E \setminus (F \cap G)$
(3) $C = (E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$

b) (1) $E \cup F = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$
(2) $E \cap (F \cup G) = \{4, 6, 7\}$
(3) $E \setminus (F \cup G) = \{1\}$

20

a) Die Aussage ist wahr. Begründung: Bei der Berechnung des Mittelwerts kommt $\frac{8}{8} = 1$ hinzu.

b) Die Aussage ist wahr. Begründung: Das arithmetische Mittel wird auch um zwei erhöht.

Für $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} x_i$ gilt:

$\bar{x}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} x_i^* = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} (x_i + 2) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} 2 = \bar{x} + 2$

Bei der Berechnung der Standardabweichung wird dann von den jeweils um 2 höheren Werten jeweils auch 2 mehr subtrahiert.

Für $\sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ gilt:

$\sigma^* = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} (x_i^* - \bar{x}^*)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} ((x_i + 2) - (\bar{x} + 2))^2 \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sigma$

c) Die Aussage ist falsch. Begründung: Die Liste $\{2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1\}$ hat zum Beispiel eine positive Standardabweichung ($\sigma \approx 0{,}33$), weil die Zahlen vom arithmetischen Mittel ($\bar{x} = 1{,}875$) abweichen. Die Liste $\{2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$ mit dem verdoppelten Wert am Listenende hat die Standardabweichung 0, weil alle Werte gleich dem arithmetischen Mittel $\bar{x} = 2$ sind.

d) Die Aussage ist falsch. Begründung: Zur Liste $\{4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2\}$ gehört zum Beispiel die doppelte Standardabweichung im Vergleich zur Standardabweichung der Liste $\{2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1\}$.

Seite 317

21

a) $\sum_{i=1}^{9}(i^3) = 2025$

b) Die gesuchte Zahl n ermittelt man durch systematische Berechnung der Summen für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und erhält schließlich für $n = 20$ die Jahreszahl 2030.

c) $\mu = \sum_{i=1}^{10} i \cdot p_i$; $V(X) = \sum_{i=1}^{10}(i-\mu)^2 \cdot p_i$; $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{10}(i-\mu)^2 \cdot p_i}$

22

a) individuelle Lösung

b) Mit Wahrscheinlichkeiten sagt man relative Häufigkeiten auf lange Sicht voraus. Wahrscheinlichkeiten liegen also zeitlich gesehen vor den nächsten Versuchen. Das ist der in der Tabelle notierte Zusammenhang. Andererseits gehen in Fällen, in denen man Wahrscheinlichkeiten schätzen muss, die Erfahrungen vergangener Versuchsserien mit ein. Unter diesem Aspekt ist auch Tinas Position gerechtfertigt.

23

Für die Ereignisse E: „Der Säugling ist erkrankt." und D: „Die Diagnose ist positiv." gilt:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Säugling erkrankt ist, beträgt $P(E) = \frac{100}{1\,100\,000} = \frac{1}{11\,000} \approx 9{,}09 \cdot 10^{-5}$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Säugling nicht erkrankt ist, beträgt $P(\overline{E}) = 1 - \frac{100}{1\,100\,000} \approx 0{,}999\,91$.

Weil in $100\,\% - 0{,}01\,\% = 99{,}99\,\% = P_E(D)$ aller Fälle eine vorliegende Erkrankung entdeckt wird, ergibt sich eine positive Diagnose bei einem erkrankten Säugling mit der Wahrscheinlichkeit $P(E \cap D) = P(E) \cdot P_E(D) = 9{,}09 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}9999 = 9{,}09 \cdot 10^{-5}$.

Weil in $P_{\overline{E}}(D) = 0{,}1\,\%$ aller Fälle irrtümlich eine Erkrankung diagnostiziert wird, ergibt sich eine positive Diagnose bei einem nicht erkrankten Säugling mit der Wahrscheinlichkeit $P(\overline{E} \cap D) = P(\overline{E}) \cdot P_{\overline{E}}(D) = 0{,}999\,91 \cdot 0{,}001 = 9{,}9991 \cdot 10^{-4}$.

Daher beträgt insgesamt die Wahrscheinlichkeit, dass eine positve Diagnose gestellt wird,

$P(D) = P(E \cap D) + P(\overline{E} \cap D) = 9{,}09 \cdot 10^{-5} + 9{,}9991 \cdot 10^{-4}$
$= 1{,}090\,81 \cdot 10^{-3}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein als krank diagnostizierter Säugling die Stoffwechselkrankheit tatsächlich hat, beträgt somit $\frac{P(E)}{P(D)} = \frac{9{,}09 \cdot 10^{-5}}{1{,}090\,81 \cdot 10^{-3}} \approx 0{,}083 = 8{,}3\,\%$.

Eine sehr seltene Krankheit ist also auch mit einem Untersuchungsverfahren, das scheinbar eine geringe Fehlerquote hat, nur mit großer Unsicherheit zu diagnostizieren.

Man kann auch eine Vierfeldertafel wie unten zur Lösung verwenden, bei der man mit absoluten Säuglingszahlen rechnet. Allerdings treten dabei auch „Bruchteile" von Säuglingszahlen auf. Die gegebenen Daten sind dann leichter zu erkennen, hier kursiv gesetzt.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich als Anteil

$\frac{\text{Erkrankte mit positiver Diagnose}}{\text{Säuglinge mit positiver Diagnose}} = \frac{99{,}99}{1199{,}89} = 8{,}3\,\%$.

	Diagnose positiv	Diagnose negativ	Summe
erkrankt	99,99	*0,01*	*100*
nicht erkrankt	1099,9	1 098 800,1	1 099 900
Summe	1199,891	1 098 800,11	*1 100 000*

24

a) Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	0	1	2	3	4
P(X = x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Erwartungswert $\mu = 2$
Varianz $V(X) = 1$
Standardabweichung $\sigma = 1$

b) $P(X \leq 2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{11}{16} = 0{,}6875 = 68{,}75\,\%$

$P(X \neq 1) = 1 - P(X = 1) = \frac{3}{4} = 75\,\%$

c) E: „Wappen und Zahl fallen nicht gleich oft."

$E = \{X \in \{0, 1, 3, 4\}\}$;

$P_E(X \geq 2) = \frac{P(\{X \in \{3, 4\}\})}{P(\{X \in \{0, 1, 3, 4\}\})} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{2} = 50\,\%$

d) Mittelwert: $\bar{x} = 1{,}7$
empirische Standardabweichung: $s = 0{,}9$

e) Man erwartet, dass der Mittelwert $\bar{x}$ um den Erwartungswert μ und die empirische Standardabweichung s um die Standardabweichung σ schwanken. Die Modell-Kenngrößen bilden eine Prognose für die empirischen Kenngrößen.

25

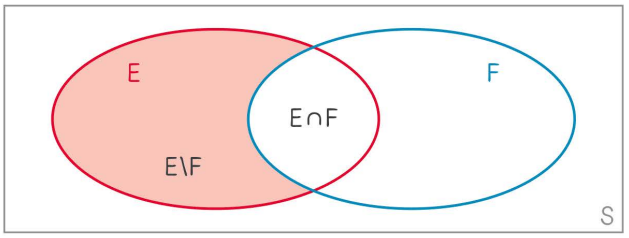
a) Wenn man bei der Analyse der Treffer rein zufällig einen Stoß während verschiedener Frames (Einzelspiele, bis alle Kugeln versenkt sind) auswählt, ist die Annahme sinnvoll. Wenig sinnvoll wäre eine Folge von Stößen, während der Spieler sich in einer einfachen oder sehr schwierigen Spielsituation befindet.

b) $E = \{(0, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 0)\}$
$P(E) = 5 \cdot 0{,}92^4 \cdot 0{,}08 \approx 0{,}287 = 28{,}7\,\%$

c) F: „Ronnie trifft nur beim ersten oder nur beim letzten Stoß nicht oder er trifft immer."
$P(F) = 2 \cdot 0{,}92^4 \cdot 0{,}08 + 0{,}92^5 \approx 0{,}774 = 77{,}4\,\%$; $P(\overline{F}) = 1 - P(F) \approx 0{,}226 = 22{,}6\,\%$

d) G: „Ronnie trifft höchstens viermal."
Alternative Formulierung: G: „Ronnie trifft mindestens einmal nicht."

e)



f) $P(E \cup F) = P(E) + P(F\backslash E) = 5 \cdot 0{,}92^4 \cdot 0{,}08 + 0{,}92^5 \approx 0{,}946$
$= 94{,}6\,\%$

Das ist auch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass Ronnie mindestens viermal trifft.

$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{2 \cdot 0{,}92^4 \cdot 0{,}08}{5 \cdot 0{,}92^4 \cdot 0{,}08} = 0{,}4 = 40\,\%$

Da $P_E(F) \neq P(F)$, sind die Ereignisse E und F nicht stochastisch unabhängig.

g) Die Schnittmenge von $E\backslash F$ und $(E \cup F)$ ist $E\backslash F$, wie man am Mengenbild erkennt. Denn $E\backslash F$ ist eine Teilmenge von $E \cup F$. Die Aussage von Oscar ist folglich falsch.

h) Man erzeugt jeweils fünf gleichverteilte Zufallszahlen aus dem Intervall $[0; 1]$. Jede dieser Zufallszahlen zählt als Treffer, wenn sie kleiner oder gleich als 0,92 ist (entsprechend der Trefferwahrscheinlichkeit). Damit erhält man die Trefferzahl bei einer Serie von 5 Versuchen. Das wiederholt man z. B. hundertmal und sammelt die Trefferzahlen in einer Liste, von der man den Mittelwert und die empirische Standardabweichung berechnet. Diese Werte sind Näherungen für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Trefferzahl.

IX Binomialverteilung

Seite 325

Check-in

1

$\bar{x} = \frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 6}{27} = \frac{80}{27} \approx 2{,}96$

$v = \frac{(1 - 2{,}96)^2 \cdot 3 + (2 - 2{,}96)^2 \cdot 5 + (3 - 2{,}96)^2 \cdot 11 + (4 - 2{,}96)^2 \cdot 6 + (5 - 2{,}96)^2 \cdot 2}{27}$
$\approx 1{,}15;\ s = \sqrt{v} \approx 1{,}07$

2

$P(E_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6};\ P(E_2) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12};\ P(E_3) = \frac{5}{36};\ P(E_4) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18};$
$P(E_5) = \frac{1}{36};\ P(E_6) = 1 - P(E_2) = \frac{7}{12}$

3

Die Ereignisse E_1 und E_2 sind von F unabhängig, wenn gilt $P(E_1 \cap F) = P(E_1) \cdot P(F)$, bzw. $P(E_2 \cap F) = P(E_2) \cdot P(F)$.

$P(F) = \frac{1}{6}$

$P(E_1 \cap F) = \frac{1}{36};\ P(E_1) \cdot P(F) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, also sind die Ereignisse stochastisch unabhängig.

$P(E_2 \cap F) = \frac{5}{36};\ P(E_2) \cdot P(F) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{72} \neq \frac{5}{36}$, also sind die Ereignisse nicht stochastisch unabhängig.

4

$\mu = 0 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 0{,}08 + 2 \cdot 0{,}27 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}1 = 2{,}92$

$\sigma = \sqrt{(0 - 2{,}92)^2 \cdot 0{,}05 + \ldots + (5 - 2{,}92)^2 \cdot 0{,}1} \approx 1{,}32$

5

a) Der Beutel enthält eine Trefferkugel und 5 Nieten, man zieht ohne Zurücklegen.

b) Die Wahrscheinlichkeiten für den richtigen Schlüssel sind:

1. Versuch $\frac{1}{6}$ 2. Versuch $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$

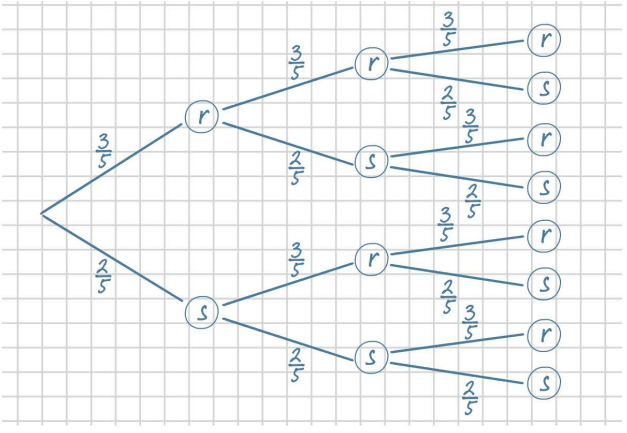
3. Versuch $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ usw.

Man zieht den richtigen Schlüssel beim ersten, zweiten usw. Versuch mit je einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$.
Frankas Aussage ist folglich falsch.
Simulation: individuelle Lösung

Seite 331

7

a) Bei jedem Zug gibt es genau die beiden Ergebnisse „Rot" und „Schwarz". Da die gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird, sind die einzelnen Züge stochastisch unabhängig. Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 3$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}6$.



b) $P(E) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} = 0{,}216$

$P(F) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{125} = 0{,}096$

$P(G) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{117}{125} = 0{,}936$

$P(H) = 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{54}{125} = 0{,}432$

11

Lea: Bernoulli-Kette mit $n = 10$ und $p = 0{,}85$.
X: Anzahl der verwandelten Elfmeter.

$P(A) = P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} \cdot 0{,}85^9 \cdot 0{,}15 + 0{,}85^{10}$

$\approx 0{,}347 + 0{,}197 = 0{,}544$

Tim: Bernoulli-Kette mit $n = 7$ und $p = 0{,}75$.
X: Anzahl der verwandelten Elfmeter.

$P(B) = P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{7}{5} \cdot 0{,}75^5 \cdot 0{,}25^2 + \binom{7}{6} \cdot 0{,}75^6 \cdot 0{,}25$

$\approx 0{,}311 + 0{,}311 = 0{,}622$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B ist größer, also würde man eher darauf wetten, dass Tim gewinnt.

G 13

a) ohne Produktregel: $f'(x) = 7 \cdot x^6$
mit Produktregel: $f'(x) = 2x \cdot x^5 + x^2 \cdot 5x^4 = 7x^6$

b) ohne Produktregel: $f'(x) = 1$
mit Produktregel: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

c) ohne Produktregel: $f'(x) = 0$
mit Produktregel: $f'(x) = 1 \cdot \frac{1}{x} + x \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$

Seite 333

6

Mit der Formel: $\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$

Mit einem digitalen Hilfsmittel: $\binom{15}{8} = 6435$

7

a) $\binom{30}{4} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 27405$

b) $\binom{30}{26} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 26} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 27405$

Seite 334

10

a) Es gibt $\binom{10}{3} = 120$ Möglichkeiten, aus zehn Freundinnen drei auszuwählen. Bei genau einer dieser Möglichkeiten kommen Sarah, Chiara und Lucia mit. Hierfür beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{120} \approx 0{,}008 = 0{,}8\,\%$

b) Nach der Pfadregel gilt: $\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{k!}{n! \cdot (n-k)!} = \frac{1}{\binom{n}{k}}$

Für $k = 1$: $p_1 = \frac{1}{\binom{n}{1}} = \frac{1}{n}$ → Die Formel stimmt.

Für $k = n$: $p_n = \frac{1}{\binom{n}{n}} = 1$ → Die Formel stimmt.

G 12

a) ohne Kettenregel: $f'(x) = 6x^5$
mit Kettenregel: $f'(x) = 3(x^2)^2 \cdot 2x = 3x^4 \cdot 2x = 6x^5$
oder $f'(x) = 2x^3 \cdot 3x^2 = 6x^5$

b) ohne Kettenregel: $g'(x) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$
mit Kettenregel: $g(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$
$g'(x) = \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

c) ohne Kettenregel: $h'(x) = 1$
mit Kettenregel: $h'(x) = e^{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$
oder $h'(x) = \frac{1}{e^x}e^x = 1$

d) ohne Kettenregel: $i'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$
mit Kettenregel: $i'(x) = \frac{1}{4}(x^3)^{-\frac{3}{4}} \cdot 3x^2 = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$
oder $i'(x) = 3\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

Seite 337

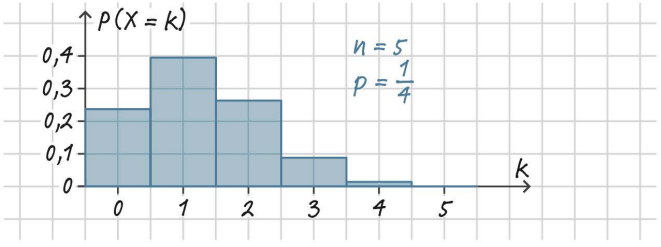
5

$n = 5$, $p = \frac{1}{4}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	0	1	2	3	4	5
$B_{5;\frac{1}{4}}(k)$	≈ 0,237	≈ 0,396	≈ 0,264	≈ 0,088	≈ 0,015	≈ 0,001

Histogramm:



6

X zählt, wie oft die Zahl 3 erscheint. X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{3}$.

$\mu = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$

Auf lange Sicht kann man damit rechnen, dass im Durchschnitt pro Serie ca. 3,33-mal die Zahl 3 erscheint. Der Erwartungswert 3,33 kommt als Trefferanzahl aber nicht vor, da er nicht ganzzahlig ist.

Seite 338

11

Man liest ab:

a) $P(X = 5) \approx 0{,}20$

b) $P(X < 5) \approx 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}11 \approx 0{,}16$

c) $P(X > 5) \approx 0{,}25 + 0{,}21 + 0{,}12 + 0{,}04 + 0{,}01 \approx 0{,}63$

12

a) Die Aussage ist wahr. Begründung: Jede Säule hat die Breite 1 und die Höhen entsprechen den Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$.
Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten beträgt 1.

b) Die Aussage ist falsch. Begründung: Es können auch zwei Säulen gleich hoch sein.

c) Die Aussage ist wahr. Begründung: Bei $n = 1$ und $p = 0{,}5$ gibt es zwei Säulen der Höhe 0,5.

d) Die Aussage ist wahr. Begründung: Die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ sind alle positiv.

e) Die Aussage ist falsch. Begründung: Wenn $p \neq \frac{1}{2}$ ist, so ist das Histogramm nicht symmetrisch zur Geraden $x = \frac{n}{2}$.

G **15**

$v(t) = 1 \cdot t \quad [\text{in } \frac{m}{s}]$

$s(t) = \int_0^t v(x)\,dx = \frac{1}{2}t^2 \quad [\text{in m}]$

$s(20) = \frac{1}{2} \cdot 400 = 200\,[\text{m}]$

$s(t) = \frac{1}{2}t^2 = 1000$, also $t = \sqrt{2000} \approx 44{,}72\,[\text{s}]$

Der Zug hat nach ca. 45 Sekunden eine Strecke von 1000 Metern zurückgelegt.

Seite 341

8

a) $P(X \leq 5) = P([0; 5]) = F_{12;\,0{,}6}(5) \approx 0{,}158$

b) $P(X \geq 8) = P([8; 12]) = 1 - F_{12;\,0{,}6}(7) \approx 0{,}438$

c) $P(X < 10) = P([0; 9]) = F_{12;\,0{,}6}(9) \approx 0{,}917$

d) $P(4 \leq X < 8) = P([4; 7]) = F_{12;\,0{,}6}(7) - F_{12;\,0{,}6}(3) \approx 0{,}547$

9

X zählt, wie oft „Zahl“ fällt.
X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0{,}5$.

a) $P(X \leq 20) \approx 0{,}101$
„Zahl“ fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 10,1 % höchstens 20-mal.

b) $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 0{,}941$
„Zahl“ fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 94,1 % mindestens 20-mal.

c) $P(X < 25) = P(X \leq 24) \approx 0{,}444$
„Zahl“ fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 44,4 % weniger als 25-mal.

d) $P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) \approx 0{,}059$
„Zahl“ fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 5,9 % mehr als 30-mal.

Seite 342

15

X zählt die verwandelten Elfmeter.
X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}75$.

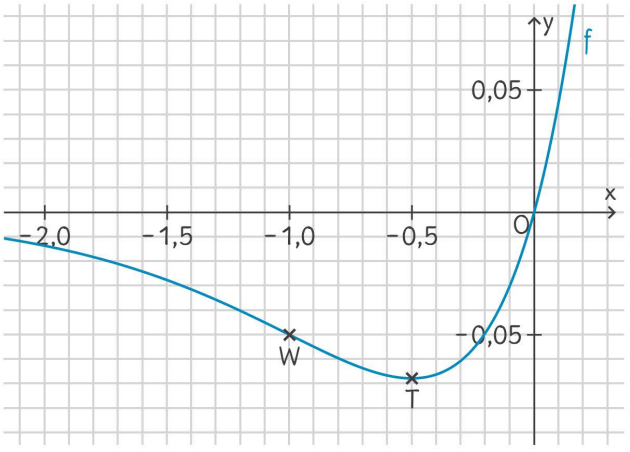
a) $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0{,}633$
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fußballspieler mindestens vier Elfmeter verwandelt, beträgt ca. 63,3 %.

b) E ist das Ereignis: „Der Fußballspieler verwandelt genau zwei Elfmeter in Folge.“
Der Fußballspieler kann die Elfmeter 1 und 2 oder 2 und 3 oder 3 und 4 oder 4 und 5 verwandeln. Also gibt es vier zu E gehörige Ergebnisse. Jedes hat die Wahrscheinlichkeit $0{,}75^2 \cdot 0{,}25^3$.
Also ist $P(E) = 4 \cdot 0{,}75^2 \cdot 0{,}25^3 \approx 0{,}035$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fußballspieler genau zwei Elfmeter in Folge verwandelt, beträgt ca. 3,5 %.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fußballspieler die ersten beiden Elfmeter verwandelt, beträgt $0{,}75^2$.
Von den restlichen drei Elfmetern verwandelt er mit einer Wahrscheinlichkeit von $3 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25^2$ genau einen und mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}25^3$ keinen.
Es ist $0{,}75^2 \cdot (0{,}25^3 + 3 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25^2) \approx 0{,}088$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fußballspieler die ersten beiden Elfmeter und von den restlichen Elfmetern höchstens einen verwandelt, beträgt ca. 8,8 %.

G **18**

a)



b) $f(x) = x \cdot e^{2x-1}$
$f'(x) = e^{2x-1} + x \cdot 2 \cdot e^{2x-1} = e^{2x-1} \cdot (1 + 2x)$
$f''(x) = e^{2x-1} \cdot (4x + 4)$
$f'''(x) = e^{2x-1} \cdot (8x + 12)$
Untersuchung auf Extrempunkte:
$f'(x) = 0 = e^{2x-1} \cdot (1 + 2x) \qquad | e^{2x-1} \neq 0$
$1 + 2x = 0$
$x = -0{,}5$
$f''(-0{,}5) = e^{2 \cdot (-0{,}5) - 1} \cdot (4 \cdot (-0{,}5) + 4) > 0$
An der Stelle $x = -0{,}5$ hat der Graph von f also einen Tiefpunkt.

Bestimmung der y-Koordinate:
$f(-0{,}5) = (-0{,}5) \cdot e^{2 \cdot (-0{,}5) - 1} \approx -0{,}07$
Der Graph von f hat den Tiefpunkt $T(-0{,}5 \mid -0{,}07)$.
Untersuchung auf Wendepunkte:
$f''(x) = 0 = e^{2x-1} \cdot (4 + 4x) \quad \mid e^{2x-1} \neq 0$
$(4 + 4x) = 0$
$x = -1$
$f'''(-1) = e^{2 \cdot (-1) - 1} \cdot (8 \cdot (-1) + 12) = e^{-3} \cdot 4 \neq 0$
An der Stelle $x = -1$ besitzt der Graph von f also einen Wendepunkt. Bestimmung der y-Koordinate:
$f(-1) = (-1) \cdot e^{2(-1) - 1} \approx -0{,}05$
Der Graph von f hat den Wendepunkt $W(-1 \mid -0{,}05)$.

Seite 345

5

a) $\mu = 5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$
$\sigma = \sqrt{5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} \approx 1{,}02$

b) $[\mu - \sigma; \mu + \sigma] \approx [2{,}48; 4{,}52]$
Da X ganzzahlig ist, rundet man „nach innen". Nur die Trefferzahlen 3 und 4 weichen um höchstens σ von μ ab.

c) $P(X = 3 \text{ oder } X = 4) = B_{5;\,0{,}7}(3) + B_{5;\,0{,}7}(4) \approx 0{,}6689$

9

X zählt die Befürworter unter den Befragten.
X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}6$.
Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}6 = 60$
Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{24} \approx 4{,}899$
$\mu - 2\sigma \approx 50{,}202$ und $\mu + 2\sigma \approx 69{,}798$
$P(51 \leq X \leq 69) \approx 0{,}948$
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Befürworter des Baus um höchstens 2σ vom Erwartungswert abweicht, beträgt ca. 94,8 %.

G **12**
Die ersten beiden Zeilen lassen sich jeweils als Geradengleichungen in Parameterform deuten, die dritte Zeile als Ebene in Koordinatenform.
Eine Ebene kann aus zwei Geraden, die nicht zueinander windschief sind, aufgestellt werden. Um zu überprüfen, ob die beiden Geraden sich schneiden (parallel oder identisch sind sie nicht, da die Richtungsvektoren nicht linear abhängig voneinander sind), müssen beide gleichgesetzt werden. Dies liefert den Schnittpunkt $S(3 \mid -1 \mid 2)$.
Bestimmung eines Normalenvektors in S, der zu den beiden Richtungsvektoren der Geraden senkrecht steht, ergibt
$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Einsetzen der Korrdinaten von $\vec{n}$ und eines Punktes der Ebene (hier wurde der Stützvektor der ersten Geraden genommen), ergibt $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 7$ und somit als Koordinatenform für die Ebene $E: 3x + 2y = 7$. Somit ist die Angabe des Geometrieprogramms bestätigt.

Seite 348

6

X zählt, wie viele Schülerinnen und Schüler Spanisch lernen.
X ist binomialverteilt mit dem Parameter $p = 0{,}4$, n ist gesucht.
Es soll $P(X \geq 5) \geq 0{,}9$ gelten.
Es ist $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$. Also muss $P(X \leq 4) \leq 0{,}1$ sein.
Mit dem Rechner erhält man für $n = 17$ den Wert $P(X \leq 4) \approx 0{,}126$ und für $n = 18$ den Wert $P(X \leq 4) \approx 0{,}094$.
Die Gruppe muss mindestens 18 Schülerinnen und Schüler umfassen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens fünf darunter Spanisch lernen.

7

Die Zufallsgröße X zählt, wie viele Treffer auftreten.
X ist binomialverteilt mit $n = 20$, p ist gesucht.
Es soll $P(X \geq 14) \geq 0{,}85$ gelten.
Es ist $P(X \geq 14) = 1 - P(X \leq 13)$. Also muss $P(X \leq 13) \leq 0{,}15$ sein.
Mit dem Rechner erhält man für $p = 0{,}77$ den Wert $P(X \leq 13) \approx 0{,}156$ und für $p = 0{,}78$ den Wert $P(X \leq 13) \approx 0{,}130$.
Um zu entscheiden, ob 0,77 oder 0,78 die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist, testet man den Wert $p = 0{,}775$ in der Mitte.
Dafür gilt $P(X \leq 13) \approx 0{,}143$. Deshalb liegt das gesuchte p zwischen 0,77 und 0,775. Auf zwei Dezimalen gerundet ergibt sich $p \approx 0{,}77$.
Die Wahrscheinlichkeit bei dieser Bernoulli-Kette muss ca. 77 % betragen.

Seite 349

14

a) Die Zufallsgröße X zählt, wie viele Personen, die gebucht haben, auch mitfliegen.
X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}88$, n ist gesucht.
Es soll $P(X > 180) \leq 0{,}07$ gelten. Es ist $P(X > 180) = 1 - P(X \leq 180)$. Also muss $P(X \leq 180) \geq 0{,}93$ sein.
Mit dem Rechner erhält man für $n = 198$ den Wert $P(X \leq 180) \approx 0{,}919$ und für $n = 197$ den Wert $P(X \leq 180) \approx 0{,}947$.
Die Fluggesellschaft darf höchstens 197 Tickets verkaufen.

b) Die Zufallsgröße Y zählt, wie viele Personen, die gebucht haben, auch erscheinen.
Y ist binomialverteilt mit $n = 190$, p ist gesucht.
Es ist $P(Y > 180) = 1 - P(Y \leq 180) \leq 0{,}05$. Also muss $P(Y \leq 180) \geq 0{,}95$ sein.
Mit dem Rechner erhält man für $p = 0{,}91$ den Wert $P(Y \leq 180) \approx 0{,}980$ und für $p = 0{,}92$ den Wert $P(Y \leq 180) \approx 0{,}944$.
Man testet den Wert $p = 0{,}915$ in der Mitte. Dafür gilt $P(X \leq 180) \approx 0{,}966$. Deshalb liegt das gesuchte p zwischen 0,915 und 0,92. Auf zwei Dezimalen gerundet ergibt sich: $p \approx 0{,}92$.
Die Fluggesellschaft geht von einer Wahrscheinlichkeit von ca. 92 % aus, dass eine Person, die gebucht hat, auch mitfliegt.

G **16**

a) $E: \vec{x} = \vec{p} + u(\vec{q} - \vec{p}) + v(\vec{r} - \vec{p})$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

I	$2a - 2b + 4c = d$	$\mid \cdot(-1)$
II	$3a - 2b + 6c = d$	
III	$4a \quad - 1c = d$	
I	$2a - 2b + 4c = d$	
$II_a = II - I$	$1a \quad + 2c = 0$	
III	$4a \quad - 1c = d$	$\mid \cdot 2$
I	$2a - 2b + 4c = d$	
II_a	$1a \quad + 2c = 0$	
$III_a = II_a + 2 \cdot III$	$9a \quad = 2d$	

Aus der dritten Gleichung erhält man $a = \frac{2}{9}d$.
Setzt man a in die zweite Gleichung ein, erhält man $\frac{2}{9}d + 2c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{9}d$.
Mit Einsetzen von $a = \frac{2}{9}d$ und $c = -\frac{1}{9}d$ in die erste Gleichung erhält man abschließend $2 \cdot \frac{2}{9}d - 2b - \frac{4}{9}d = d$ und daraus $b = -\frac{1}{2}d$.
Wählt man $d = 18$, ergeben sich für die anderen Variablen die Werte $a = 4$, $b = -9$ und $c = -2$. Die parameterfreie Form der Ebene E lautet $E: 4x - 9y - 2z = 18$.

b) Die Normalenvektoren ergeben sich aus den Koeffizienten der parameterfreien Formen:

$E: \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $F: \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Man löst $\vec{v} \cdot \overrightarrow{n_E} = 0$ und $\vec{v} \cdot \overrightarrow{n_F} = 0$ und erhält zum Beispiel $\vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

d) Da die Ebenen nicht parallel (vgl. Teilaufgabe c)) und auch nicht identisch sind, gibt es eine Schnittgerade, deren Richtungsvektor durch $\begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Seite 350

Klausurtraining

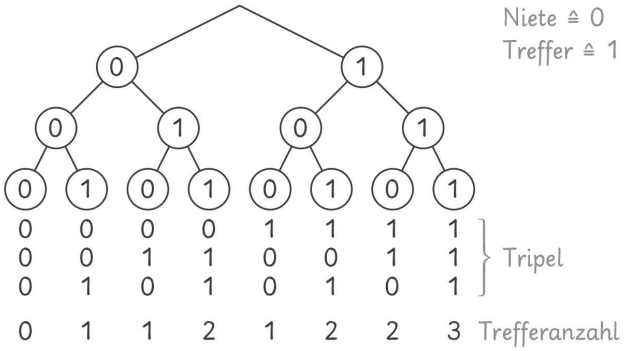
1

a) $B_{4;\frac{1}{4}}(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{128}$

b) Ein Multiple-Choice-Test besteht aus vier Fragen, bei denen jeweils eine von vier möglichen Antworten richtig ist. Max kann nur raten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er dabei zwei Treffer?

2

a)



b) $\binom{3}{0} = 1$; $\binom{3}{1} = 3$; $\binom{3}{2} = 3$; $\binom{3}{3} = 1$

c)

		1		
	1		1	
1		2		1
1	3		3	1

d)

k	0	1	2	3
$B_{3;\frac{1}{3}}(k) =$	$\binom{3}{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$	$\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$	$\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{27}$	$\binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

e) $\mu = \frac{0 \cdot 8 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1}{27} = 1$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(0-1)^2 \cdot 8 + (1-1)^2 \cdot 12 + (2-1)^2 \cdot 6 + (3-1)^2 \cdot 1}{27}} = \sqrt{\frac{18}{27}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3

Anwenden einer Formel: $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$

Pascal'sches Dreieck:

					1							
				1		1						
			1		2		1					
		1		3		3		1				
	1		4		6		4		1			
1		5		10		10		5		1		
1	6		15		20		15		6		1	

$\hat{=} \binom{6}{2}$

Systematisches Notieren von Ergebnissen:

(1, 1, 0, 0, 0, 0)
(1, 0, 1, 0, 0, 0)
(1, 0, 0, 1, 0, 0)
(1, 0, 0, 0, 1, 0)
(1, 0, 0, 0, 0, 1)
(0, 1, 1, 0, 0, 0)
(0, 1, 0, 1, 0, 0)
(0, 1, 0, 0, 1, 0)
(0, 1, 0, 0, 0, 1)
(0, 0, 1, 1, 0, 0)
(0, 0, 1, 0, 1, 0)
(0, 0, 1, 0, 0, 1)
(0, 0, 0, 1, 1, 0)
(0, 0, 0, 1, 0, 1)
(0, 0, 0, 0, 1, 1)

Es gibt 15 verschiedene Ergebnisse.
Beantwortete Frage: Zur Auswahl stehen sechs Personen. Wie viele verschiedene Pärchen kann man aus ihnen zusammenstellen?

4

a) Term 2 beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim viermaligen Drehen des Glücksrads genau einmal „Rot" erscheint. Der Term setzt sich zusammen aus den Einzelwahrscheinlichkeiten der Ergebnisse „erst Rot, dann dreimal Grün", „erst Grün, dann Rot, dann zweimal Grün", „erst zweimal Grün, dann Rot, dann Grün" und „erst dreimal Grün, dann Rot". Die Wahrscheinlichkeit für „Grün" beträgt $\frac{1}{3}$ und für „Rot" $\frac{2}{3}$.

Auch Term 4 beschreibt diese Wahrscheinlichkeit, denn es gibt vier Möglichkeiten, dass das Glücksrad bei vier Versuchen genau einmal bei „Rot" stehen bleibt. Der Term $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$ berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem dieser vier Versuche „Rot" gedreht wird. Der Term 4 ist das Ergebnis der Zusammenfassung der einzelnen Summanden des Terms 2.

b) 1 Das Glücksrad wird viermal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass erst „Rot" und dann dreimal „Grün" erscheint?

3 Das Glücksrad wird in vier Runden jeweils viermal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in jeder der vier Runden zunächst einmal „Rot" und dann dreimal „Grün" erscheint?

5

a) Es handelt sich bei den Versuchen (1), (2) und (3) um Bernoulli-Ketten, da die Ergebnisse der Münzen unabhängig voneinander sind, egal, wann oder wie man sie wirft, sie färbt oder beschriftet. Die Kette hat die Länge $n = 10$ und die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$.

b) Das Angeln stellt keine Bernoulli-Kette dar, weil Fische in der Regel „im Schwarm" auftreten, und deshalb die Trefferwahrscheinlichkeit p variiert.

c) Es handelt sich um keine Bernoulli-Kette, da es in jeder Durchführung mehr als zwei Ergebnisse gibt, nämlich die Zahlen von 1 bis 6.

d) Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 10$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$.

6

a) Ziehen aus einem Beutel mit roten und gelben Kugeln ohne Zurücklegen

b) Nacheinander Drehen von verschiedenen Glücksrädern mit verschiedenen Trefferwahrscheinlichkeiten

7

a) 6: „Sechs", $\not{6}$: „keine Sechs"
Ergebnisse zum Ergebnis A: $\not{6}6\not{6}$
Ergebnisse zum Ergebnis B: $\not{6}66$, $\not{6}6\not{6}$
Ergebnisse zum Ergebnis C: $66\not{6}$, $6\not{6}6$, $\not{6}66$, $\not{6}6\not{6}$
Ergebnisse zum Ergebnis D: $6\not{6}6$, $6\not{6}\not{6}$, $\not{6}\not{6}6$, $\not{6}\not{6}\not{6}$

b) $P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0{,}116$

$P(B) = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{30}{216} = \frac{5}{36} \approx 0{,}139$

$P(C) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} + \frac{10}{216} + \frac{25}{216}$
$= \frac{36}{216} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$

$P(D) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5}{216} + \frac{50}{216} + \frac{125}{216}$
$= \frac{180}{216} = \frac{5}{6} \approx 0{,}833$

8

a) $\binom{6}{4}$ gibt an, auf wie viele Arten man vier nicht unterscheidbare Kugeln auf sechs Plätze verteilen kann. Für Kugel 1 gibt es 6 Möglichkeiten, für Kugel 2 noch 5 Möglichkeiten, für Kugel 3 noch 4 Möglichkeiten und für Kugel 2 noch 3 Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ Möglichkeiten.
Da die Kugeln nicht unterscheidbar sein sollen und man sie auf den vier Positionen beliebig miteinander vertauschen kann, was auf 4! Weisen möglich ist, ist obiges Produkt noch durch $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ zu teilen.

b) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}_{4!} \cdot \underbrace{2 \cdot 1}_{(6-4)!}} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!}$

c) $\binom{6}{2}$ gibt an, auf wie viele Arten man zwei weiße Kugeln auf sechs Plätze verteilen kann. Dies ist genau dieselbe Anzahl, die angibt, wie man die übrigen vier schwarzen Kugeln auf die sechs Plätze verteilen kann, also $\binom{6}{4}$. Es gilt also $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$.

Seite 351

9

$B_{n;p}(7) = B_{n-1;p}(6)\cdot p + B_{n-1;p}(7)\cdot(1-p)$

$= \binom{n-1}{6}\cdot p^6\cdot(1-p)^{n-1-6}\cdot p$

$+ \binom{n-1}{7}\cdot p^7\cdot(1-p)^{n-1-7}\cdot(1-p)$

10

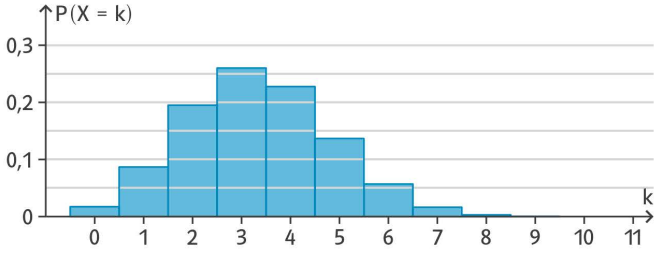
a) $n = 5,\ p = \frac{1}{6},\ \mu = \frac{5}{6} \approx 0{,}833$
Auf lange Sicht kann man erwarten, dass durchschnittlich 0,833-mal pro Serie eine Sechs fällt.

b) $n = 3,\ p = 0{,}8,\ \mu = 2{,}4$
Auf lange Sicht kann man erwarten, dass der Basketballspieler durchschnittlich 2,4-mal pro Serie trifft.

c) $n = 100,\ p = 0{,}96,\ \mu = 96$
Auf lange Sicht kann man erwarten, dass durchschnittlich 96 Teile pro Serie nicht defekt sind.

11

Die Verteilung $B_{10;\frac{k}{6}}$ hat das Maximum bei $\mu = 10\cdot\frac{k}{6} \approx 3$.
Für $k = 2$ gilt $\mu \approx 3{,}33$ und das passt zum abgebildeten Histogramm. Damit sind zwei der 6 Felder gefärbt, was $\frac{1}{3}$ entspricht.



12

a) individuelle Schätzungen, zum Beispiel:
(1) Die Wahrscheinlichkeit, dass man genau den Erwartungswert $\mu = np = 20\cdot 0{,}8 = 16$ trifft, ist relativ klein.
(2) und (3) Die Wahrscheinlichkeiten für weniger oder mehr als 16 Treffer sind etwas kleiner als 0,5.

b) (1) $P(X = 16) \approx 0{,}218$ (2) $P(X \le 15) \approx 0{,}37$
(3) $P(X \ge 17) \approx 0{,}411$

13

X zählt die Anzahl der Blumenzwiebeln, die keimen.
X ist binomialverteilt mit $n = 12$ und $p = 0{,}9$.

a) $P(X = 10) \approx 0{,}230$
Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zehn Blumenzwiebeln keimen, beträgt ca. 23,0 %.

b) $P(X = 12) \approx 0{,}282$
Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Blumenzwiebeln keimen, beträgt ca. 28,2 %.

c) $P(X \ge 10) = 1 - P(X \le 9) \approx 0{,}889$
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zehn Blumenzwiebeln keimen, beträgt ca. 88,9 %.

d) $P(X \le 9) \approx 0{,}111$ (Gegenereignis zu Teilaufgabe c))
Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens neun Blumenzwiebeln keimen, beträgt ca. 11,1 %.

14

X zählt die Anzahl der erscheinenden Fluggäste und ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}9$.

a) $P(X \le 94) \approx 0{,}9424$

b) $P(X \ge 96) \approx 0{,}0237$

15

X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0{,}8$.

a) $P(X \ge 25) = 1 - P(X \le 24) \approx 0{,}428$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 42,8 % haben mindestens 25 der Personen einen Führerschein.

b) $\mu = 30\cdot 0{,}8 = 24;\ \sigma = \sqrt{30\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2} \approx 2{,}191$

c) $\mu - \sigma \approx 21{,}809$ und $\mu + \sigma \approx 26{,}191$
Damit sind die gesuchten Trefferanzahlen 22, 23, 24, 25 und 26. Nach innen gerundet ergibt sich das 1σ-Intervall $[22; 26]$. $P(22 \le X \le 26) \approx 0{,}749 = 74{,}9\,\%$
Die Wahrscheinlichkeit ist deutlich höher als die Schätzung von 68,3 % für die Wahrscheinlichkeit des 1σ-Intervalls.

16

a) $\mu = 20\cdot 0{,}5 = 10$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10\cdot 0{,}5} = \sqrt{5} \approx 2{,}236$
$[10 - 2{,}236;\ 10 + 2{,}236] = [7{,}764;\ 12{,}236]$
Es ergibt sich das Intervall $[8; 12]$ und damit $P(8 \le X \le 12) \approx 0{,}736\,82$. Das Ergebnis weicht absolut um $0{,}736\,82 - 0{,}683 = 0{,}053\,82$ vom Sollwert ab. Das entspricht einer relativen Abweichung von $\frac{0{,}05382}{0{,}683} \approx 0{,}0788 = 7{,}88\,\%$.

b) $\mu = 100\cdot 0{,}5 = 50$ und $\sigma = \sqrt{50\cdot 0{,}5} = 5$
$[50 - 5;\ 50 + 5] = [45;\ 55]$
Es ergibt sich das Intervall $[45; 55]$ und damit $P(45 \le X \le 55) \approx 0{,}728\,75$. Das Ergebnis weicht absolut um 0,045 75 vom Sollwert ab. Das entspricht einer relativen Abweichung von ca. +6,7 %.

c) $\mu = 20\cdot 0{,}2 = 4$ und $\sigma = \sqrt{4\cdot 0{,}8} \approx 1{,}7889$
$[4 - 1{,}7889;\ 4 + 1{,}7889] = [2{,}2111;\ 5{,}7889]$
Es ergibt sich das Intervall $[3; 5]$ und damit $P(3 \le X \le 5) \approx 0{,}598\,12$. Das Ergebnis weicht absolut um −0,084 88 vom Sollwert ab. Das entspricht einer relativen Abweichung von ca. −12,43 %.

d) $\mu = 200\cdot 0{,}2 = 40$ und $\sigma = \sqrt{40\cdot 0{,}8} = 5{,}6569$
$[40 - 5{,}6569;\ 40 + 5{,}6569] = [34{,}3431;\ 45{,}6569]$
Es ergibt sich das Intervall $[35; 45]$ und damit $P(35 \le X \le 45) \approx 0{,}669\,27$. Das Ergebnis weicht absolut um −0,013 73 vom Sollwert ab. Das entspricht einer relativen Abweichung von ca. −2,01 %.

Seite 352

17

Es ist $\sigma = \sqrt{40 \cdot p \cdot (1-p)}$. Da $\sigma = \sqrt{9{,}6}$ ist und sowohl p als auch $1 - p$ positiv sind, folgt $40 \cdot p \cdot (1-p) = 9{,}6$. Dies führt auf die quadratische Gleichung $p^2 - p + 0{,}24 = 0$ mit den Lösungen $p_1 = 0{,}4$ und $p_2 = 0{,}6$.

18

Es liegt eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0{,}25$ vor. X gibt die Anzahl der richtigen Antworten an und ist binomialverteilt.

a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0{,}474 = 47{,}4\,\%$

b) Für das kleinste k soll $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1) \leq 0{,}05$ gelten, d.h. $P(X \leq k-1) \geq 0{,}95$.
Aus $P(X \leq 4)) \approx 0{,}022$ und $P(X \leq 5) \approx 0{,}981$ folgt, dass für das minimale k gilt: $k - 1 = 5$ und somit $k = 6$
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Merva mindestens sechs richtige Antworten rät, liegt bei höchstens 5 %, genauer gesagt bei 1,9 %.

19

a) (1) X: Anzahl der Personen mit Blutgruppe A
X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0{,}43$.
$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) \approx 0{,}169$
Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 15 Personen die Blutgruppe A haben, beträgt ca. 16,9 %.
(2) X: Anzahl der Personen mit Blutgruppe B oder AB
X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0{,}16$.
$P(X \leq 5) \approx 0{,}655$
Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens fünf Personen die Blutgruppe B oder AB haben, beträgt ca. 65,5 %.
(3) X: Anzahl der Personen mit Blutgruppe 0
X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0{,}41$.
Erwartungswert: $\mu = 30 \cdot 0{,}41 = 12{,}3$.
Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{30 \cdot 0{,}41 \cdot 0{,}59} = \sqrt{7{,}257} \approx 2{,}694$.
Es ist $\mu - \sigma \approx 9{,}606$ und $\mu + \sigma \approx 14{,}994$.
$P(10 \leq X \leq 14) = P(X \leq 14) - P(X \leq 9) \approx 0{,}794 - 0{,}149 = 0{,}645$
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Personen mit Blutgruppe 0 um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, beträgt ca. 64,5 %.

b) X: Anzahl der Personen mit Blutgruppe AB
X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}05$, n ist gesucht,.
Es soll $P(X \geq 3) \geq 0{,}9$ gelten. Es gilt $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$.
Also muss $P(X \leq 2) \leq 0{,}1$ sein.
Mit dem Rechner erhält man für $n = 104$ den Wert $P(X \leq 2) \approx 0{,}103$ und für $n = 105$ den Wert $P(X \leq 2) \approx 0{,}099$.
Man muss mindestens 105 Personen zufällig auswählen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens drei mit Blutgruppe AB zu erhalten.

20

a) Die maximale Wahrscheinlichkeit ist $P(X = 3)$. Da der Erwartungswert ganzzahlig ist, beträgt er $\mu = 3$.
Damit ist $3 = 20 \cdot p$, also $p = 0{,}15$.

b) $P(2 \leq X \leq 4) \approx 0{,}2293 + 0{,}2428 + 0{,}1821 = 0{,}6542$

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0{,}8244$

21

a) Entweder ist eine Untersuchung erforderlich, falls das Gemisch keine Erreger enthält (Wahrscheinlichkeit $(1 - 0{,}07\,\%)^5 = 0{,}9993^5 \approx 0{,}9965$) oder es sind 6 Untersuchungen erforderlich.
Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	1	6
P(X = x)	0,9965	0,0035

Erwartungswert $\mu = 1 \cdot 0{,}9965 + 6 \cdot 0{,}0035 = 1{,}0175$

b) Würde man alle 5 Konserven einzeln untersuchen, wären 5 Untersuchungen fällig. Die prozentuale Ersparnis ist $\frac{5 - 1{,}0175}{5} = 79{,}65\,\%$.

c) Wenn man statt $k = 5$ nun $k = 50$ Personen zu einer Gruppe zusammenfasst, ist die prozentuale Ersparnis mit $\left[50 - (1 \cdot 0{,}9993^{50} + 51 \cdot (1 - 0{,}9993^{50}))\right] : 50 \approx 94{,}56\,\%$ noch größer.

Seite 353

22

a) $B_{7;\,0{,}3}(5) \approx 0{,}025$; $B_{7;\,0{,}3}(6) \approx 0{,}0036$; $B_{8;\,0{,}3}(6) \approx 0{,}01$

b) mit den Näherungswerten aus Teilaufgabe a):
$B_{8;\,0{,}3}(6) = 0{,}3 \cdot B_{7;\,0{,}3}(5) + 0{,}7 \cdot B_{7;\,0{,}3}(6)$
$0{,}01 = 0{,}3 \cdot 0{,}025 + 0{,}7 \cdot 0{,}0036$
$0{,}01 = 0{,}0075 + 0{,}002\,52$
$0{,}01 = 0{,}010\,02 \approx 0{,}01$ ✓
mit exakter Rechnung:
$0{,}3 \cdot B_{7;\,0;\,3}(5) + 0{,}7 \cdot B_{7;\,0;\,3}(6)$

$$= \frac{3}{10} \cdot 21 \cdot \frac{243}{100\,000} \cdot \frac{49}{100} + \frac{7}{10} \cdot 7 \cdot \frac{729}{1\,000\,000} \cdot \frac{7}{10}$$

$$= \frac{3 \cdot 21 \cdot 243 \cdot 49}{100\,000\,000} + \frac{7 \cdot 7 \cdot 729 \cdot 7}{100\,000\,000} = \frac{21 \cdot 729 \cdot 49 + 7 \cdot 729 \cdot 49}{100\,000\,000}$$

$$= \frac{(21 + 7) \cdot 729 \cdot 49}{100\,000\,000} = \frac{28 \cdot 729 \cdot 49}{100\,000\,000} = B_{8;\,0;\,3}(6)$$

c) Wenn man in 8 Versuchen 6 Treffer erzielt, hatte man nach 7 Versuchen schon 6 Treffer $(B_{7;\,0{,}3}(6))$ und eine Niete $(p = 0{,}7)$ kam dazu. Oder man hatte 5 Treffer $(B_{7;\,0{,}3}(5))$ und ein Treffer $(p = 0{,}3)$ kam hinzu.

23

Der Prüfplan, bei dem der Händler die kleinere Irrtumswahrscheinlichkeit eingeht, ist besser, d.h., die Wahrscheinlichkeit die Sendung abzulehnen, obwohl insgesamt höchstens 5 % Ausschuss vorhanden ist.
Sei X: Anzahl der Ausschussstücke
Prüfplan I: X ist $B_{10;\,0{,}05}$-verteilt.
$P(X \geq 1) \approx 0{,}4013$
Prüfplan II: X ist $B_{20;\,0{,}05}$-verteilt.
$P(X \geq 2) \approx 0{,}2642$
Beim Prüfplan I kann also die Lieferung mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 40,13 % abgelehnt werden, beim Prüfplan II mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 26,42 %. Dementsprechend wählt man als Händler eher Prüfplan I, als Lieferant eher Prüfplan II.

24

a) $F_{64;\,0{,}9}(60) \approx 0{,}8937$; $B_{64;\,0{,}9}(61) \approx 0{,}0674$; $B_{64;\,0{,}9}(62) \approx 0{,}0293$; $B_{64;\,0{,}9}(63) \approx 0{,}0084$; $B_{64;\,0{,}9}(64) \approx 0{,}0012$

b) Man multipliziert jeweils die Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe a) mit dem Erstattungsbetrag und addiert die einzelnen Produkte. Der Erwartungswert der Erstattung ist:
$E(X) = 0{,}8937 \cdot 0 + 0{,}0674 \cdot 5 + 0{,}0293 \cdot 10 + 0{,}0084 \cdot 15 + 0{,}0012 \cdot 20$
$= 0{,}78$ ✓
Die Gewinnerwartung G (erwartete Einnahme minus erwartete Erstattung) ergibt sich aus $E(G) = 64 - 0{,}78 = 63{,}22$. ✓
Die Abweichung von E(G) zum Wert in der Tabelle beruht auf Rundungen der Wahrscheinlichkeiten.

c) Aus der Grafik kann man die entsprechenden Werte ablesen.

d) Bietet man sehr viele Tickets x an, nimmt man x Taler ein. Da die Show-Quote 90 % = 0,9 beträgt, sind $0{,}9 \cdot x - 60$ Erstattungen zu je 5 Taler fällig. Der erwartete Gewinn wird dann durch $f(x) = x - (0{,}9x - 60) \cdot 5$ beschrieben.
Bietet man wenig mehr als 60 Tickets an, wird man selten erstatten müssen, also tatsächlich nichts von den x Talern Einnahmen zurückzahlen müssen. Es gilt folglich $g(x) = x$.

e) individuelle Lösung, zum Beispiel:
- Wenn die Erstattung bei gleicher Showquote steigt, dann liegt die Maximalstelle näher bei $x = 60$.
- Wenn die Showquote sinkt, dann ist die optimale Überbuchung bei gleicher Erstattung größer.

X Prognose- und Konfidenzintervalle

Seite 361

Check-in

1

a) $\frac{177}{250} = 70{,}8\,\%$ $\quad \frac{342}{500} = 68{,}4\,\%$ $\quad \frac{466}{750} \approx 62{,}1\,\%$

b) Wenn man alle Einzelergebnisse zusammenfasst, erhält man mit $\frac{985}{1500} \approx 65{,}7\,\%$ eine Wahrscheinlichkeitsschätzung, in die man ein etwas höheres Vertrauen setzt. Achtung: Es handelt sich nicht um das arithmetische Mittel der einzelnen Schätzungen.

2

a) $P(X = 4) \approx 13{,}60\,\%$
$P(X \leq 4) \approx 89{,}64\,\%$
$P(X \geq 3) \approx 45{,}95\,\%$
$P(1 \leq X \leq 5) \approx 88{,}53\,\%$
$P(X \leq 1 \text{ oder } X \geq 5) \approx 38{,}30\,\%$

b) $P(X = 4) \approx 0{,}1706$
$P(X \leq 4) \approx 0{,}8179$
$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0{,}5802$
$P(1 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X = 0) \approx 0{,}8716$
$P(X \leq 1 \text{ oder } X \geq 5) = P(X \leq 1) + P(X \geq 5)$
$= P(X \leq 1) + 1 - P(X \leq 4) \approx 0{,}3768$

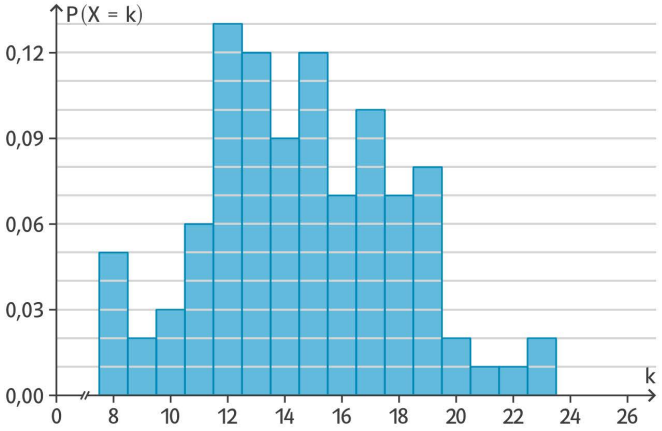
3

a) $\mu = 100 \cdot 0{,}8 = 80$, $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 4$

b) $P(76 \leq X \leq 84) = F_{100;\,0{,}8}(84) - F_{100;\,0{,}5}(76) \approx 0{,}7401$

4

Die Ergebnisse der Simulation sind individuell, sollten sich aber im selben Rahmen bewegen, z.B.:
Histogramm:



Mittelwert: 14,61; zum Vergleich $\mu = 15$
Empirische Standardabweichung: 3,39; zum Vergleich $\sigma = 3{,}24$

Seite 366

6

X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = \frac{1}{6}$.

a) Erwartungswert $\mu = n \cdot p \approx 16{,}7$

Standardabweichung

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \approx 3{,}7$

b) 2σ-Prognoseintervall

$[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] = [10; 24]$

(Die Grenzen der σ-Prognoseintervall werden als ganze Zahlen angegeben, weil X nur ganzzahlige Werte annimmt. Dabei wird die linke Grenze auf 10 aufgerundet und die rechte auf 24 abgerundet.)

Wahrscheinlichkeit des 2σ-Prognoseintervall: 0,9570

Die Sigma-Regel weist für das 2σ-Intervall eine Wahrscheinlichkeit von 95,4 % aus. Die berechnete Wahrscheinlichkeit ist sogar ein wenig größer.

Seite 367

12

Kurs: $n = 28$, $p = \frac{1}{7} \Rightarrow \mu = 4$, $\sigma \approx 1{,}8516$

$1{,}96\sigma$-Prognoseintervall: $[\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma] = [0{,}37; 7{,}63]$

3σ-Prognoseintervall: $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma] = [-1{,}55; 9{,}55]$

Schule: $n = 700$, $p = \frac{1}{7} \Rightarrow \mu = 100$, $\sigma \approx 9{,}2582$

$1{,}96\sigma$-Prognoseintervall: $[\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma] = [81{,}85; 118{,}15]$

3σ-Prognoseintervall: $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma] = [72{,}23; 127{,}77]$

Prognoseintervalle sind symmetrisch um den Erwartungswert. Sie besagen, wo die Häufigkeiten mit den zugehörigen Sicherheitswahrscheinlichkeiten liegen werden. In diesem Beispiel kann man etwa die folgenden Aussagen treffen: Man erwartet mit 95 %iger Sicherheit, dass im Kurs zwischen einer und sieben Personen an einem Sonntag Geburtstag haben, in der Schule zwischen 82 und 118 Personen.

Mit 99,7 %iger Sicherheit erwartet man, dass im Kurs zwischen 0 und 9 Personen und in der Schule zwischen 73 und 127,77 Personen an einem Sonntag Geburtstag haben.

G **23**

a) $(x^2 - 14)^2 = 5(6x^2 - 49)$ | zweite binomische Formel

$x^4 - 28x^2 + 196 = 30x^2 - 245$ | $- 30x^2 + 245$

$x^4 - 58x^2 + 441 = 0$

Substitution: $x^2 = z$

$z^2 - 58z + 441 = 0$

Man löst die Gleichung mit der pq-Formel und erhält $z_1 = 9$ und $z_2 = 49$.

Resubstitution: $x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 3$ und $x_2 = -3$

$x^2 = 49 \Rightarrow x_3 = 7$ und $x_4 = -7$

b) $(x^2 + 25)^2 = 111x^2 - 275$ | erste binomische Formel

$x^4 + 50x^2 + 625 = 111x^2 - 275$ | $- 111x^2 + 275$

$x^4 - 61x^2 + 900 = 0$

Man erhält die Lösungen $x_1 = -6$, $x_2 = 6$, $x_3 = -5$ und $x_4 = 5$.

c) Mit einem MMS oder durch Substitution erhält man die Lösungen $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ und $x_4 = 2$.

d) $36x^4 - 505x^2 + 784 = 0$; $x_1 = -\frac{7}{2}$, $x_2 = -\frac{4}{3}$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_4 = \frac{7}{2}$

e) $4x^4 - 73x^2 + 144 = 0$; $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = 4$

f) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$; $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 4$

Seite 370

6

a) $\left[0{,}25 - 2\frac{\sqrt{0{,}25 \cdot (1 - 0{,}25)}}{\sqrt{200}}; 0{,}25 + 2\frac{\sqrt{0{,}25 \cdot (1 - 0{,}25)}}{\sqrt{200}}\right]$

$= [0{,}1888; 0{,}3112]$

b) 2σ-Prognoseintervall mit $n = 800$ ist $[0{,}219; 0{,}281]$.

Da die beobachtete relative Häufigkeit $h = 0{,}35$ außerhalb des Prognoseintervalls liegt, besteht Anlass an $p = 0{,}25$ zu zweifeln.

Seite 371

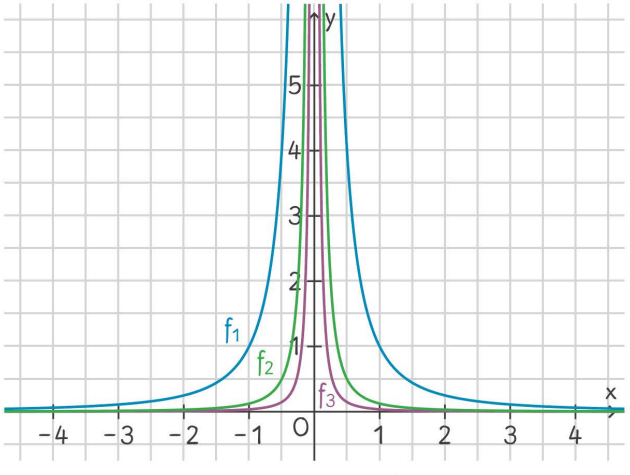
10

a) 2σ-Prognoseintervall mit $p = 0{,}278$ und $n = 500$: $[0{,}238; 0{,}318]$

b) Bei 2000 Personen hat das Prognoseintervall die Länge $\frac{2}{\sqrt{2000}} \approx 0{,}04 > 0{,}02$. Die Befragung von 2000 Personen reicht demnach nicht. Es müssten 8000 Personen befragt werden.

G **13**

a)



b) Die Graphen werden mit dem Faktor $\frac{1}{k}$ in y-Richtung gestaucht und mit dem Faktor $\frac{1}{k^2}$ in x-Richtung gestaucht.

Seite 375

6

a) 60 Treffer bei 100 Versuchen sind mit $p = 0{,}5$ gerade noch verträglich.
120 Treffer bei 200 Versuchen sind mit $p = 0{,}5$ nicht mehr verträglich.

b) 60 Treffer bei 100 Versuchen:
$\left[\frac{1}{2}; \frac{9}{13}\right] \approx [0{,}5000; 0{,}6923]$ exakt; $[0{,}5020; 0{,}6980]$ genähert.
Überprüfung: Das exakte Konfidenzintervall enthält 0,5 gerade noch.
120 Treffer bei 200 Versuchen:
$\left[\frac{9}{17}; \frac{2}{3}\right] \approx [0{,}5294; 0{,}6667]$ exakt; $[0{,}5307; 0{,}6693]$ genähert.
Überprüfung: Das exakte Konfidenzintervall enthält 0,5 nicht.

Seite 376

10

a) und **b)** Simon berechnet das 95,4 % Prognoseintervall zur Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}81$ und erhält $[0{,}80; 0{,}82]$. Da die beobachtete relative Häufigkeit $h = 0{,}8$ nicht im Prognoseintervall liegt, gehört $p = 0{,}81$ nach der Definition des Konfidenzintervalls nicht zum Konfidenzintervall der relativen Häufigkeit $h = 0{,}8$ und Simon hat recht.
Nina rechnet nur mit der Näherungsformel des Konfidenzintervalls. Die exakte Rechnung (Lösen zweier Gleichungen) liefert das Konfidenzintervall $[0{,}792; 0{,}802]$, das in Übereinstimmung mit Simons Ergebnis die Wahrscheinlichkeit 0,81 nicht enthält.

G **12**

a) $a \to +\infty$: $\int_1^a e^{-x} = [-e^{-x}]_1^a = -e^{-a} - (-e^{-1}) = -\frac{1}{e^a} + \frac{1}{e}$,
also $\lim\limits_{a \to +\infty} -\frac{1}{e^a} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$

$a = 5$: $\int_1^5 e^{-x}dx \approx 0{,}361$, also $\frac{0{,}361}{0{,}368} = 0{,}981$, also ca. 98,1 %

$a = 50$: $\int_1^{50} e^{-x}dx \approx 0{,}368$, also $\frac{0{,}368}{0{,}368} = 1$, also 100 %

$a = 100$: $\int_1^{100} e^{-x}dx \approx 0{,}368$, also $\frac{0{,}368}{0{,}368} = 1$, also 100 %

Bei $a = 50$ und $a = 100$ ist zu beachten, dass nur mit gerundeten Werten gerechnet wurde.

b) $a \to +\infty$: $\int_1^a x^{-2} = [-x^{-1}]_1^a = -a^{-1} - (-1^{-1}) = -\frac{1}{a} + 1$, also
$\lim\limits_{a \to +\infty} -\frac{1}{a} + 1 = 1$

$a = 5$: $\int_1^5 x^{-2}dx = 0{,}8$, also 80 %

$a = 50$: $\int_1^{50} x^{-2}dx = 0{,}98$, also 98 %

$a = 100$: $\int_1^{100} x^{-2}dx = 0{,}99$, also 99 %

Seite 378

5

Da man von $p = 0{,}05$ ausgehen kann, nutzt man die günstige Abschätzung.

a) $n \geq \frac{2^2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}{0{,}002^2} = 47\,500$ **b)** $n \geq \frac{3^2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}{0{,}005^2} = 17\,100$

Seite 379

10

a) Für den Radius des Konfidenzintervalls soll gelten $r = 0{,}02$.

b) $n \geq \frac{1}{0{,}02^2} = 2500 = n_0$

c) Wenn $n > \frac{4}{(p_2 - p_1)^2} = \frac{4}{(0{,}5 - 0{,}48)^2} = 10\,000$ ist, kann man $p = 0{,}48$ mit einer Sicherheit von 95,4 % bezweifeln, wenn tatsächlich $p = 0{,}5$ gilt. Das ist bei $n_0 = 2500$ nicht der Fall.

G **12**

Abstand $P(-2|1|3)$ von $E: 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$

Hilfsgerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt S der Hilfsgerade h und der Ebene E:
$S\left(-\frac{32}{21}\middle|\frac{1}{21}\middle|\frac{68}{21}\right)$

Abstand zwischen den Punkten P und S und folglich zwischen Punkt P und Ebene E: $d \approx 1{,}09$ [LE]

Abstand $P(-2|1|3)$ von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Hilfsebene $H: -1x_1 + 1x_2 + 6x_3 = 21$

Schnittpunkt T der Gerade g und der Hilfsebene H: $T\left(\frac{2}{19}\middle|\frac{17}{19}\middle|\frac{64}{19}\right)$

Abstand zwischen den Punkten P und T und folglich zwischen Punkt P und Gerade g: $d \approx 2{,}14$ [LE]

Seite 383

7

a) Sei X die Anzahl der Treffer, X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}05$.
(1) $P(X = 0) \approx 0{,}005\,92$ (2) $P(4 \leq X \leq 6) \approx 0{,}508\,18$

b) $\mu = 100 \cdot 0{,}05 = 5$; $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} = \sqrt{4{,}75} \approx 2{,}18$
(1) $\varphi_{\mu;\sigma}(0{,}5) - \varphi_{\mu;\sigma}(-0{,}5) \approx 0{,}0137$
(2) $\varphi_{\mu;\sigma}(6{,}5) - \varphi_{\mu;\sigma}(3{,}5) \approx 0{,}5087$
Da $\sigma \approx 2{,}18 < 3$ gilt, ist die Laplace-Bedingung nicht erfüllt. Die Näherung in (1) ist nicht brauchbar.

Seite 385

17

$P(85 \leq X \leq 115) \approx 68{,}3\,\%$; $P(X > 115) \approx 15{,}9\,\%$; $P(X > 130) \approx 2{,}3\,\%$
Die Zeitungsangaben stimmen.

G **21**

$V = \pi \cdot \int_0^1 (x^2)^2 \, dx = \frac{\pi}{5} \approx 0{,}628$

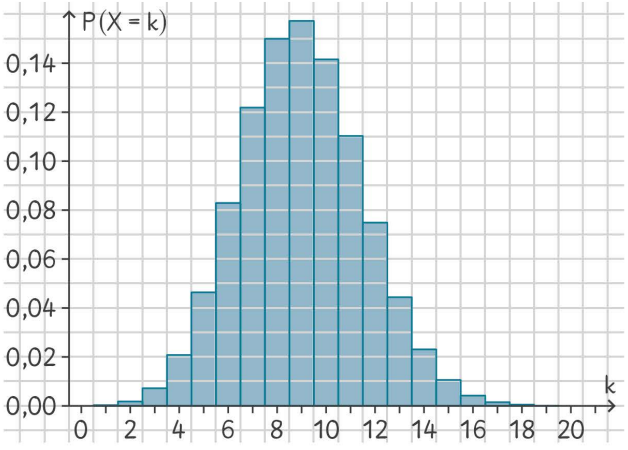
Das Glas kann 0,628 VE Flüssigkeit fassen.

Seite 386

Klausurtraining

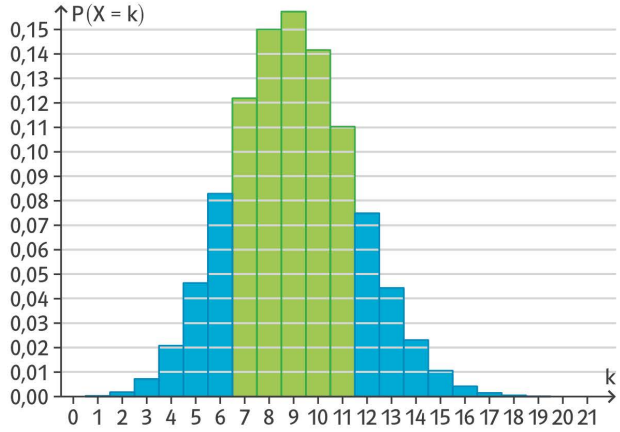
1

a)

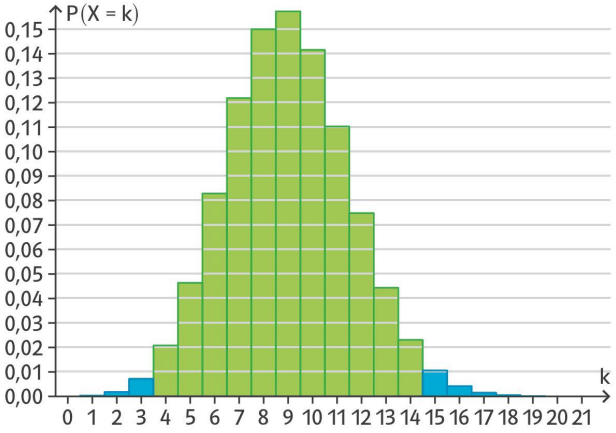


b) Wenn kein Taschenrechner zur Verfügung steht, schätzt man die Wahrscheinlichkeit $P(X = 9)$ für das Maximum bei $\mu = 9$ (z. B. 20 %) und skaliert die y-Achse. Die Wahrscheinlichkeiten für kleine Werte von k und für große Werte von k lässt man weg und skizziert ein Histogramm ähnlich einer Glockenkurve. Dabei beachtet man, dass die Gesamtfläche 1 sein soll.

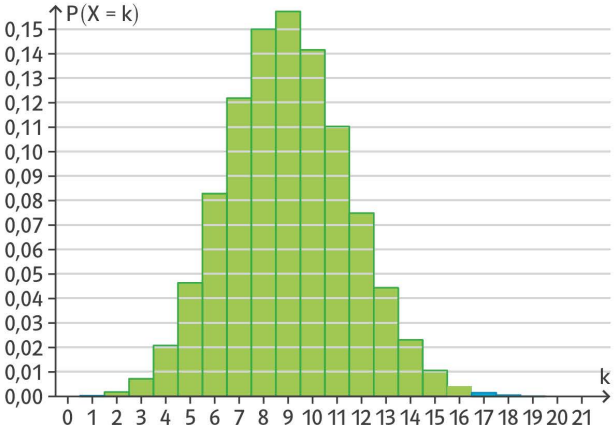
c) $\sigma = \sqrt{30 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} \approx 2{,}51$



1σ-Umgebung von $\mu = 9$: $[6{,}49; 11{,}51]$
Sicherheitswahrscheinlichkeit $P = 68{,}3\,\%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 68,3 % liegt die Anzahl der Treffer zwischen 7 und 11.



2σ-Umgebung von $\mu = 9$: $[3{,}98; 14{,}02]$
Sicherheitswahrscheinlichkeit $P = 95{,}4\,\%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 95,4 % liegt die Anzahl der Treffer zwischen 4 und 14.



3σ-Umgebung von $\mu = 9$: $[1{,}47; 16{,}53]$
Sicherheitswahrscheinlichkeit $P = 99{,}7\,\%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 99,7 % liegt die Anzahl der Treffer zwischen 2 und 16. Treffer außerhalb dieses Bereichs sind extrem unwahrscheinlich.

d) Das 1,96σ-Prognoseintervall ist minimal kleiner als das 2σ-Prognoseintervall.
Das 2,58σ-Prognoseintervall ist etwas kleiner als das 3σ-Prognoseintervall.

e) individuelle Lösung, zum Beispiel:
Wenn man bei einem Bernoulli-Experiment mit $n = 30$ und $p = 0{,}3$ eine Trefferanzahl beobachtet, die außerhalb des 2σ-Prognoseintervalls $[4; 14]$ liegt, dann spricht man von einer signifikanten Abweichung. Man beginnt, an $p = 0{,}3$ zu zweifeln.

2

a) Man wählt die Werte für n und p so, dass der Term $n \cdot p \cdot (1 - p)$ eine Quadratzahl ist. Das ist zum Beispiel der Fall für:

$n = 100;\ p = 0{,}1:\ \sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$

$n = 100;\ p = 0{,}5:\ \sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 5$

$n = 100;\ p = 0{,}2:\ \sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$

b) Zu den Werten aus Teilaufgabe a) gehören die Intervalle $[10 - 3; 10 + 3] = [7; 13]$, $[50 - 5; 50 + 5] = [45; 55]$ und $[20 - 4; 20 + 4] = [16; 24]$.

Bei Bernoulli-Experimenten liegen ca. 68,3 % der Trefferanzahlen in den 1σ-Prognoseintervallen. Diese Faustregel ist tendenziell umso genauer, je größer σ ist, also je größer n ist und je näher p bei 0,5 liegt.

3

a) Mit $n = 400$, $p = 0{,}1$ und $c = 2$ erhält man $\mu = n \cdot p = 400$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 6$.

2σ-Prognoseintervall für absolute Häufigkeiten:

$[40 - 2 \cdot 6; 40 + 2 \cdot 6] = [28; 52]$

b) Man teilt die Werte der Intervallgrenzen durch die Versuchsanzahl $n = 400$ und erhält

$$\left[0{,}1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}9}}{\sqrt{400}};\ 0{,}1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}9}}{\sqrt{400}}\right] = [0{,}1 - 0{,}03;\ 0{,}1 + 0{,}03] = [0{,}07;\ 0{,}13].$$

Bei einem Bernoulli-Experiment mit $n = 400$ und $p = 0{,}1$ liegt die relative Trefferhäufigkeit mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von ca. 95,4 % im Intervall $[0{,}07; 0{,}13]$.

c) Die Prognoseintervalle der absoluten Häufigkeiten werden mit wachsendem Versuchsumfang breiter, die der relativen Häufigkeiten werden schmaler. Letztere konzentrieren sich bei der Wahrscheinlichkeit p, in diesem Fall $p = 0{,}1$.

4

a) 1σ-Prognoseintervall der relativen Häufigkeit:

$$\left[p - 1 \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};\ p + 1 \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

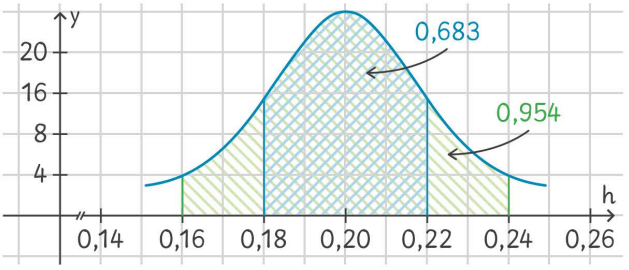
$$= \left[0{,}2 - \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2)}}{\sqrt{400}};\ 0{,}2 + \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2)}}{\sqrt{400}}\right]$$

$$= \left[0{,}2 - \frac{0{,}4}{20};\ 0{,}2 + \frac{0{,}4}{20}\right] = [0{,}18;\ 0{,}22]$$

2σ-Prognoseintervall:

$$\left[0{,}2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2)}}{\sqrt{400}};\ 0{,}2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2)}}{\sqrt{400}}\right] = [0{,}16;\ 0{,}24]$$

Man skizziert eine Glocke mit dem Maximum bei $p = 0{,}2$ und skaliert die Achsen so, dass über dem 2σ-Intervall eine Fläche mit ca. 0,954 FE liegt. Die Wendepunkte liegen an den Grenzen des 1σ-Intervalls bei 0,18 und 0,22. Zwischen den Wendestellen hat die Fläche unter der Glocke einen Flächeninhalt von ca. 0,683 FE.



b) Skizze siehe Teilaufgabe a)

Mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 68,3 % liegen die relativen Häufigkeiten für Treffer im 1σ-Prognoseintervall. Mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,4 % liegen die relativen Häufigkeiten für Treffer im 2σ-Prognoseintervall.

c) individuelle Lösung, zum Beispiel:

Wenn man eine relative Häufigkeit beobachtet, die außerhalb des 2σ-Intervalls liegt, dann spricht man von einer signifikanten Abweichung. Es besteht dann Grund zu bezweifeln, dass $p = 0{,}2$ ein gutes Modell ist.

5

Prognoseintervalle: Man rechnet zum Beispiel mit der Formel.

P = 68,3 %, also 1σ:

$$\left[0{,}2 - 1 \cdot \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2)}}{\sqrt{100}};\ 0{,}2 + 1 \cdot \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2)}}{\sqrt{100}}\right] = [0{,}16;\ 0{,}24]$$

P = 95,4 %, also 2σ:

$$\left[0{,}2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2)}}{\sqrt{100}};\ 0{,}2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2)}}{\sqrt{100}}\right] = [0{,}12;\ 0{,}28]$$

P = 99,7 %, also 3σ:

$$\left[0{,}2 - 3 \cdot \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2)}}{\sqrt{100}};\ 0{,}2 + 3 \cdot \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2)}}{\sqrt{100}}\right] = [0{,}08;\ 0{,}32]$$

Da $n = 100$, $p = 0{,}2 = h$ gilt, die Sicherheitswahrscheinlichkeiten den Konfidenzniveaus entsprechen sowie dieselben Formeln für die Intervallberechnungen verwendet werden, sind die Prognoseintervalle identisch mit den Konfidenzintervallen, wenn man diese mit der Näherungsformel berechnet.

Mit einem MMS bestimmt man die genauen Werte für die Grenzen der Konfidenzintervalle:

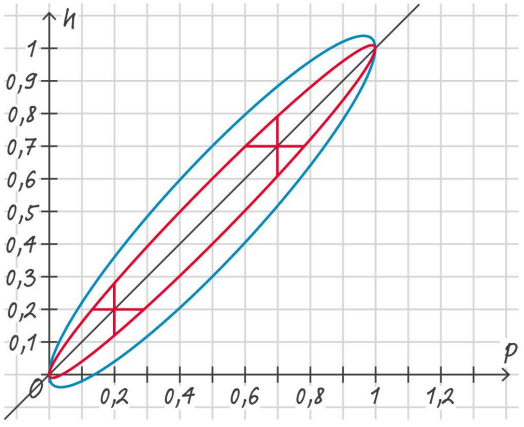
1σ: [0,16306; 0,24288]

2σ: [0,13225; 0,29083]

3σ: [0,10719; 0,34235]

6

a)



Die äußeren blauen Graphen gehören zu $n = 25$, die inneren roten zu $n = 100$.
Kontrolle: $f_{25}(0{,}5) \approx 0{,}3$ bzw. 0,7 und $f_{100}(0{,}5) = 0{,}4$ bzw. 0,6.

b) Die „vertikal liegenden" Prognoseintervalle liest man ab, indem man die Geraden zu $p = 0{,}2$ bzw. $p = 0{,}7$ mit den Funktionsgraphen schneidet.
Die „waagerecht liegenden" Konfidenzintervalle liest man ab, indem man die Geraden zu $h = 0{,}2$ und $h = 0{,}7$ mit den Funktionsgraphen schneidet.
Abgelesene Prognoseintervalle für $P = 95{,}4\,\%$:
für $n = 100$ (eingezeichnet):
$p = 0{,}2$: $[0{,}12; 0{,}28]$ symmetrisch
$p = 0{,}7$: $[0{,}6; 0{,}8]$ symmetrisch
für $n = 25$ (nicht eingezeichnet):
$p = 0{,}2$ $[0{,}03; 0{,}37]$ symmetrisch
$p = 0{,}7$ $[0{,}51; 0{,}79]$ symmetrisch
Abgelesene Konfidenzintervalle für $ß = 95{,}4\,\%$ und für $n = 100$ (eingezeichnet):
$h = 0{,}2$: $[0{,}13; 0{,}28]$ nicht symmetrisch
$h = 0{,}7$: $[0{,}6; 0{,}78]$ nicht symmetrisch
für $n = 25$ (nicht eingezeichnet):
$h = 0{,}2$ $[0{,}08; 0{,}4]$ nicht symmetrisch
$h = 0{,}7$ $[0{,}5; 0{,}85]$ nicht symmetrisch

c) Berechnete Prognoseintervalle für $P = 95{,}4\,\%$:
für $n = 100$: $[0{,}12; 0{,}28]$ bzw. $[0{,}6083; 0{,}7917]$
für $n = 25$: $[0{,}04; 0{,}4]$ bzw. $[0{,}5167; 0{,}8833]$
Berechnete Konfidenzintervalle für $ß = 95{,}4\,\%$:
für $n = 100$: $[0{,}132; 0{,}291]$ bzw. $[0{,}602; 0{,}783]$
für $n = 25$: $[0{,}0871; 0{,}3956]$ bzw. $[0{,}5; 0{,}8448]$

d) Von der Geraden mit $h = p$ (erste Winkelhalbierende) geht man gleich weit nach oben/unten bis zu dem Funktionsgraphen, so sind die Prognoseintervalle gemacht. Die Konfidenzintervalle sind für $h < 0{,}5$ bezogen auf die Gerade rechtslastig, für $h > 0{,}5$ linkslastig. Das wird umso deutlicher sichtbar, je näher man an $h = 0$ bzw. $h = 1$ kommt. Darüber hinaus wird die Aussage durch die Kontrollrechnung in Teilaufgabe c) belegt.

Seite 387

7

a)

	von	bis
95,4 %	0,632	0,725
99,7 %	0,607	0,745

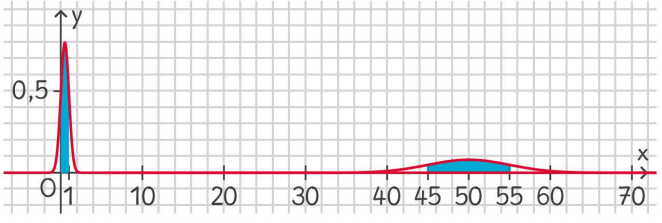
b) Man vertraut darauf, dass die angegebenen Intervalle die unbekannte Wahrscheinlichkeit (bzw. die unbekannten Anteile) mit hoher (95,4 %) bzw. sehr hoher (99,7 %) Wahrscheinlichkeit überdecken.

8

$n \geq \frac{c^2}{4r^2}$ mit $r = 0{,}02$ und c:
$c = 1{,}96$ liefert $n \geq 2401$, $c = 2$ liefert $n \geq 2500$

9

a) und **b)**



In den Sigma-Intervallen $[45; 55]$ bzw. $[0; 1]$ liegen jeweils 68,3 % der Werte normalverteilter Zufallsgrößen mit $\mu = 50$ bzw. $\mu = 0{,}5$ und $\sigma = 5$ bzw. $\sigma = 0{,}5$.

10

a) Man vermutet $n = 10$ und $n \cdot p = 4$ und somit $p = 0{,}4$.
Das passt zur Gaußglocke, die ihren Hochpunkt bei $x = 0{,}4$ hat. Die Kontur der $B_{n;\,p}$-Histogramme wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi_{\mu;\,\sigma}$ beschrieben mit $\mu = np = 4$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2{,}4} \approx 1{,}55$, die Verteilungsfunktion $F_{n;\,p}$ durch $\Phi_{\mu;\,\sigma}$, der Integralfunktion zu $\varphi_{\mu;\,\sigma}$.

b) Kontrollwerte: Für $x = 5$ gilt $B_{10;\,0{,}4}(5) \approx 0{,}201$; $F_{10;\,0{,}4}(5) \approx 0{,}834$; $\varphi_{4;\,1{,}55} \approx 0{,}209$ und $\Phi_{4;\,1{,}55} \approx 0{,}741$.
Die berechneten Werte stimmen mit den aus den Grafiken abzulesenden Werten überein.

c) siehe Aufgabenstellung im Schulbuch.

11

Es besteht tatsächlich kein prinzipieller Unterschied zwischen der Angabe einer Länge und der Festlegung einer Wahrscheinlichkeit. In beiden Fällen sind die Zahlenangaben Modelle der Wirklichkeit.
Die Steigerung der Genauigkeit erfolgt bei der Längenmessung durch präzisere Messgeräte oder Mittelwertbildung aus vielen verschiedenen Messungen, bei der Schätzung der Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten durch Erhöhen des Versuchsumfangs.

12

a) Man realisiert beispielsweise je eine größere Zahl Bernoulli-Versuche der Länge $n = 25$, $n = 100$ und bestätigt, dass die relativen Trefferhäufigkeiten im zweiten Fall ($n = 100$) weniger um die Trefferwahrscheinlichkeit p streuen als im ersten Fall ($n = 25$).

b) Man bestimmt den Anteil der Versuche, bei denen die relative Trefferhäufigkeit am Ende im 95,4 % Prognoseintervall $\left[p \cdot 2\frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2\frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ liegt. Dieser Anteil wird in beiden Fällen in der Nähe von 95,4 % liegen. Da das Prognoseintervall zu $n = 100$ nur halb so lang ist wie dasjenige zu $n = 25$, ist damit die Aussage bestätigt.

Seite 388

13

a) Prognoseintervalle zu $p = 0{,}8$: $[0{,}72; 0{,}88]$ bzw. $[0{,}68; 0{,}92]$

b) Konfidenzintervalle zu $h = 0{,}65$: $[0{,}551; 0{,}738]$ bzw. $[0{,}500; 0{,}775]$

c) Die relative Trefferhäufigkeit $h = 0{,}65$ liegt (sogar) außerhalb des 99,7 %-Prognoseintervalls.
Die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ liegt (sogar) außerhalb des 99,7 %-Konfidenzintervalls.
Man hat Anlass, an der Annahme $p = 0{,}8$ zu zweifeln.

d) Gemeinsamkeiten:
- Die Berechnungen beruhen bei beiden Intervalltypen auf den Sigmaregeln, die nur näherungsweise gelten.
- Mit größer werdender Versuchsanzahl, werden die Intervalle kleiner.

Unterschiede:
- Konfidenzintervalle enthalten Wahrscheinlichkeiten; sie sind zu der gegebenen relativen Häufigkeit i. d. R. nicht symmetrisch.
- Prognoseintervalle enthalten relative Häufigkeiten; sie sind zu der gegebenen Wahrscheinlichkeit symmetrisch.

14

Die von p_2 stammende relative Häufigkeit muss mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,4 % außerhalb vom Intervall $\left[0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{1600}}; 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1600}}\right] = \left[0{,}5 - \frac{1}{40}; 0{,}5 + \frac{1}{40}\right]$ liegen.
Das ist der Fall, wenn p_2 eine Intervalllänge, also $\frac{2}{40} = 0{,}05$ von p_1 entfernt ist, weil die von p_2 stammenden relativen Häufigkeiten mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,4 % im Intervall $\left[p_2 - \frac{1}{40}; p_2 + \frac{1}{40}\right]$ liegen. Wenn $p_2 \leq 0{,}45$ oder $p_2 > 0{,}55$ gilt, ist das erfüllt.

15

Wenn die tatsächliche Wahrscheinlichkeit 0,83 beträgt, liegt die relative Häufigkeit mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,4 % um den Wert $0{,}83 \pm 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}83 \cdot 0{,}17}}{\sqrt{n}}$. Eine signifikante Abweichung von 0,8 erhält man, wenn dieses Prognoseintervall oberhalb von $0{,}8 \pm 2\frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{n}}$ liegt.

$$
\begin{aligned}
0{,}83 - 2\frac{\sqrt{0{,}83 \cdot 0{,}17}}{\sqrt{n}} &= 0{,}8 + 2\frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{n}} && \mid -0{,}08 \\
0{,}03 - 2\frac{\sqrt{0{,}83 \cdot 0{,}17}}{\sqrt{n}} &= 2\frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{n}} && \mid +2\frac{\sqrt{0{,}83 \cdot 0{,}17}}{\sqrt{n}} \\
0{,}03 &= \frac{2}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2} + \sqrt{0{,}83 \cdot 0{,}17}\right) && \mid \cdot\sqrt{n} \\
0{,}03\sqrt{n} &= \sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2} + \sqrt{0{,}83 \cdot 0{,}17} && \mid : 0{,}03 \\
\sqrt{n} &= \frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2} + \sqrt{0{,}83 \cdot 0{,}17}}{0{,}03} && \mid (\,)^2 \\
n &\approx 2673{,}8
\end{aligned}
$$

Wenn $n > 2674$ ist, liefert ein tatsächlicher Wert von $p = 0{,}83$ mit einer Sicherheit von 95,4 % eine signifikante Abweichung von einer angenommenen Wahrscheinlichkeit 0,8.

16

a) Bei 100 Würfen einer Laplace-Münze müsste die Anzahl b, wie oft Kopf erscheint, mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,4 % im Intervall $[40; 60]$ liegen. Nur der achte Versuch mit 100 Reißnägeln würde zum Bezweifeln der Annahme $p(\text{Kopf}) = \frac{1}{2}$ führen.

b) Konfidenzintervalle bei einem Konfidenzniveau von $\beta = 95{,}4\,\%$:
Münze: $[0{,}475; 0{,}539]$ (nicht signifikant)
Reißnagel: $[0{,}488; 0{,}551]$ (nicht signifikant)
Kronkorken: $[0{,}507; 0{,}570]$ (signifikant)

c) Nur in der Spielbank oder bei einem Automaten sind die Abweichungen (zumindest für den Automatenhersteller und den Betreiber der Spielbank) relevant, weil sie die kommerziellen Einnahmen sichern.

17

a) Die Aussage gilt immer. Begründung: Den Wahrscheinlichkeiten liegen Zufallsexperimente zugrunde, die bei jeder Durchführung anders ausfallen können.

b) Die Aussage gilt nie. Begründung: Die Werte von Zufallsgrößen lassen sich in Zufallsexperimenten beobachten; Wahrscheinlichkeiten lassen sich nur schätzen und nie beobachten.

c) Die Aussage gilt immer. Begründung: Führt man ein n-stufiges Bernoulli-Experiment mit einer festen unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit p mehrfach durch, dann liegen nach Definition des Prognoseintervalls 95,4 % der relativen Häufigkeiten h im Prognoseintervall zu p. Nach Definition des Konfidenzintervalls liegt in genau diesen Fällen p im Konfidenzintervall zu h. Das zufällige Konfidenzintervall enthält somit in 95,4 % aller Fälle das unbekannte p.

d) Die Aussage stimmt nie. Begründung: Man kann nur vorhersagen, in welchen Intervallen die Trefferhäufigkeiten mit einer bestimmten Sicherheitswahrscheinlichkeit liegen werden.

e) Die Aussage stimmt nie. Begründung: Mit einer Binomialverteilung berechnet man die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis in einem Zufallsexperiment, dass unabhängig voneinander n-mal hintereinander ausgeführt wird und bei dem es nur die zwei Ergebnisse Treffer/Niete gibt. In der beurteilenden Statistik geht es zwar darum, eine Hypothese („Münze ist gezinkt.“) mithilfe der Binomialverteilung zu testen, aber auch da kann man nie mit Sicherheit beurteilen, ob die Hypothese wahr oder falsch ist.

f) Die Aussage gilt immer. Begründung: Definition des Konfidenzintervalls

g) Die Aussage stimmt nie. Begründung: Es ist möglich, dass sich die Konfidenzintervalle nicht schneiden.

Seite 389

18

a) Die relative Empfindlichkeit des Schnelltests bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass unter 119 mit einem PCR-Test positiv getesteten Personen 117 Personen auch mit dem Schnelltest als positiv identifiziert werden.

Probe: $\frac{117}{119} \approx 0{,}9832 = 98{,}32\,\%$

Die relative Spezifität gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass unter 746 PCR-negativ getesteten Personen 743 Personen auch mit dem Schnelltest negativ identifiziert werden.

Probe: $\frac{743}{746} \approx 0{,}996 = 99{,}6\,\%$

b) Man berechnet das Konfidenzintervall ($\beta = 0{,}95$ und $c = 1{,}96$, $n = 119$, $h = 0{,}9832$) $[0{,}9408;\ 0{,}9954]$.
Das Ergebnis weicht vom Beipackzettel $[94{,}06\,\%;\ 99{,}08\,\%]$ ab.

c) Nico überprüft die linke Grenze des auf dem Beipackzettel angegebenen Konfidenzintervalls, indem er Prognoseintervalle bestimmt. Man sollte $p = 0{,}9405$ anzweifeln, da 117 nicht im 95 %-Prognoseintervall $[106;\ 116]$ liegt.
Man sollte $p = 0{,}9407$ nicht anzweifeln, da 117 im 95 %-Prognoseintervall $[107;\ 117]$ liegt.

d) $\frac{117 + 743}{865} = \frac{860}{865} \approx 0{,}9942$

Das Konfidenzintervall ist $[0{,}9865;\ 0{,}9975]$.
Man sollte $p = 0{,}9865$ anzweifeln, da 860 nicht im 95 %-Prognoseintervall $[847;\ 859]$ liegt. Man sollte $p = 0{,}9866$ nicht anzweifeln, da 860 im 95 %-Prognoseintervall $[847;\ 860]$ liegt. Die linke Grenze des Konfidenzintervalls ist also korrekt angegeben.

19

a) Die Säulen des rechten Histogramms konzentrieren sich in der Nähe von 0,2. Es handelt sich um das Histogramm der relativen Häufigkeiten. Es entsteht aus dem Histogramm der absoluten Häufigkeiten links dadurch, dass die Säulenbreite $\frac{1}{100}$ beträgt. Die Säulenhöhen vergrößern sich daher mit dem Faktor 100. Der Flächeninhalt jeder einzelnen Säule verändert sich dadurch nicht. Auf der y-Achse werden also nicht die Wahrscheinlichkeiten abgetragen. Beide Histogramme sind damit korrekt.

b) Man liest in der linken Grafik ab, dass genau 22 Treffer mit einer relativen Häufigkeit von 0,08 auftraten. Das Maximum liegt jedoch bei 20 Treffern.
Aus $n \cdot p = 100 \cdot p = 20$ folgt $p = 0{,}2$.
Das passt zu der Darstellung in der rechten Grafik. Dort ist die höchste Säule bei 0,2 gezeichnet. In der rechten Grafik liest man bei 0,22 den Wert 8 ab. Das bedeutet, dass 22 Treffer in 8 % der Durchführungen auftraten.

c) Aus Teilaufgabe b) folgt mit $p = 0{,}2$, dass $\mu = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ und $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = 10 \cdot \frac{2}{5} = 4$. Die Wendestellen der Glockenkurve liegen somit an den Stellen 20 ± 4, also bei 16 und 24. Das passt zur linken Grafik und wegen $\frac{16}{100} = 0{,}16$ bzw. $\frac{24}{100} = 0{,}24$ auch zur Glockenkurve in der rechten Grafik.

d) linke Grafik: $\varphi_{20;\,4}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot 4^2} \cdot (x - 20)^2}$ mit einem Maximum bei 20 und Wendestellen bei 16 und 24.

rechte Grafik: $\varphi_{0{,}2;\,0{,}04}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0{,}04} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot 0{,}04^2} \cdot (x - 0{,}2)^2}$ mit einem Maximum bei 0,2 und Wendestellen bei 0,16 und 0,24.

Punktprobe linke Grafik: $\varphi_{20;\,4}(20) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4} \approx 0{,}0997$

Punktprobe rechte Grafik: $\varphi_{0{,}2;\,0{,}04}(0{,}2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0{,}04} \approx 9{,}97$

e) individuelle Lösungen, die den Abbildungen der Aufgabe ähnlich sind.

Grundwissen

Seite 409

1

a) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

b) $\sqrt{81} \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

c) $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

d) $1{,}\overline{23} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

e) $-6{,}971 \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

f) $-\frac{51}{3} \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

g) $\sqrt{28} \in \mathbb{R}$

h) $5\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

2

a) $\frac{7}{12}$

b) $\frac{17}{52}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{173}{525}$

3

a) $\frac{5}{6} = \frac{\mathbf{35}}{42}$ b) $\frac{\mathbf{63}}{72} = \frac{7}{8}$ c) $\frac{63}{\mathbf{84}} = \frac{3}{4}$ d) $\frac{13}{16} = \frac{\mathbf{91}}{\mathbf{112}}$

4

a) $\frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$

b) $\frac{35}{40} - \frac{52}{40} = -\frac{17}{40}$

c) $\frac{52}{24} + \frac{33}{24} = \frac{85}{24} = 3\frac{13}{24}$

d) $\frac{40}{15} - \frac{69}{15} = -\frac{29}{15} = -1\frac{14}{15}$

e) $\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{4}{12} - \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{5}{12}$

f) $\frac{12}{5} + \frac{2}{3} + \frac{7}{10} = \frac{72}{30} + \frac{20}{30} + \frac{21}{30} = \frac{113}{30} = 3\frac{23}{30}$

5

90 min entsprechen $1\frac{1}{2}$ Stunden.

$5 - \frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} - \frac{6}{5} = 5 - \frac{15}{20} - \frac{30}{20} - \frac{24}{20} = \frac{100}{20} - \frac{15}{20} - \frac{30}{20} - \frac{24}{20} = \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}$

Da $1\frac{11}{20} > 1\frac{1}{2}$ gilt, hat Theo mit seiner Aussage recht.

6

a) $\frac{25}{100} = 0{,}25$

b) $-\frac{35}{10} = -3{,}5$

c) $\frac{375}{1000} = 0{,}375$

d) $-\frac{6}{10} = -0{,}6$

e) $2 : 3 = 0{,}\overline{6}$

-0

20

-18

2

f) $5\frac{3}{4} = 5{,}75$

h) $4 : 7 = 0{,}\overline{571428}$

-0

40

-35

50

-49

10

-7

30

-28

20

-14

60

-56

40

g) $\frac{13}{25} = \frac{52}{100} = 0{,}52$

7

a) $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$ b) $\frac{7}{1000}$ c) $-\frac{375}{100} = -\frac{15}{4}$ d) $-\frac{999}{100}$

e) $-5\frac{2}{3}$ f) $\frac{38}{1000} = \frac{19}{500}$ g) $32\frac{1}{9}$ h) $\frac{1625}{1000} = \frac{65}{40} = \frac{13}{8}$

8

		1		
		−1,5	**2,5**	
		−3,7	**2,2**	**0,3**
	−5,95	2,25	**−0,05**	**0,35**
−8,375	**2,425**	−0,175	$\frac{1}{8}$	**0,225**

Seite 410

1

a) 56 % b) 40 % c) 123 % d) $\frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$

2

	Grundwert	Prozentwert	Prozentsatz
a)	20	12	**60 %**
b)	**64 €**	16 €	25 %
c)	24 kg	**42 kg**	175 %

3

$\frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\,\%$

In Kurs haben 40 % der Jugendlichen ein Haustier.

4

$280\,€ \cdot 0{,}85 = 238\,€$

Emma muss noch 238 € für das Smartphone bezahlen.

5

$\frac{153}{0{,}68} = 225$

Es haben insgesamt 225 Läuferinnen am Halbmarathon teilgenommen.

6

$\frac{7{,}8\,\text{km}}{1{,}2} = 6{,}5\,\text{km}$

Kims Weg war zuvor 6,5 km lang.

7

a) $500\,€ \cdot 0{,}012 = 6\,€$

Nesrin erhält nach einem Jahr 6 € Zinsen.

b) $\frac{40{,}20\,€}{0{,}012} = 3350\,€$

Antons Guthaben am Ende des Vorjahres betrug 3350 €.

8

$K = 1{,}015^5 \cdot 5000\,€ \approx 5386{,}42\,€$

Am Ende des fünften Jahres beträgt das Kapital ca. 5386,42 €.

Seite 411

1

Nur bei Teilaufgabe b) liegt eine ganzrationale Funktion vor.

2

a) Der Summand mit der größten Potenz ist x^3.
Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$.
Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.

b) Der Summand mit der größten Potenz ist $-x^4$.
Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.
Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.

c) Der Summand mit der größten Potenz ist $-x^5$.
Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.
Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$.

3

a) $-2x + 3 = 0 \quad |-3$
$-2x = -3 \quad |:(-2)$
$x = 1{,}5$

b) $x^2 - 6x + 7 = 0$
pq-Formel: $x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9 - 7}$
$x_1 = 3 - \sqrt{2}$; $x_2 = 3 + \sqrt{2}$

c) $x(x + \sqrt{5})$
Satz vom Nullprodukt:
$x = 0$ oder $(x + \sqrt{5}) = 0$
$x_1 = -\sqrt{5}$; $x_2 = 0$

d) $x^2 + 2x + 2 = 0$
pq-Formel: $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2}$
keine Lösung

e) $2x^3 + 6x^2 = 0$ | ausklammern
$2x^2(x + 3) = 0$
Satz vom Nullprodukt:
$2x^2 = 0$ oder $x + 3 = 0$
$x_1 = -3$; $x_2 = 0$

f) $(x^2 + 1)(3x - 15)$
Satz vom Nullprodukt:
$x^2 + 1 = 0$ oder $3x - 15 = 0$
$x^2 + 1 = 0 \quad |-1$
$x^2 = -1$ keine Lösung
$3x - 15 = 0 \quad |+15$
$3x = 15 \quad |:3$
$x = 5$

g) $3x(x^4 - 16) = 0$
Satz vom Nullprodukt:
$3x = 0$ oder $x^4 - 16 = 0$
$x^4 - 16 = 0 \quad |+16$
$x^4 = 16$
$x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$

h) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ | ausklammern
$x(x^2 - 5x + 6) = 0$
Satz vom Nullprodukt:
$x = 0$ oder $x^2 - 5x + 6 = 0$
pq-Formel:
$x_{1/2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 6} = 2{,}5 \pm 0{,}5$
$x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$

4

Man bestimmt entweder die Nullstellen der Funktion oder löst die Gleichung $f(x) = 0$.

a) $x_1 \approx -1{,}517$; $x_2 \approx 1{,}517$

b) $x \approx -1{,}433$

5

a) Nullstellen von f:
$\frac{1}{5}x + \frac{4}{5} = 0 \quad |\cdot 5$
$x + 4 = 0 \quad |-4$
$x = -4$
Nullstellen von g:
$x^2 - 3x + 3 = 0$
pq-Formel:
$x_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 3}$
keine Lösung
Die Funktion g hat keine Nullstellen.

b) Schnittstellen von f und g:
$f(x) = g(x)$
$\frac{1}{5}x + \frac{4}{5} = x^2 - 3x + 3 \quad |-\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$
$0 = x^2 - \frac{16}{5}x + \frac{11}{5}$
pq-Formel:
$x_{1/2} = \frac{8}{5} \pm \sqrt{\frac{64}{25} - \frac{11}{5}} = \frac{8}{5} \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{8}{5} \pm \frac{3}{5}$
$x_1 = 1$; $x_2 = \frac{11}{5} = 2{,}2$
Berechnung der y-Koordinaten:
$f(1) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$, also $S_1(1\,|\,1)$
$f\left(\frac{11}{5}\right) = \frac{11}{25} + \frac{20}{25} = \frac{31}{25} = 1{,}24$, also $S_2(2{,}2\,|\,1{,}24)$
Die Berechnung kann auch mithilfe der Funktionsgleichung von g erfolgen.
Die Graphen von f und g schneiden sich in den Punkten $S_1(1\,|\,1)$ und $S_2(2{,}2\,|\,1{,}24)$.

6

a) Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da der Funktionsterm von f nur gerade Exponenten enthält.

b) Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da der Funktionsterm von f nur ungerade Exponenten enthält.

c) Der Graph von f ist nicht symmetrisch, da ungerade (3) und gerade (6 und 0) Exponenten im Term vorkommen.

d) $f(x) = x^2 + 3x$, also ist der Graph von f nicht symmetrisch, da ungerade (1) und gerade (3) Exponenten im Term vorkommen.

7

a) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $S_{x_1}(-1{,}7\,|\,0)$; $S_{x_2}(-1{,}1\,|\,0)$; $S_y(0\,|\,0{,}5)$
Extrempunkte: $T_1(-1{,}5\,|\,-0{,}9)$; $H(-0{,}7\,|\,0{,}7)$; $T_2(0\,|\,0{,}5)$

b) $T_1(-1{,}5\,|\,-0{,}9)$ ist ein globaler Extrempunkt. Die Punkte H und T_2 sind lokale Extrempunkte.

Seite 412

1

a) $\frac{\pi}{2}$ **b)** $\frac{2}{3}\pi$ **c)** $\frac{2}{5}\pi$
d) 60° **e)** −22,5° **f)** 630°

2

a) A = 2; p = 2π **b)** A = 3; p = 8
c) $A = \frac{1}{2}$; $p = \frac{\pi}{2}$ **d)** A = 1; p = 2

3

Zu f gehört Graph (3). Die Periode ist π.
Zu g gehört Graph (1). Die Periode ist 4π.
Zu h gehört Graph (2). Die Periode ist $\frac{\pi}{2}$.

4

a)
$3\sin(x) = 3 \mid :3$
$\sin(x) = 1$
$x = \frac{\pi}{2}$

b)
$2\sin(x) + 2 = 4 \mid -2$
$2\sin(x) = 2 \mid :2$
$\sin(x) = 1$
$x = \frac{\pi}{2}$

c)
$5\cos(x) - 1 = -2\cos(x) \mid +2\cos(x)$
$7\cos(x) - 1 = 0 \mid +1$
$7\cos(x) = 1 \mid :7$
$\cos(x) = \frac{1}{7}$
$x_1 \approx 1{,}43;\ x_2 \approx 4{,}86$

Seite 413

1

a) 25 Liter pro Minute
b) $10\,000 - 90 \cdot 25 = 7750$
Nach anderthalb Stunden sind noch 7750 Liter im Pool.
c)
$10\,000 - 25x = 0 \mid +25x$
$10\,000 = 25x \mid :25$
$400 = x$
Nach 400 Minuten bzw. nach 6 Stunden und 40 Minuten ist der Pool leer.

2

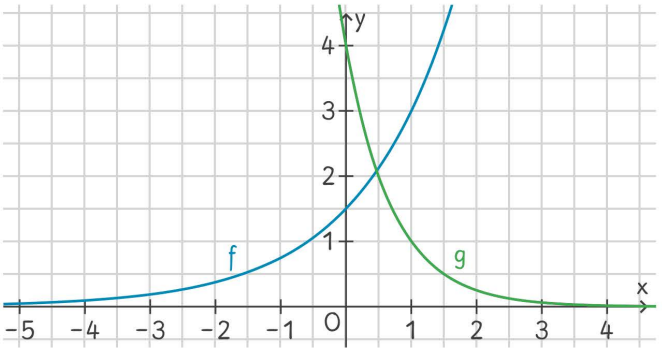
Die linke Tabelle beschreibt exponentielles Wachstum, da der Quotient aufeinanderfolgender Werte konstant $q = \frac{1}{3}$ ist.
Die rechte Tabelle beschreibt lineares Wachstum, da die Differenz aufeinanderfolgender Werte konstant 0,25 ist.

3

a) G(0) = 400 (in g)
b) $G(3) = 400 \cdot 1{,}1^3 = 532{,}4$
Das Gewicht beträgt ca. 532 Gramm.

c)
$750 = 400 \cdot 1{,}1^t \mid :400$
$1{,}875 = 1{,}1^t \mid \log_{1,1}(\ )$
$\log_{1,1} 1{,}875 = t$
$t \approx 6{,}60$
Nach etwa 6,6 Stunden bzw. 6 Stunden und 36 Minuten wiegt der Teig 750 g.

4



5

f gehört zu C, g gehört zu A, h gehört zu B

6

a) x = 3 **b)** x ≈ 1,63 **c)** x ≈ 1,18
d) keine Lösung **e)** x = −0,25 **f)** x = 0

7

a) $3^{\frac{1}{2}}$ **b)** $5^{\frac{2}{3}}$
c) $\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} = 2^{-\frac{5}{2}}$ **d)** $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{7}}\right)^9 = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{9}{7}}$

8

a) $\sqrt{11}$ **b)** $\sqrt[5]{3}$ **c)** $\sqrt[4]{7^3}$ **d)** $\sqrt{y^9}$

9

a) 3^7 **b)** 5^{-6} **c)** 2^{33}
d) a^6 **e)** 1 **f)** z^{3+2b}

Seite 414

1

a) $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2^2 - 1 - (0^2 - 1)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$

b) $\frac{3^2 - 1 - ((-1)^2 - 1)}{3 - (-1)} = \frac{8}{4} = 2$

c) $\frac{1^2 - 1 - ((-1)^2 - 1)}{1 - (-1)} = \frac{0}{2} = 0$

d) $\frac{(-1)^2 - 1 - ((-2)^2 - 1)}{-1 - (-2)} = \frac{-3}{1} = -3$

2

individuelle Wahl der Werte von h, zum Beispiel:

$h = 0{,}1$

$\frac{((1+0{,}1)^3-1)-(1^3-1)}{0{,}1} = 3{,}31$

$h = -0{,}1$

$\frac{((1-0{,}1)^3-1)-(1^3-1)}{-0{,}1} = 2{,}71$

$h = 0{,}01$

$\frac{((1+0{,}01)^3-1)-(1^3-1)}{0{,}01} = 3{,}0301$

$h = -0{,}01$

$\frac{((1-0{,}01)^3-1)-(1^3-1)}{-0{,}01} = 2{,}9701$

$h = 0{,}001$

$\frac{((1+0{,}001)^3-1)-(1^3-1)}{0{,}001} = 3{,}003\,001$

$h = -0{,}001$

$\frac{((1-0{,}001)^3-1)-(1^3-1)}{-0{,}001} = 2{,}997\,001$

3

$\frac{(4+h)^2-3-(4^2-3)}{h} = \frac{16+8h+h^2-3-16+3}{h} = \frac{8h+h^2}{h} = \frac{h(8+h)}{h}$

$= 8 + h$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(4+h)^2-3-(4^2-3)}{h} = 8$

4

$f'(0) = 0;\ f'(1) = 1;\ f'(2{,}12) \approx -5$

5

a) $f'(x) = 44x^{10}$ **b)** $f'(x) = x^3$ **c)** $f'(x) = 12x^3 - 5x^4$

d) $f'(x) = 6x^8$ **e)** $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2$ **f)** $f'(x) = \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5$

6

a) $f'(x) = 4x^3$

$f'(x) = 0$

$4x^3 = 0$, also $x = 0$

$f'(-1) = -4$ und $f'(1) = 4$

f ist streng monoton fallend in $I_1 =]-\infty; 0]$ und streng monoton wachsend in $I_2 = [0; +\infty[$.

b) $f'(x) = -4x^3 - 6x^2$

$f'(x) = 0$

$-4x^3 - 6x^2 = 0$ | ausklammern

$-2x^2(2x + 3) = 0$

$2x^2 = 0$ oder $2x + 3 = 0$

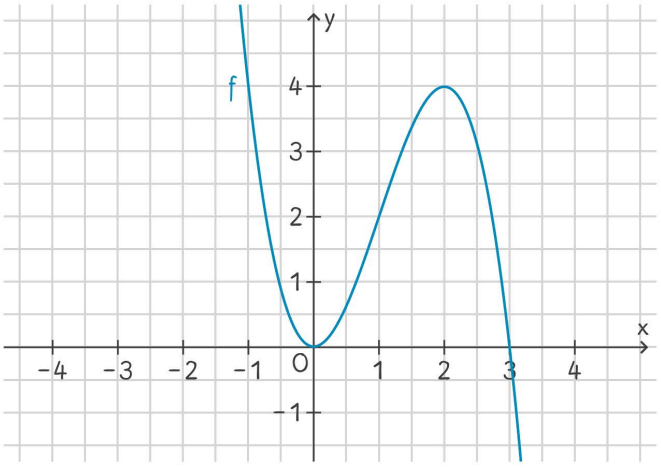
$x_1 = 0$ und $x_2 = -1{,}5$

$f'(-2) = 8;\ f'(-1) = -2;\ f'(1) = -10$

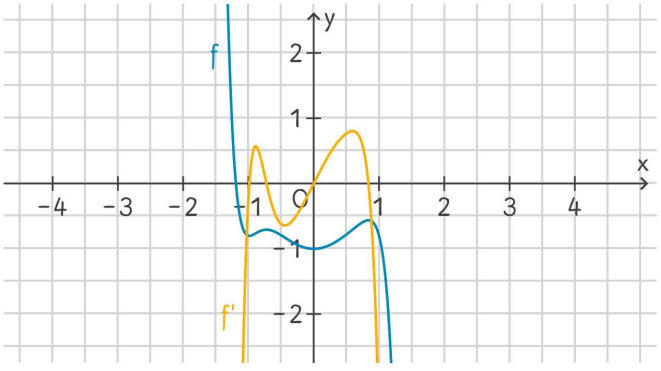
f ist streng monoton wachsend in $I_1 =]-\infty; -1{,}5]$ und streng monoton fallend in $I_2 = [-1{,}5; +\infty[$.

7

individuelle Lösung, zum Beispiel: $f(x) = -x^3 + 3x^2$, siehe Graph:



8



Seite 415

1

a) Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 6x;\ f''(x) = 6x - 6$

mögliche Extremstellen: $f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x = 0$ | ausklammern

$3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

Überprüfung der möglichen Extremstellen:

$f''(0) = -6 < 0$

An der Stelle $x_1 = 0$ liegt ein lokales Maximum vor.

Mit $f(0) = 2$ folgt, dass der Graph von f den Hochpunkt $H(0|2)$ hat.

$f''(2) = 6 > 0$

An der Stelle $x_2 = 2$ liegt ein lokales Minimum vor.

Mit $f(2) = -2$ folgt, dass der Graph von f den Tiefpunkt $T(2|-2)$ hat.

b) Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 - 4x$; $f''(x) = 12x^2 - 4$
mögliche Extremstellen: $f'(x) = 0$
$4x^3 - 4x = 0$ | ausklammern
$4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1$
Überprüfung der möglichen Extremstellen:
$f''(0) = -4 < 0$
An der Stelle $x_1 = 0$ liegt ein lokales Maximum vor.
Mit $f(0) = -1$ folgt, dass der Graph von f den Hochpunkt $H(0|-1)$ hat.
$f''(-1) = 8 > 0$
An der Stelle $x_2 = -1$ liegt ein lokales Minimum vor.
Mit $f(-1) = -2$ folgt, dass der Graph von f den Tiefpunkt $T_1(-1|-2)$ hat.
$f''(1) = 8 > 0$
An der Stelle $x_3 = 1$ liegt ein lokales Minimum vor.
Mit $f(1) = -2$ folgt, dass der Graph von f den Tiefpunkt $T_2(1|-2)$ hat.

2

a) Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 2$; $f''(x) = 6x$; $f'''(x) = 6$
mögliche Wendestellen: $f''(x) = 0$
$6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
Überprüfung der möglichen Wendestelle:
$f'''(0) = 6 \neq 0$
Die Stelle $x_1 = 0$ ist eine Wendestelle. Mit $f(0) = 1$ folgt, dass der Graph von f den Wendepunkt $W(0|1)$ hat.

b) Ableitungen: $f'(x) = -8x^3 + 6x$; $f''(x) = -24x^2 + 6$;
$f'''(x) = -48x$
mögliche Wendestellen: $f''(x) = 0$
$-24x^2 + 6 = 0$ | -6
$-24x^2 = 6$ | $:(-24)$
$x^2 = \frac{1}{4}$
$x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{1}{2}$
Überprüfung der möglichen Wendestellen:
$f'''\left(-\frac{1}{2}\right) = 24 \neq 0$
Die Stelle $x_1 = -\frac{1}{2}$ ist eine Wendestelle. Mit $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$ folgt, dass der Graph von f den Wendepunkt $W_1\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{5}{8}\right)$ hat.
$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -24 \neq 0$
Die Stelle $x_2 = \frac{1}{2}$ ist eine Wendestelle. Mit $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$ folgt, dass der Graph von f den Wendepunkt $W_2\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{5}{8}\right)$ hat.

3

a) $f'(x) = 2x - 4$
$f''(x) = 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist der Graph von f für alle $x \in \mathbb{R}$ linksgekrümmt.

b) $f'(x) = -3x^2 + 2x$; $f''(x) = -6x + 2$
$-6x + 2 = 0$ für $x = \frac{1}{3}$
$f''(x) > 0$ für $x < \frac{1}{3}$ und $f''(x) < 0$ für $x > \frac{1}{3}$, also ist der Graph von f für $x < \frac{1}{3}$ linksgekrümmt und für $x > \frac{1}{3}$ rechtsgekrümmt.

c) $f'(x) = -3x^2 + 6$; $f''(x) = -6x$
$-6x = 0$ für $x = 0$
$f''(x) > 0$ für $x < 0$ und $f''(x) < 0$ für $x > 0$, also ist der Graph von f für $x < 0$ linksgekrümmt und für $x > 0$ rechtsgekrümmt.

d) $f'(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 4x$; $f''(x) = -4x^2 + 4$
$-4x^2 + 4 = 0$ für $x = \pm 1$
$f''(x) > 0$ für $-1 < x < 1$ und $f''(x) < 0$ für $x < -1$ und für $x > 1$, also ist der Graph von f für $-1 < x < 1$ linksgekrümmt und für $x < -1$ und $x > 1$ rechtsgekrümmt.

4

Der Graph von f' ist streng monoton steigend für $x < 1$ und streng monoton fallend für $x > 1$, folglich ist $f''(x) > 0$ für $x < 1$ und $f''(x) < 0$ für $x > 1$. Somit ist der Graph von f linksgekrümmt für $x < 1$ und rechtsgekrümmt für $x > 1$.

5

a) $f'(x) = 9x^2 - 4x$
$f'(2) = 9 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 36 - 8 = 28$
Die Steigung der Tangente in P ist $m = 28$.

b) $f'(x) = 2x^3 + \frac{3}{2}x^2$
$f'(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$
Die Steigung der Tangente in P ist $m = -\frac{1}{2}$.

6

a) Ansatz: $n(x) = m_n x + c$
Steigung m_n bestimmen: $f'(x) = -2x$
$m_n = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{(-2)} = \frac{1}{2}$
Einsetzen von $P(1|3)$ und m_n in $n(x) = m_n x + c$:
$3 = \frac{1}{2} \cdot 1 + c \Rightarrow c = \frac{5}{2}$
Gleichung der Normale: $n(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

b) Ansatz: $n(x) = m_n x + c$
Steigung m_n bestimmen: $f'(x) = 3x^2 - 2$
$m_n = -\frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{3 \cdot (-1)^2 - 2} = -\frac{1}{1} = -1$
Einsetzen von $P(-1|2)$ und m_n in $n(x) = m_n x + c$:
$2 = (-1) \cdot (-1) + c \Rightarrow c = 1$
Gleichung der Normale: $n(x) = -x + 1$

7

a) Ansatz: $t(x) = mx + b$
y-Wert an der Stelle $x = 4$: $f(4) = 1$, also $P(4|1)$
Steigung m_t bestimmen: $f'(x) = 2x - 4$ und somit $m_t = f'(4) = 4$
Einsetzen von $P(4|1)$ und m_t in $t(x) = mx + b$:
$1 = 4 \cdot 4 + b \Rightarrow b = -15$
Gleichung der Tangente: $t(x) = 4x - 15$

b) Ansatz: $t(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x - 15 \quad |+15 \\ 15 &= 4x \quad |:4 \\ 3{,}75 &= x \end{aligned}$$

Die Tangente schneidet die x-Achse im Punkt $(3{,}75|0)$.

c) $\tan(\alpha) = f'(a) = m_t$
$\tan(\alpha) = 4$
$\alpha = \tan^{-1}(4) \approx 75{,}96°$
Die Größe des Steigungswinkels der Tangente beträgt ca. 76°.

Seite 416

1

a) $2 \cdot (\mathbf{-4}) + 5 = -3$
$x = -4$ ist Lösung dieser Gleichung.

b) $4 \cdot \mathbf{5} - 5 = -3(\mathbf{5} - 10)$
$x = 5$ ist Lösung dieser Gleichung.

c) $4\left(2 \cdot \mathbf{2} - \frac{7}{4}\right) = \frac{3}{2} \cdot \mathbf{2} + 6$
$x = 2$ ist Lösung dieser Gleichung.

d) $2 \cdot \mathbf{2}^2 = 8 = 12 - 2 \cdot \mathbf{2}$
$2 \cdot (\mathbf{-3})^2 = 18 = 12 - 2 \cdot (\mathbf{-3})$
$x_1 = 2$ und $x_2 = -3$ sind Lösungen dieser Gleichung.

2

a)
$$\begin{aligned} \tfrac{3}{5}x &= 36 \quad \left|\cdot\tfrac{5}{3}\right. \\ x &= 60 \end{aligned}$$
Probe: $\frac{3}{5} \cdot 60 = 36$ ✓
$L = \{60\}$

b)
$$\begin{aligned} 4{,}8x &= 3{,}2 \quad |:4{,}8 \\ x &= \tfrac{32}{48} = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$
Probe: $4{,}8 \cdot \frac{2}{3} = 3{,}2$ ✓
$L = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

c)
$$\begin{aligned} 2(3x - 1) &= 28x - 13 \\ 6x - 2 &= 28x - 13 \quad |-6x \\ -2 &= 22x - 13 \quad |+13 \\ 11 &= 22x \quad |:22 \\ \tfrac{1}{2} &= x \end{aligned}$$
Probe: $2\left(3 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ ✓
$28 \cdot \frac{1}{2} - 13 = 14 - 13 = 1$ ✓
$L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

d)
$$\begin{aligned} -3(10x + 1) &= 6(2 - 5x) \\ -30x - 3 &= 12 - 30x \quad |+30x \\ -3 &= 12 \end{aligned}$$
Die Gleichung hat keine Lösung.
$L = \{\ \}$

e)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2} &= \tfrac{2}{5}x \quad |\cdot 10 \\ 5x - 15 &= 4x \quad |-4x \\ x - 15 &= 0 \quad |+15 \\ x &= 15 \end{aligned}$$
Probe: $\frac{1}{2} \cdot 15 - \frac{3}{2} = 6$ ✓
$\frac{2}{5} \cdot 15 = 6$ ✓
$L = \{15\}$

f)
$$\begin{aligned} 0{,}3x + 1{,}3 &= 5{,}2 - x \quad |\cdot 10 \\ 3x + 13 &= 52 - 10x \quad |+10x \\ 13x + 13 &= 52 \quad |-13 \\ 13x &= 39 \quad |:13 \\ x &= 3 \end{aligned}$$
Probe: $0{,}3 \cdot 3 + 1{,}3 = 2{,}2$ ✓
$5{,}2 - 3 = 2{,}2$ ✓
$L = \{3\}$

3

$5 \cdot \mathbf{2} - (\mathbf{2} - 2) = 10 \neq 6 = 3(4 - \mathbf{2})$
Beim Vereinfachen im ersten Schritt wurde die Minusklammer falsch aufgelöst.

$$\begin{aligned} 5x - (x - 2) &= 3(4 - x) \quad |\text{vereinfachen} \\ 4x + 2 &= 12 - 3x \quad |-2+3x \\ 7x &= 10 \quad |:7 \\ x &= \tfrac{10}{7} \end{aligned}$$

$L = \left\{\frac{10}{7}\right\}$

4

a) $11x = \mathbf{-11}$

b) $3 = 7x + \mathbf{10}$

c) $x - 2 = 4x + \mathbf{1}$

d) $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} + \frac{1}{5}x = -x - \frac{3}{5}$

5

a) Ausklammern
$x^2 + 7x = 0$
$x(x + 7) = 0$
$x_1 = 0$ und $x_2 = -7$
$L = \{-7; 0\}$
Probe: $0^2 + 7 \cdot 0 = 0$ ✓
$(-7)^2 + 7 \cdot (-7) = 0$ ✓

b) pq-Formel
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$x_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4}$
$x_1 = -1$ und $x_2 = 4$
$L = \{-1; 4\}$
Probe: $(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 4 = 0$ ✓
$4^2 - 3 \cdot 4 - 4 = 0$ ✓

c) Äquivalenzumformungen

$x^2 - 1{,}96 = 0 \quad | + 1{,}96$

$x^2 = 1{,}96$

$x_1 = -1{,}4$ und $x_2 = 1{,}4$

$L = \{-1{,}4; 1{,}4\}$

Probe: $(-1{,}4)^2 - 1{,}96 = 0$ ✓

$1{,}4^2 - 1{,}96 = 0$ ✓

d) Äquivalenzumformungen

$5x - 6 = x^2 - 6 \quad | + 6$

$5x = x^2 \quad | - 5x$

$0 = x^2 - 5x$

Ausklammern

$0 = x(x - 5)$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 5$

$L = \{0; 5\}$

Probe: $5 \cdot 0 - 6 = -6 = 0^2 - 6$ ✓

$5 \cdot 5 - 6 = 19 = 5^2 - 6$ ✓

e) Äquivalenzumformungen

$-4x^2 + 32x = 64 \quad | - 64$

$-4x^2 + 32x - 64 = 0 \quad | : (-4)$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

pq-Formel

$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 16}$

$x = 4$

$L = \{4\}$

Probe: $-4 \cdot 4^2 + 32 \cdot 4 = 64$ ✓

f) Äquivalenzumformungen

$-3x^2 + 17 = -5x^2 - 19 \quad | + 5x^2 - 17$

$2x^2 = -36 \quad | : 2$

$x^2 = -18$

Da eine Quadratzahl in den reellen Zahlen nicht negativ sein kann, gibt es keine Lösung.

$L = \{\ \}$

g) Äquivalenzumformungen

$4x^2 + 15x - 4 = 0 \quad | : 4$

$x^2 + 3{,}75x - 1 = 0$

pq-Formel

$x_{1/2} = -1{,}875 \pm \sqrt{3{,}515\,625 + 1}$

$x_1 = -4$ und $x_2 = 0{,}25$

$L = \{0{,}25; -4\}$

Probe: $4 \cdot 0{,}25^2 + 15 \cdot 0{,}25 - 4 = 0{,}25 + 3{,}75 - 4 = 0$ ✓

$4(-4)^2 + 15 \cdot (-4) - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$ ✓

h) Äquivalenzumformungen

$3x^2 + 7 = -8 + 4{,}5x \quad | + 8 - 4{,}5x$

$3x^2 - 4{,}5x + 15 = 0 \quad | : 3$

$x^2 - 1{,}5x + 5 = 0$

pq-Formel

$x_{1/2} = 0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625 - 5}$

Da die Diskriminante negativ ist, gibt es keine Lösung.

$L = \{\ \}$

6

a) Nullstellen von f: $x^2 - 2x + 3 = 0$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 - 3}$

Es gibt keine Lösung, f hat also keine Nullstellen.

Nullstellen von g: $\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} = 0$

$\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} = 0 \quad | - \frac{9}{2}$

$\frac{1}{2}x = -\frac{9}{2} \quad | \cdot 2$

$x = -9$

b) $x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \quad | - \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$

$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$

$x_{1/2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{3}{2}} = \frac{5}{4} \pm \frac{7}{4}$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = 3$

Die beiden Graphen schneiden sich an den Stellen

$x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = 3$.

Berechnung der y-Koordinaten

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{9}{2} = \frac{17}{4} = 4{,}25 \Rightarrow S_1(-0{,}5\,|\,4{,}25)$

$g(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{9}{2} = 6 \Rightarrow S_2(3\,|\,6)$

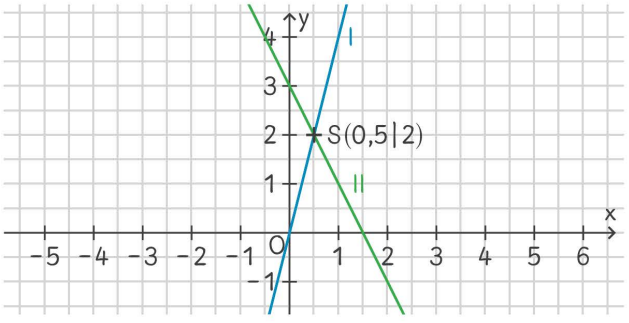
Die Berechnung der y-Koordinaten kann auch mithilfe der Funktionsgleichung von f erfolgen.

Seite 417

1

a) $I_a \quad y = 4x$

$II_a \quad y = -2x + 3$

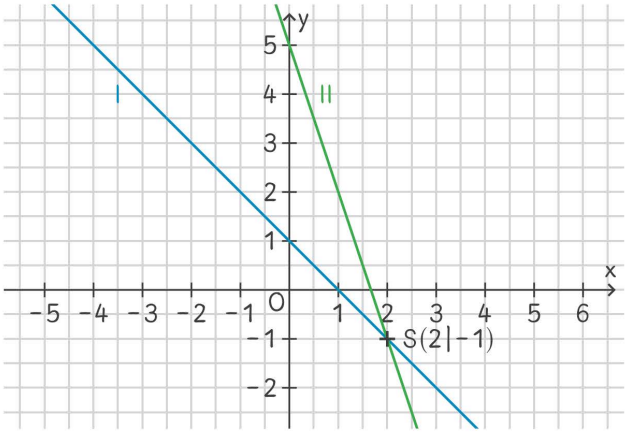


$L = \{(0{,}5\,|\,2)\}$

Probe: $2 - 4 \cdot 0{,}5 = 0$ ✓

$2 + 2 \cdot 0{,}5 = 3$ ✓

b) I_a $y = -x + 1$ $\quad$ II_a $y = -3x + 5$



$L = \{(2|-1)\}$

Probe: $-2 - (-1) = -1$ ✓

$3 \cdot 2 + (-1) = 5$ ✓

2

a) I_a $y = 2x + 5$

II_a $y = -x - 1$

$2x + 5 = -x - 1 \quad | + x$

$3x + 5 = -1 \quad | - 5$

$3x = -6 \quad | : 3$

$x = -2$

$x = -2$ in II_a: $y = -(-2) - 1 = 1$

$L = \{(-2|1)\}$

Probe: $1 - 2 \cdot (-2) = 5$ ✓

$1 + (-2) = -1$ ✓

b) I_a $-y = 0{,}5x + 1$

II_a $-y = -2{,}5x - 2$

$0{,}5x + 1 = -2{,}5x - 2 \quad | + 2{,}5x$

$3x + 1 = -2 \quad | - 1$

$3x = -3 \quad | : 3$

$x = -1$

$x = -1$ in I_a: $-y = 0{,}5 \cdot (-1) + 1 = 0{,}5 \quad | \cdot (-1)$

$y = -0{,}5$

$L = \{(-1|-0{,}5)\}$

Probe: $-0{,}5 \cdot (-1) - (-0{,}5) = 1$ ✓

$2{,}5 \cdot (-1) - (-0{,}5) = -2$ ✓

3

a) II_a $y = 5 - 2x$

Einsetzen von $y = 5 - 2x$ in I:

$3x - 4(5 - 2x) = 2$

$3x - 20 + 8x = 2 \quad | + 20$

$11x = 22 \quad | : 11$

$x = 2$

$x = 2$ in II_a: $y = 5 - 2 \cdot 2 = 1$

$L = \{(2|1)\}$

Probe: $3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2$ ✓

$2 \cdot 2 + 1 = 5$ ✓

b) I_a $3x = 2y - 14$

Einsetzen von $3x = 2y - 14$ in II:

$2 \cdot (2y - 14) + 5y = 8$

$4y - 28 + 5y = 8 \quad | + 28$

$9y = 36 \quad | : 9$

$y = 4$

$y = 4$ in I_a: $3x = 2 \cdot 4 - 14 = -6 \quad | : 3$

$x = -2$

$L = \{(-2|4)\}$

Probe: $3 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 = -14$ ✓

$6 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 = 8$ ✓

4

x: Anzahl der Kühe

y: Anzahl der Hühner

$I \quad x + y = 75 \quad | - x$

$II \quad 4x + 2y = 252$

$I_a \quad y = 75 - x$

Einsetzen von $y = 75 - x$ in II:

$4x + 2(75 - x) = 252$

$4x + 150 - 2x = 252 \quad | - 150$

$2x = 102 \quad | : 2$

$x = 51$

Einsetzen von $x = 51$ in I_a: $y = 75 - 51 = 24$

Es stehen 51 Kühe und 24 Hühner auf der Weide.

5

a) $I \quad 7x - y = -4$

$II \quad -6x + y = 3$

$I \quad 7x - y = -4$

$II_a = I + II \quad x = -1$

Einsetzen von $x = -1$ in II: $-6 \cdot (-1) + y = 3 \quad | - 6$

$y = -3$

$L = \{(-1|-3)\}$

Probe: $7 \cdot (-1) - (-3) = -4$ ✓

$-6 \cdot (-1) + (-3) = 3$ ✓

b) $I \quad -7x + 2y = -4$

$II \quad -8x + 5y = 9$

$I_a = 5\,I \quad -35x + 10y = -20$

$II_a = -2\,II \quad 16x - 10y = -18$

$I_a \quad -35x + 10y = -20$

$II_b = I_a + II_a \quad -19x = -38$

Aus II_b erhält man die Gleichung $-19x = -38$ und damit $x = 2$.

Einsetzen von $x = 2$ in I: $-7 \cdot 2 + 2y = -4 \quad | + 14$

$2y = 10 \quad | : 5$

$y = 5$

$L = \{(2|5)\}$

Probe: $-7 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = -4$ ✓

$-8 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 9$ ✓

6

x: Anzahl Milcheis
y: Anzahl Softeis

I	1,6x	+ 2,4y	=	20
II	2,4x	+ 1,6y	=	16
$I_a = -60\,I$	−96x	− 144y	=	−1200
$II_a = 40\,II$	96x	+ 64y	=	640
I_a	−96x	− 144y	=	−1200
$II_b = I_a + II_a$		−80y	=	−560

Aus II_b erhält man die Gleichung $-80y = -560$ und damit $y = 7$.

$y = 7$ in II_a: $96x + 64 \cdot 7 = 640 \mid -448$

$96x = 192 \mid :96$

$x = 2$

Emilia hat 2 Milcheis und 7 Softeis gekauft.

7

a) Hier ist z. B. das Gleichsetzungsverfahren sinnvoll, da beide Gleichungen bereits nach 3y aufgelöst sind.

$5x - 2 = -2x - 9 \mid +2$

$5x = -2x - 7 \mid +2x$

$7x = -7 \mid :7$

$x = -1$

Einsetzen von $x = -1$ in I: $3y = 5 \cdot (-1) - 2 = -7 \mid :3$

$y = -\frac{7}{3}$

$L = \left\{\left(-1 \middle| -\frac{7}{3}\right)\right\}$

b) Hier ist z. B. das Einsetzungsverfahren sinnvoll, da Gleichung I bereits nach x aufgelöst ist.

Einsetzen von $x = y + 1$ in II liefert die Gleichung $2(y + 1) + 3y = 7$.

$2y + 2 + 3y = 7 \mid -2$

$5y = 5 \mid :5$

$y = 1$

Einsetzen von $y = 1$ in I: $x = 1 + 1 = 2$

$L = \{(2\,|\,1)\}$

c) Hier ist z. B. das Additionsverfahren sinnvoll, da in der ersten Gleichung 8x und in der zweiten Gleichung −8x vorkommt.

I		8x	=	1 + 4y
II	4y	− 8x	=	3
I_a	−4y	+ 8x	=	1
II	4y	− 8x	=	3
I_a	−4y	+ 8x	=	1
$II_a = I_a + II$		0	=	4

Da $0 \neq 4$ gilt, gibt es keine Lösung.

$L = \{\ \}$

Hinweis: Auch das Einsetzungsverfahren wäre geeignet gewesen, weil man Gleichung I in Gleichung II hätte einsetzen können.

d) Hier ist z. B. das Einsetzungsverfahren sinnvoll, da Gleichung II bereits nach y aufgelöst ist.

Einsetzen von $y = 3x + 6$ in I:

$9x - 3(3x + 6) = -18$

$9x - 9x - 18 = -18$

$-18 = -18$

Da $-18 = -18$ eine wahre Aussage ist und stets gilt, gibt es unendlich viele Lösungen.

$L = \{(x\,|\,y) \mid y = 3x + 6\}$

8

a)

I	0,2y	− 1,5x	=	−2
II		4,5x + 1	=	0,6y
$I_a = 3\,I$	0,6y	− 4,5x	=	−6
II		4,5x + 1	=	0,6y
I_b	0,6y		=	−6 + 4,5x
II		4,5x + 1	=	0,6y

Gleichsetzen von I_b und II:

$-6 + 4,5x = 4,5x + 1 \mid -4,5x$

$-6 = 1$

Da $-6 \neq 1$ gilt, gibt es keine Lösung.

$L = \{\ \}$

b)

I	$-\frac{4}{3}x$	+ $\frac{1}{3}y$	=	−2
II	$\frac{2}{3}x$	− $\frac{1}{6}y$	=	1
$I_a = 3\,I$	−4x	+ y	=	−6
$II_a = 6\,II$	4x	− y	=	6
I_a	−4x	+ y	=	−6
$II_b = I_a + II_a$		0	=	0

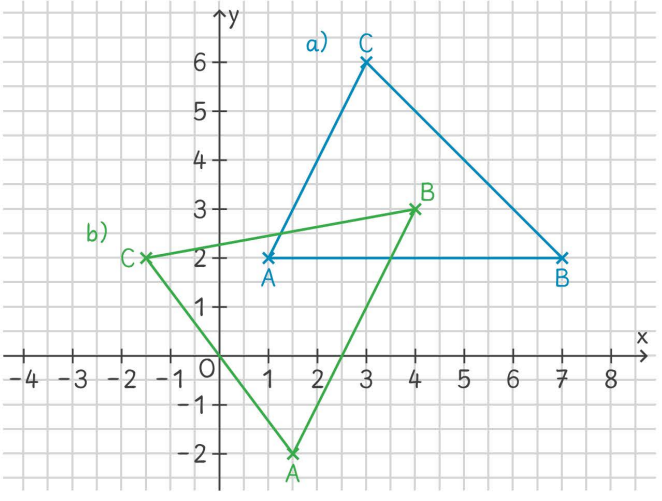
Da $0 = 0$ eine wahre Aussage ist und stets gilt, gibt es unendlich viele Lösungen.

$I_b\ y = 4x - 6$

$L = \{(x\,|\,y) \mid y = 4x - 6\}$

Seite 418

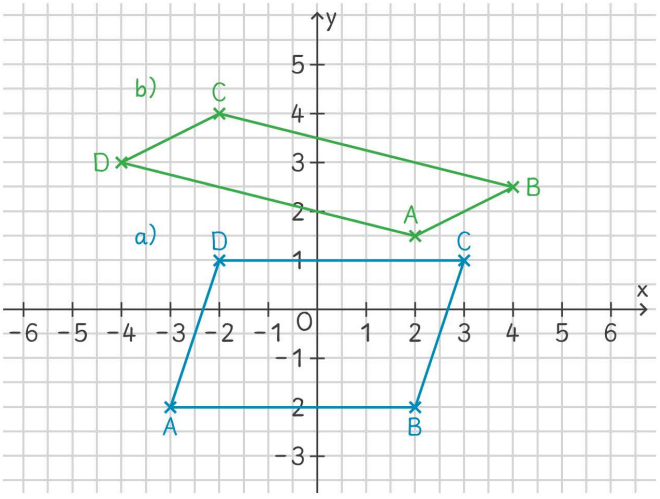
1



a) $g = \overline{AB} = 6\,\text{LE};\ h = 4\,\text{LE};\ A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$, also $A = 12\,\text{FE}$

b) Es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck.
$g = \overline{AC} = 5\,\text{LE};\ h = \overline{OB} = 5\,\text{LE};\ A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12{,}5$, also $A = 12{,}5\,\text{FE}$

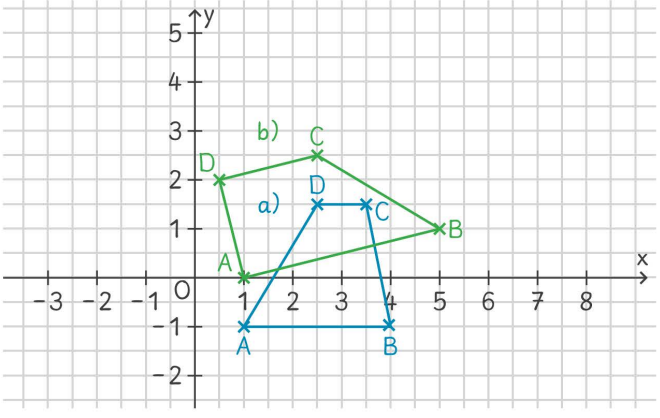
2



a) $g = \overline{AB} = 5\,\text{LE};\ h = 3\,\text{LE};\ A = g \cdot h = 5 \cdot 3$, also $A = 15\,\text{FE}$

b) Durch Abmessen erhält man $g \approx 6{,}2\,\text{LE}$ und $h \approx 1{,}5\,\text{LE}$.
$A = g \cdot h = 6{,}2 \cdot 1{,}5$, also $A \approx 9{,}3\,\text{FE}$

3



a) $A = \frac{3+1}{2} \cdot 2{,}5 = 5$, also $A = 5\,\text{FE}$

b) Durch Abmessen erhält man $c \approx 4{,}1\,\text{LE}$, $a \approx 2{,}1\,\text{LE}$ und $h \approx 2{,}1\,\text{LE}$.
$A = \frac{4{,}1 + 2{,}1}{2} \cdot 2{,}1 = 6{,}51$, also $A = 6{,}51\,\text{FE}$

4

a) $U = \pi \cdot d = 6\pi \approx 18{,}85$, also $U \approx 18{,}85\,\text{cm}$
$A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \approx 28{,}27$, also $A \approx 28{,}27\,\text{cm}^2$

b) $U = 2\pi r \Leftrightarrow r = \frac{U}{2\pi} = \frac{5}{2\pi} \approx 0{,}8$, also $U \approx 0{,}8\,\text{m}$
$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0{,}8^2 \approx 2{,}01$, also $A \approx 2{,}01\,\text{m}^2$

c) $A = \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{7}{\pi}} \approx 1{,}49$, also $A \approx 1{,}49\,\text{dm}^2$
$U = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}49 \approx 9{,}36$, also $U \approx 9{,}36\,\text{dm}$

5

a) $x = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$

b) $x = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

6

a) Diagonale der Grundfläche: $d = \sqrt{8^2 + 8^2} \approx 11{,}31$
$h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 \Rightarrow s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{11{,}31}{2}\right)^2 + 10^2} \approx 11{,}49$
Die Kantenlänge s beträgt ca. 11,5 cm.

b) Diagonale der Grundfläche: $d = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}49$
$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 - \left(\frac{8{,}49}{2}\right)^2} \approx 7{,}94$
Die Höhe h beträgt ca. 8 cm.

7

Zur Überprüfung verwendet man den Satz des Pythagoras. Die längste Seite wird als Hypotenuse angenommen.

a) $12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$ ✓
Das Dreieck ist rechtwinklig.

b) $7^2 + 14^2 = 245 \neq 16^2 = 256$
Das Dreieck ist nicht rechtwinklig.

8

a) $b = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,[\text{cm}];\ \sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \approx 36{,}87°;$
$\beta = 90° - \alpha = 53{,}13°$

b) $\gamma = 90° - \alpha = 30°$
$\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$
$\Rightarrow c = b \cdot \cos(\alpha) = 7 \cdot \cos(60°) = 3{,}5\,[\text{cm}]$
$\sin(\alpha) = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \sin(\alpha) = 7 \cdot \sin(60°) \approx 6{,}06\,[\text{cm}]$

Seite 419

1

$\alpha = 180° - 143° = 37°$ (Nebenwinkel zu 37°)
$\beta = 37°$ (Scheitelwinkel zu α)
$\gamma = 180° - 25° = 155°$ (Nebenwinkel zu 25°)
$\delta = 25°$ (Scheitelwinkel zu 25°)
$\varepsilon = 155°$ (Scheitelwinkel zu γ)

2

$\alpha = 180° - 53° = 127°$ (Nebenwinkel zu 53°)
$\beta = 53°$ (Scheitelwinkel zu 53°)
$\gamma = 53°$ (Stufenwinkel zu 53°)
$\delta = 127°$ (Wechselwinkel zu α)
$\varepsilon = 53°$ (Stufenwinkel zu β)

3

$52° + 127° = 179°$
Die beiden Geraden g und h sind nicht parallel zueinander, da die Summe der beiden Winkelgrößen 180° ergeben müsste (Stufenwinkel).

4

a) $G = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$; $V = G \cdot h = 24 \cdot 4 = 96 \Rightarrow V = 96\,m^3$

b) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 7 = 112\pi \approx 351{,}86 \Rightarrow V \approx 351{,}9\,cm^3$

c) $G = 50 \cdot 60 = 3000 \Rightarrow G = 3000\,cm^2 = 30\,dm^2$

$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 10 = 100 \Rightarrow V = 100\,dm^3$

d) $r = 30\,dm = 3\,m$, also $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 5 = 15\pi \approx 47{,}12$

$\Rightarrow V \approx 47{,}12\,m^3$

e) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 7^3 = \frac{1372}{3}\pi \approx 1436{,}76 \Rightarrow V \approx 1436{,}76\,mm^3$

5

Der Ansatz $306 = \pi \cdot r^2 \cdot 9$ liefert $r = \sqrt{\frac{34}{\pi}} \approx 3{,}29$, also $r \approx 3{,}29\,cm$.

6

a) $G = 3 \cdot 4 = 12$

Um das Volumen berechnen zu können, benötigt man die Höhe h der Pyramide.

Diagonale der Grundfläche: $d = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 - 2{,}5^2} \approx 8{,}65$

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 8{,}65 = 34{,}6$

Das Volumen beträgt $34{,}6\,cm^3$.

Der Oberflächeninhalt O setzt sich aus der Grundfläche G und den vier dreieckigen Seitenflächen (Mantelfläche M) zusammen: $O = G + M$

$M = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a + 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot h_b$

$h_a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 - 1{,}5^2} \approx 8{,}87$

$h_b = \sqrt{s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 - 2^2} \approx 8{,}77$

$M = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a + 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot h_b = 3 \cdot 8{,}87 + 4 \cdot 8{,}77 = 61{,}69$

$O = G + M = 12 + 61{,}69 = 73{,}69$

Der Oberflächeninhalt beträgt $73{,}69\,cm^2$.

b) $G = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12{,}5$

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12{,}5 \cdot 3 = 12{,}5$

Das Volumen beträgt $12{,}5\,cm^3$.

Der Oberflächeninhalt O setzt sich aus der Grundfläche G und den drei dreieckigen Seitenflächen (Mantelfläche M) zusammen: $O = G + M$

$M = A_1 + A_2 + A_3$, wobei A_1 und A_2 gleich groß sind.

$A_1 = A_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 7{,}5$

Um A_3 zu berechnen, benötigt man die Länge der Hypotenuse des Dreiecks mit dem Flächeninhalt A_1.

$c = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5{,}83$

$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5{,}83 \approx 14{,}58$

$M = 2 \cdot A_1 + A_3 = 2 \cdot 7{,}5 + 14{,}58 = 29{,}58$

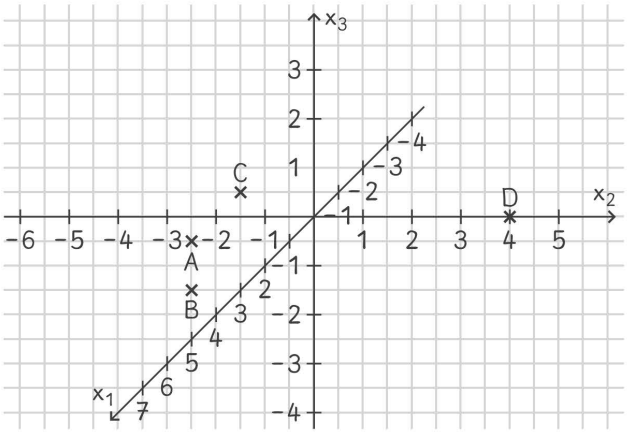
$O = G + M = 12{,}5 + 29{,}58 = 42{,}08$

Der Oberflächeninhalt beträgt $42{,}08\,cm^2$.

Seite 420

1

a)



b) Punkt A liegt in der x_1x_3-Ebene. Punkt B liegt auf keiner der Koordinatenachsen und in keiner der Koordinatenebenen. Punkt C liegt in der x_1x_2-Ebene. D liegt auf der x_2-Achse.

2

a) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-3 \\ 9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -5-0 \\ 18-3 \\ 4-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -6-12 \\ 0-0 \\ -8-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ -17 \end{pmatrix}$

3

a) $|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$

b) $|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2 + 0^2 + (-6)^2} = 10$

c) $|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + 3^2} = 13$

d) $|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{12^2 + (-1)^2 + -12^2} = 17$

4

a) $d = \sqrt{(1-4)^2 + (2-8)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + (-6)^2}$
$= \sqrt{81} = 9$

Die Punkte A und B haben einen Abstand von 9 LE.

b) $d = \sqrt{(1-(-2))^2 + (3-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} = 3$

Die Punkte A und B haben einen Abstand von 3 LE.

c) $d = \sqrt{(-6-(-6))^2 + (2-(-1))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2}$
$= 5$

Die Punkte A und B haben einen Abstand von 5 LE.

5

a) $2\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\7\\1\end{pmatrix}$

b) $5\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\-6\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}-4\\12\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\0\\-30\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-16\\48\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}56\\-48\\-42\end{pmatrix}$

c) $3\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\6\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-16\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-10\\-3\end{pmatrix}$

d) $2\cdot\begin{pmatrix}6\\5\\-4\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\10\\-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\6\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}14\\16\\18\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}29\\20\\1\end{pmatrix}$

6

a) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix}\Rightarrow M(6|8|4)$

b) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\4\\9\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6\\-1\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow M(1|3{,}5|1{,}5)$

c) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow M(2|0|-2)$

d) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}5\\-9\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4{,}5\\-2{,}5\\-4{,}5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow M(4{,}5|-2{,}5|-4{,}5)$

7

a) Es gibt keine reelle Zahl r, sodass $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ gilt.

b) $\begin{pmatrix}8\\-12\\-6\end{pmatrix}=(-2)\cdot\begin{pmatrix}-4\\6\\3\end{pmatrix}$

Seite 421

1

a) individuelle Lösung, zum Beispiel:

$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\4\\-7\end{pmatrix}$

b) individuelle Lösung, zum Beispiel:

$h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\0\\4\end{pmatrix}$

oder $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$

Hierbei wurde zunächst der Richtungsvektor und dann der Stützvektor verändert.

2

a) Man prüft, ob es eine reelle Zahl r gibt, sodass

$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ gilt.

I $\quad 3-4r=1$

II $\quad 2-r=3$

III $\quad 1+r=2$

I $\quad -4r=-2$ ergibt $r=\frac{1}{2}$

II $\quad -r=1$ ergibt $r=-1$

Man muss nicht weiter rechnen. Der Punkt A liegt nicht auf der Geraden g.

b) Man prüft, ob es eine reelle Zahl r gibt, sodass

$\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ gilt.

I $\quad 2r=2$

II $\quad 2-2r=0$

III $\quad -1=-1$

I $\quad 2r=2$ ergibt $r=1$

II $\quad -2r=-2$ ergibt $r=1$

III $\quad -1=-1$ ergibt eine wahre Aussage.

Der Punkt A liegt auf der Geraden g.

3

a) Die Richtungsvektoren von g und h sind Vielfache voneinander, da $(-2)\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\4\\-2\end{pmatrix}$ gilt. Man prüft, ob der Punkt $P(0|2|1)$ von g auch auf der Geraden h liegt. Man prüft also, ob es eine reelle Zahl s gibt, die die Gleichung $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-6\\4\\-2\end{pmatrix}$ erfüllt. Es gibt keine solche Zahl s.

Also sind die Geraden g und h zueinander parallel.

b) Die Richtungsvektoren von g und h sind keine Vielfachen voneinander. Das LGS

I $\quad -3r-3s=3$

II $\quad -3r-2s=1$

III $\quad 3s=-6$

hat die Lösungen $r=1$ und $s=-2$.

Man setzt r in g (oder s in h) ein und erhält den Ortsvektor des Schnittpunkts. Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt $S(2|-1|1)$.

c) Die Richtungsvektoren von g und h sind Vielfache voneinander, da $(-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\-10\end{pmatrix}$ gilt. Man prüft, ob der Punkt $P(7|5|1)$ auf h liegt, und erhält $s=5$. Die Geraden g und h sind identisch.

d) Die Richtungsvektoren von g und h sind keine Vielfachen voneinander. Das LGS

I $3r - 4s = -2$
II $5s = 8$
III $-3s = 3$

hat keine Lösung. Die Geraden g und h sind windschief.

4

Eine Gerade g, die parallel zur Geraden h durch die Punkte A und B verläuft, hat den gleichen Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ (oder ein Vielfaches).

Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit $g: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{20} \\ \frac{12}{20} \\ -\frac{4}{20} \end{pmatrix}$ gibt die Position auf der Rolltreppe in t Sekunden nach Beginn der Fahrt an. Um die Rolltreppe zu beschreiben, muss $t \in [0; 40]$ gelten.

c) $v = \sqrt{\left(\frac{3}{20}\right)^2 + \left(\frac{12}{20}\right)^2 + \left(-\frac{4}{20}\right)^2} = 0{,}65$

Die Geschwindigkeit beträgt $0{,}65 \frac{m}{s}$, das entspricht $2{,}34 \frac{km}{h}$.

Seite 422

1

	keine	eins	zwei	drei	vier oder mehr
Strichliste	𝍸 IIII	𝍸 𝍸 IIII	𝍸	I	I
absolute Häufigkeit	9	14	5	1	1
relative Häufigkeit	$\frac{9}{30}$ = 30 %	$\frac{14}{30}$ ≈ 46,7 %	$\frac{5}{30}$ ≈ 16,7 %	$\frac{1}{30}$ ≈ 3,3 %	$\frac{1}{30}$ ≈ 3,3 %

2

Gesamtanzahl der Jugendlichen im Musikleistungskurs:
$7 + 3 + 2 + 3 + 1 + 5 = 21$

a) $p = \frac{5}{21} \approx 23{,}8\,\%$

b) $p = \frac{3}{21} + \frac{3}{21} = \frac{6}{21} \approx 28{,}6\,\%$

c) $p = 1 - \frac{7}{21} \approx 66{,}7\,\%$

3

a) $\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7}{30} = \frac{39}{10} = 3{,}9$

Das arithmetische Mittel der Stundenanzahl beträgt 3,9 Stunden pro Tag.

b) Man sortiert die Datenliste: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7

↑
Median:
$\frac{4 + 4}{2} = 4$

Der Median beträgt 4 Stunden pro Tag.

c) arithmetisches Mittel: $\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 10}{30} = 4$

Der Median verändert sich nicht und bleibt 4.
Verändert sich in einer sortierten Datenreihe nur das Minimum oder das Maximum, dann verändert sich der Median nicht.
Das arithmetische Mittel verändert sich hingegen. Allerdings fällt diese Änderung unterschiedlich stark aus. Je mehr Daten erhoben wurden, desto geringer ist die Änderung.

$\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz 369

A

Ableitung 414
Ableitungsregeln 414
Abnahme, exponentiell 101
absolute Häufigkeit 422
Abstand im Kontext 270
Abstand Punkt von Ebene 256
Abstand Punkt von Gerade 261
Abstand windschiefer Geraden 265
Abstand zweier Punkte 80, 420
Achsensymmetrie 10, 411
Additionstheorem 174
Additionsverfahren 417
Anfangsbestand 101
Anfangswertproblem 133
Äquivalenzumformung 416
arithmetisches Mittel 422

B

Baumdiagramm 288, 322
bedingte Wahrscheinlichkeit 298
begrenztes Wachstum 117
Bernoulli-Experiment 328
Bernoulli-Kette 328
bestimmtes Integral 57
Betrag eines Vektors 180, 420
Bewegungsgleichung 421
Binomialkoeffizient 328, 333
Binomialverteilung 328
Binomialverteilung, Erwartungswert 335
Binomialverteilung, Probleme lösen 346
Binomialverteilung, Standardabweichung 343
biquadratische Gleichung 14
Bogenmaß 412
Bruchrechnung 409

D

Dezimalzahlen 409
Dichtefunktion 380
Differenzenquotient 414
Differenzialgleichung 132
diskrete Verteilung 380
Dreieck, Flächeninhalt 418
Durchschnitt 422

E

Ebene, Koordinatenform 223
Ebene, Normalenform 223
Ebene, Parameterform 219
Ebenen, Lagebeziehungen 251
Einheitskreis 412
Einsetzungsverfahren 417
empirische Standardabweichung 306
empirische Varianz 306
Entscheidungsregeln 358
Ereignis 289
Ereignisse verknüpfen 293
Ereignisse, stochastisch unabhängige 293
Ergebnis 288, 422
Ergebnismenge 288
Erwartungswert 311, 335
erweitern 409
Euler'sche Zahl 105
Exponentialfunktion 101, 413
Exponentialfunktion, Ableitung 109, 113
Exponentialfunktion, natürliche 104
Exponentialfunktion, Stammfunktion 109, 113
Exponentialgleichung 101, 105, 413
exponentielle Abnahme 101
exponentielle Zunahme 101
exponentielles Wachstum 413
Extrempunkt 415
Extrempunkt, global 411
Extrempunkt, lokal 411
Extremstelle 10
Extremwertproblem 16

F

Fehler erster Art 359
Fehler zweiter Art 359
Fläche zwischen zwei Graphen 74
Fläche, unbegrenzte 78
Flächeninhalt mit Integral 74
Flächeninhalt, Dreieck 418
Flächeninhalt, orientierter 52
Flächeninhalt, Viereck 418
Flächeninhaltsfunktion 58
Funktion mit Parameter 24
Funktion, ganzrationale 20, 411
Funktion, Mittelwert 94
Funktionen, Verkettung 143
Funktionen, zusammengesetzte 155, 156, 160
Funktionsschar 24

G

ganze Zahlen 409
ganzrationale Funktion 411
ganzrationale Funktion bestimmen 20
Gauß-Algorithmus 211
Gauß'sche Glockenfunktion 380
Gegenereignis 293
Geometrie in Gleichungssystemen 282
geometrische Objekte im Raum 231
Gerade, Parameterform 180, 421
Geraden, identisch 181
Geraden, parallel 181
Geraden, Schnittpunkt 181
Geraden, Schnittwinkel 192
Geraden, windschief 181
Gesetz, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 369
Gleichsetzungsverfahren 417
Gleichung, biquadratische 14
Gleichung, quadratische 416
Gleichung, trigonometrische 412
Gleichungen lösen 416
Gleichungssystem, Geometrie 282
Gradmaß 412
Grenzwert bestimmen 411
Grundwert 410
Guthaben 410

H

Häufigkeit, absolute 422
Häufigkeit, relative 422
Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 63
Histogramm 335
Hochpunkt 10

I

Integral 56, 74
Integral, bestimmtes 57
Integral, uneigentliches 78

Integrand 57
Integrationsvariable 57
Intervalladditivität 57

K

Kettenregel 151
Klasse 382
Komplementmenge 293
Konfidenzintervall 373, 394
Koordinatenform einer Ebene 223
Körper 419
Kosinus 412, 418
Kosinusfunktion 412
Kosinusfunktion, Ableitung 139, 175
Kosinusfunktion, Eigenschaften 138
Kosinusfunktion, Stammfunktion 139
Kreuzprodukt 266, 204
Krümmungsverhalten 415
kumulierte Wahrscheinlichkeit 339
kürzen 409

L

Lage zweier Geraden 181, 421
Lagebeziehung Ebenen 251
Lagebeziehung Gerade und Ebene 251
Länge eines Vektors 420
Laplace-Bedingung 365
lineares Gleichungssystem 211, 214, 417
lineares Gleichungssystem, Lösungsmenge 214, 215, 417
lineares Wachstum 413
Linearkombination 420
Logarithmus 101
Logarithmus, natürlicher 105
Logarithmusfunktion, natürliche 120
Lösung einer Gleichung 416
Lotfußpunkt 256
Lotgerade 256

M

Matrixschreibweise 211
Maximum, lokales 10
Median 422
Mengendiagramm 293
Minimum, lokales 10
Mittelwert 306, 422
Mittelwert von Funktionen 94
monoton fallend 414
monoton steigend 414
Monotonie 414

N

natürliche Exponentialfunktion 104
natürliche Logarithmusfunktion, Ableitung 121
natürliche Logarithmusfunktion, Stammfunktion 121
natürliche Zahlen 409
natürlicher Logarithmus 105
Nebenbedingung 16
Nebenwinkel 419
Normale 415
Normalenform einer Ebene 223
Normalenvektor 223
Normal-Quantil 395
Normalverteilung 381, 395
Nullstelle 10, 411

O

Oberflächeninhalt 419
Obersumme 56, 61
orientierter Flächeninhalt 52
orthogonale Vektoren 186
Ortskurve 46

P

Parameter 24
Parameter einschränken 232
Parameterform einer Ebene 219
Parameterform einer Geraden 421
Pfadregel 289
Potenzen 413
Potenzfunktion 34
Potenzfunktion mit rationalem Exponenten 34
Potenzgesetze 413
pq-Formel 416
Prisma 419
Probleme lösen mit der Binomialverteilung 346
Produktregel 147
Prognoseintervall für absolute Häufigkeiten 364
Prognoseintervall für relative Häufigkeiten 369
Projektion 244
Prozentrechnung 410
Prozentsatz 410
Prozentwert 410
Prozessdiagramm 322
Punktprobe 181, 220
Punktsymmetrie 10, 411
Pyramide 419
Pythagoras 418

Q

quadratische Gleichung 416

R

rationale Zahlen 409
reelle Zahlen 409
Rekonstruktion einer Größe 52
relative Häufigkeit 422
Richtungsvektor 181
Rotationskörper 81
rotierender Penny 394
Rücksubstitution 14

S

Sattelpunkt 10
Satz des Pythagoras 418
Satz von de Moivre-Laplace 381
Schatten 233
Scheitelwinkel 419
Schnittmenge 293
Schnittpunkt Gerade und Ebene 228
Schnittpunkt zweier Graphen 411
Schnittpunkt mit x-Achse 10
Schnittpunkt mit y-Achse 10
Schnittwinkel zweier Geraden 192
Schnittwinkel zwischen Ebene und Gerade 227
Schnittwinkel zwischen Ebenen 227
Schrägbild 244
Schranke 117
Sicherheitswahrscheinlichkeit 365
Sigma-Intervalle 343
Sigma-Regeln 364
signifikante Abweichung 369
Simulation 302

Sinus 412, 418
Sinusfunktion 412
Sinusfunktion, Ableitung 139, 174
Sinusfunktion, Eigenschaften 138
Sinusfunktion, Stammfunktion 139
Skalarprodukt 186
Spannvektor 219
Spat 205
Spiegelung 231
Spiegelung Punkt an Ebene 256
Stammfunktion 62
Stammfunktion, Graph 63
Stammfunktion bestimmen 68
Standardabweichung 311, 343
Standardabweichung, empirische 306
statistisch signifikant 365
Stauchung 412
Steigung 414
stetige Verteilung 380
Stetigkeitskorrektur 381
Stichprobenumfang schätzen 377
stochastisch unabhängig 293
stochastische Prozesse 322
Streckung in x-Richtung 412
Streckung in y-Richtung 412
streng monoton fallend 414
streng monoton steigend 414
stückweise linear 55
Stufenwinkel 419
Stützvektor 181, 219
Substitution 14
Summenregel 289
Symmetrie von Graphen 411

T

Tangens 418
Tangente 415
Tangentensteigung 414
Tiefpunkt 10
Transformationen 412
transformierte Exponentialfunktion 108
transformierte Exponentialfunktion, Ableitung 109
transformierte Exponentialfunktion, Stammfunktion 109
Trigonometrie 418
trigonometrische Gleichungen 412

U

umkehrbar 30
Umkehrfunktion 29, 121
Umkehrfunktion rechnerisch bestimmen 121
unabhängige Ereignisse 293
Untersumme 56, 61

V

Varianz, empirische 306, 311
Vektor, Betrag 180
Vektor, Normalenvektor 223
Vektoren 420
Vektoren, orthogonal zueinander 186
Vektoren, Winkel 191
Vektorprodukt 204
Vereinigungsmenge 293
Verkettung von Funktionen 143
Verknüpfen von Ereignissen 293
Verschiebung 412
Verteilung, diskret 380
Verteilung, stetig 380
Verteilungsfunktion 381
Viereck, Flächeninhalt 418
Vorzeichenwechsel 10

W

Wachstum 413
Wachstum, begrenztes 117
Wachstum, exponentielles 413
Wachstum, lineares 413
Wachstumsfaktor 101
Wahrscheinlichkeit 288, 422
Wahrscheinlichkeit, bedingte 298
Wahrscheinlichkeit, kumulierte 339
Wahrscheinlichkeitsdichte 380
Wahrscheinlichkeitsverteilung 288, 310
Wechselwinkel 419
Wendepunkt 10, 415
windschiefe Geraden, Abstand 265
Winkel zwischen Vektoren 191
Winkelsätze 419
Wurzelfunktion 29
Wurzelfunktion, Ableitungsfunktion 37, 34

Z

Zahlenbereiche 409
Zielfunktion 16
Zinsen 410
Zinseszinsen 410
Zinsrechnung 410
Zinssatz 410
Zufallsexperiment 288
Zufallsgröße 310
Zunahme, exponentiell 101
zusammengesetzte Funktionen 155
zusammengesetzte Funktionen im Kontext 160
Zustandsverteilung 322

Quellennachweis

Texte:
Kenneth Ewart Boulding (1910-1993) zit. nach https://quoteinvestigator.com/tag/kenneth-boulding/(Zugriff: 19.08.24), **96**; Text von Diana Schwarzenbach in: Express vom 03.09.2001, Verlag M. DuMont Schauberg GmbH & Co. KG, **385**

Abbildungen:
action press international gmbh, Hamburg (REX FEATURES LTD.), **127.1**; Alamy stock photo, Abingdon (FLPA), **160.2**; Alamy stock photo, Abingdon (MARK HICKEN), **6.2**; Avenue Images GmbH, Hamburg (Corbis RF), **3.1; 284.1**; Blühdorn GmbH, Fellbach, **29.1; 293.1**; CASIO Europe GmbH, Norderstedt, **9.2; 9.3; 11.1; 11.3; 11.4; 21.1; 21.2; 21.3; 21.4**; Corel Corporation Deutschland, Unterschleissheim, **161.1**; dreamstime.com, Brentwood, TN (Richard Drew), **281.2**; Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart (Adrienn Vasicsek), **41.3; 370.3; 372.2; 372.2**; F1online digitale Bildagentur, Frankfurt (Image Source), **4.1; 360.1**; Getty Images Plus, München (Connect Images/Leon Harris), **165.1**; Getty Images Plus, München (EstuaryPig/iStock), **402.3**; Getty Images Plus, München (E+/SDI Productions), **377.1**; Getty Images Plus, München (iStock Editorial/MilanMaksovic), **73.1**; Getty Images Plus, München (iStock/Aleksandr Shulichenko), **24.1**; Getty Images Plus, München (iStock/AntiMartina), **241.1**; Getty Images Plus, München (iStock/beekeepx), **167.3**; Getty Images Plus, München (iStock/Charise Wilson Photography), **163.5**; Getty Images Plus, München (iStock/fizkes), **302.1**; Getty Images Plus, München (iStock/ilfede), **243.2**; Getty Images Plus, München (iStock/LiuNian), **48.2**; Getty Images Plus, München (iStock/manbo-photo), **100.1**; Getty Images Plus, München (iStock/microgen), **317.1**; Getty Images Plus, München (iStock/molchanovdmitry), **2.1; 6.1**; Getty Images Plus, München (iStock/pamela_d_mcadams), **297.1**; Getty Images Plus, München (Moment/paul mansfield photography), **130.2**; Getty Images Plus, München (Stocktrek Images), **3.1; 246.1**; Getty Images Plus, München (The Image Bank/Andrew Bret Wallis), **35.1**; Getty Images RF, München (Brand X Pictures/PhotoAlto), **U1.1**; Getty Images, München (Bettmann), **242.1**; Getty Images, München (The Image Bank/Matthias Kulka), **246.2**; IMAGO, Berlin (ActionPictures), **235.2**; IMAGO, Berlin (K-P Wolf), **163.3**; imprint, Zusmarshausen, **52.1; 52.3; 54.6; 55.5; 57.2; 73.2; 73.3; 73.4; 73.5; 77.3; 78.1; 78.2; 78.3; 80.1; 81.2; 81.3; 81.4; 83.1; 83.2; 83.3; 84.5; 104.1; 245.1; 245.2; 264.2; 288.3; 292.4; 299.1; 354.1; 358.2; 359.1; 359.2; 370.2; 371.2; 376.1; 381.1; 386.1; 418.1; 418.2; 418.5; 418.8; 418.9; 418.10; 419.5; 419.7; 419.8; 419.10; 440.1; 440.2; 440.3; 475.1; 533.1**; Interfoto, München (TV-Yesterday), **219.2**; iStockphoto, Calgary, Alberta (Ed Hidden), **180.1**; iStockphoto, Calgary, Alberta (Matej Michelizza), **167.1**; iStockphoto, Calgary, Alberta (pius99), **246.3**; iStockphoto, Calgary, Alberta (primeimages), **U1.2**; iStockphoto, Calgary, Alberta (Vesnaandjic), **352.2**; Jörgens, Thomas, Hemer, **8.1; 8.2**; Liese, Annette, Dortmund, **179.1; 185.1; 185.2; 186.2; 192.1; 195.1; 198.3; 201.1; 201.2; 202.2; 204.1; 223.1; 227.2; 227.3; 227.4; 227.5; 230.2; 238.1; 238.4; 250.1; 250.2; 250.3; 250.4; 251.1; 251.2; 251.3; 268.2; 272.2; 275.1; 276.1; 276.2; 276.3**; Malz, Anja, Taunusstein, **120.4; 319.1; 355.1; 383.2**; Mauritius Images, Mittenwald (DCOW/EUB/Alamy), **219.1**; Mauritius Images, Mittenwald (Michael Nguyen/Alamy), **140.3**; Mauritius Images, Mittenwald (Perry Mastrovito/Alamy), **16.1**; MEV Verlag GmbH, Augsburg (Wendler Martin), **110.3**; Oehler, Sandra, Remseck, **9.1; 10.1; 10.2; 23.1; 23.2; 45.1; 67.1; 84.1; 95.1; 100.3; 121.1; 137.1; 169.1; 190.1; 198.1; 199.1; 208.3; 243.1; 267.2; 329.1; 393.2; 393.3; 477.2; 498.1; 516.3**; PER MEDIEN & MARKETING GmbH, Braunschweig, **417.1**; Picture-Alliance, Frankfurt/M. (blickwinkel/G. Czepluch), **95.2**; Picture-Alliance, Frankfurt/M. (dpa/Jerzy Dabrowski), **143.2**; Picture-Alliance, Frankfurt/M. (dpa), **55.2**; Picture-Alliance, Frankfurt/M. (ZB/Hendrik Schmidt), **321.1**; Picture-Alliance, Frankfurt/M. (ZB/Jens Kalaene), **242.2**; Riemer, Dr. Wolfgang, Pulheim, **286.1; 286.2; 286.3; 287.1; 362.1; 369.1; 393.1**; ShutterStock.com RF, New York (Artem Avetisyan), **143.1**; ShutterStock.com RF, New York (By YueStock), **2.1; 48.1**; ShutterStock.com RF, New York (D. Pfleiderer), **166.3**; ShutterStock.com RF, New York (ElenaNoeva), **169.2**; ShutterStock.com RF, New York (elizaveta66), **173.1**; ShutterStock.com RF, New York (Fedorov Oleksiy), **308.1**; ShutterStock.com RF, New York (gg-foto), **60.4**; ShutterStock.com RF, New York (iurii), **52.2**; ShutterStock.com RF, New York (Juice Flair), **172.3**; ShutterStock.com RF, New York (Kite_rin), **364.1**; ShutterStock.com RF, New York (Monkey Business Images), **332.1**; ShutterStock.com RF, New York (Piotr Piatrouski), **290.4**; ShutterStock.com RF, New York (RF / Yuri Arcurs), **324.2**; Sonntag, Raphaela, Wachtberg, **261.1; 265.1**; stock.adobe.com, Dublin (Africa Studio), **83.4**; stock.adobe.com, Dublin (Alene Pierro), **219.3**; stock.adobe.com, Dublin (Andrey_Lobachev), **394.1**; stock.adobe.com, Dublin (Anna Averianova), **31.5**; stock.adobe.com, Dublin (beatuerk), **263.2**; stock.adobe.com, Dublin (BK_graphic), **99.1**; stock.adobe.com, Dublin (blachowicz102), **126.2**; stock.adobe.com, Dublin (bozhdb), **81.1**; stock.adobe.com, Dublin (comartist.de), **56.1**; stock.adobe.com, Dublin (cuhle-fotos), **163.6**; stock.adobe.com, Dublin (Gunar Dieskau), **195.2**; stock.adobe.com, Dublin (jon_chica), **163.1**; stock.adobe.com, Dublin (kilukilu), **333.2**; stock.adobe.com, Dublin (Maksym Protsenko), **94.2**; stock.adobe.com, Dublin (Maren Winter), **2.1; 96.1**; stock.adobe.com, Dublin (Marija), **117.1**; stock.adobe.com, Dublin (master1305), **161.4**; stock.adobe.com, Dublin (Mathias Weil), **146.1**; stock.adobe.com, Dublin (Matthew), **3.1; 134.1**; stock.adobe.com, Dublin (Mikkel Bigandt), **95.3**; stock.adobe.com, Dublin (mitifoto), **138.1**; stock.adobe.com, Dublin (mpgphoto), **164.2**; stock.adobe.com, Dublin (nickolae), **210.1**; stock.adobe.com, Dublin (orpheus26), **142.1**; stock.adobe.com, Dublin (peshkov), **112.2**; stock.adobe.com, Dublin (Robert Kneschke), **162.1**; stock.adobe.com, Dublin (Sergii Figurnyi), **3.1; 206.1**; stock.adobe.com, Dublin (Sergio Martínez), **284.2**; stock.adobe.com, Dublin (shintartanya), **119.1**; stock.adobe.com, Dublin (Stockfotos-MG), **348.2**; stock.adobe.com, Dublin (victoria p.), **198.2**; stock.adobe.com, Dublin (Zdenek), **256.1**; Thinkstock, München (AbleStock.com/Hemera Technologies), **380.1**; Thinkstock, München (iStock/ArtesiaWells), **351.2**; Thinkstock, München (iStock/Michael Grzegorzewski), **134.3**; Thinkstock, München (iStock/nikoendres), **71.1**; Thinkstock, München (iStock/UrsulaReinke), **111.1**; Thinkstock, München (Photos.com), **104.2**;

Thinkstock, München (Stockbyte/Jupiterimages), **348.1**; Thinkstock, München (Wavebreakmedia Ltd), **3.2; 176.2**; tiff.any GmbH & Co. KG, Berlin, **10.3; 12.1; 13.1; 13.2; 13.3; 14.1; 16.2; 16.3; 18.1; 19.2; 19.3; 19.6; 20.1; 21.2; 21.3; 21.4; 22.1; 22.2; 22.3; 23.3; 24.2; 24.3; 25.1; 26.2; 28.2; 28.3; 29.2; 29.3; 29.4; 29.5; 29.6; 30.1; 30.2; 30.3; 30.4; 30.5; 31.1; 31.2; 31.3; 31.4; 31.6; 31.7; 31.8; 31.9; 31.10; 31.11; 32.1; 32.2; 32.3; 32.4; 32.5; 32.6; 32.7; 32.8; 33.1; 33.2; 34.1; 34.2; 34.3; 34.4; 34.5; 34.6; 35.2; 36.2; 37.1; 37.2; 37.3; 38.1; 38.2; 39.1; 40.1; 40.2; 41.1; 42.1; 42.2; 43.1; 43.2; 43.3; 43.4; 44.1; 44.2; 44.3; 45.2; 45.3; 47.1; 49.1; 49.2; 49.3; 50.1; 50.2; 50.3; 50.4; 50.5; 50.6; 51.1; 53.1; 53.2; 53.7; 54.1; 54.2; 54.3; 54.4; 54.5; 55.1; 55.3; 55.4; 56.2; 56.3; 57.1; 57.3; 58.1; 58.2; 58.3; 58.4; 58.5; 58.6; 58.7; 58.8; 59.1; 59.2; 59.3; 59.4; 59.5; 59.6; 59.7; 59.8; 60.1; 60.2; 60.3; 60.5; 61.2; 62.2; 63.1; 63.2; 63.3; 63.4; 63.5; 64.2; 64.3; 64.4; 64.5; 64.6; 64.7; 64.8; 64.9; 65.1; 65.2; 65.3; 65.4; 65.5; 65.6; 65.7; 66.1; 66.2; 66.3; 66.4; 66.5; 66.6; 66.7; 66.8; 66.9; 67.2; 69.2; 70.1; 70.2; 70.3; 70.4; 70.5; 70.6; 72.1; 72.2; 72.3; 73.6; 73.7; 74.1; 74.3; 75.1; 75.2; 75.3; 75.4; 75.5; 75.6; 75.7; 75.8; 76.1; 76.2; 76.4; 76.5; 77.1; 77.2; 79.1; 79.4; 79.5; 79.6; 79.7; 79.8; 80.2; 82.1; 82.4; 82.5; 82.6; 83.5; 84.2; 84.3; 84.4; 85.2; 85.3; 85.4; 85.5; 86.1; 86.2; 86.3; 86.4; 87.1; 87.3; 87.4; 88.2; 89.1; 89.2; 90.2; 91.1; 91.2; 91.3; 92.1; 92.2; 93.1; 94.1; 94.3; 94.4; 95.5; 95.6; 97.1; 97.2; 97.3; 97.4; 98.1; 98.2; 98.3; 98.4; 98.5; 98.6; 98.7; 98.8; 100.2; 102.1; 103.1; 103.2; 103.3; 103.4; 104.3; 105.1; 106.1; 106.2; 106.3; 106.4; 106.5; 108.2; 108.3; 109.2; 109.3; 109.4; 109.5; 109.6; 110.1; 110.2; 112.1; 114.1; 114.2; 114.3; 116.1; 116.2; 116.3; 116.4; 116.5; 118.4; 120.1; 120.2; 120.3; 120.5; 122.1; 122.2; 122.3; 122.4; 122.5; 123.1; 123.2; 123.3; 124.1; 124.2; 124.3; 126.1; 127.2; 128.1; 128.2; 128.3; 129.1; 129.2; 129.3; 129.4; 130.1; 134.2; 135.1; 136.1; 136.2; 136.3; 136.4; 136.5; 138.2; 138.3; 138.4; 138.5; 139.1; 139.2; 139.3; 139.4; 140.1; 140.2; 141.1; 141.2; 141.3; 141.4; 142.2; 145.3; 146.2; 146.3; 153.1; 153.2; 153.3; 154.1; 155.1; 155.2; 156.1; 156.2; 156.3; 156.4; 156.5; 156.6; 156.7; 157.1; 157.2; 157.3; 157.4; 158.1; 158.2; 158.3; 159.1; 159.2; 160.1; 160.3; 163.2; 165.2; 166.1; 166.2; 167.2; 168.1; 168.2; 169.3; 170.1; 170.2; 170.3; 170.4; 170.5; 170.6; 171.1; 171.2; 171.3; 171.4; 171.5; 171.6; 171.7; 171.8; 172.1; 172.2; 173.2; 174.1; 174.2; 174.3; 174.4; 174.5; 175.1; 175.2; 177.1; 177.2; 177.3; 180.2; 181.2; 181.3; 181.4; 181.5; 184.2; 186.1; 187.1; 187.2; 190.2; 191.1; 191.2; 191.3; 192.2; 192.3; 192.4; 194.1; 195.3; 197.1; 198.4; 199.2; 199.3; 200.1; 205.2; 205.3; 213.1; 219.4; 221.1; 222.1; 227.6; 229.1; 229.2; 230.4; 231.1; 231.2; 231.3; 232.1; 233.1; 235.1; 235.4; 237.3; 238.2; 238.3; 239.1; 239.2; 240.1; 244.1; 249.2; 250.5; 251.4; 254.3; 255.3; 256.2; 256.3; 257.1; 257.2; 260.1; 260.3; 261.3; 261.4; 262.1; 264.1; 265.3; 268.3; 271.1; 271.2; 271.3; 272.3; 273.2; 273.3; 274.1; 275.2; 275.3; 277.2; 278.1; 278.2; 278.3; 278.4; 278.5; 278.6; 279.1; 280.1; 280.2; 281.1; 306.1; 323.2; 326.1; 328.2; 328.3; 335.1; 335.3; 338.1; 338.2; 339.2; 339.3; 339.4; 339.5; 339.6; 341.1; 341.2; 343.2; 351.1; 352.1; 354.2; 368.1; 373.1; 390.2; 396.1; 396.2; 396.3; 397.1; 397.2; 397.3; 397.4; 398.1; 398.2; 400.2; 402.1; 403.1; 403.2; 406.1; 406.2; 411.1; 411.2; 412.1; 412.2; 412.3; 412.4; 412.5; 413.1; 413.2; 413.3; 414.1; 414.2; 414.3; 415.1; 418.3; 418.4; 418.6; 418.7; 419.1; 419.2; 419.3; 419.4; 419.6; 419.11; 419.12; 422.1; 427.1; 428.1; 428.2; 428.3; 429.1; 433.1; 433.2; 434.1; 434.2; 434.3; 434.4; 441.1; 441.2; 443.1; 443.2; 443.3; 444.1; 444.2; 447.1; 448.1; 451.1; 451.2; 451.3; 451.4; 452.1; 452.2; 452.3; 454.1; 454.2; 454.3; 455.1; 456.1; 460.1; 460.2; 462.1; 463.1; 464.1; 464.2; 464.3; 465.1; 465.2; 466.1; 468.1; 469.1; 470.1; 471.1; 471.2; 472.1; 474.1; 475.2; 476.1; 476.2; 476.3; 477.3; 488.1; 488.2; 489.1; 490.1; 499.1; 503.1; 504.1; 504.2; 504.3; 512.1; 512.2; 513.1; 513.2; 513.3; 513.4; 513.5; 516.1; 516.2; 516.4; 516.5; 517.1; 517.2; 517.3; 517.4; 518.1; 520.1; 522.1; 524.1; 524.2; 524.3; 525.1; 526.1; 528.1; 529.1; 531.1; 531.2; 531.3; 531.4; 532.1; 533.2; 538.1; 539.1; 539.2; 542.1; 543.1; 544.1; 545.1; 545.2; 546.1**; topset GmbH Rudi Warttmann, Nürtingen, **477.1**; Uwe Alfer, Kråksmåla, Alsterbro, **11.1; 17.1; 17.2; 18.2; 19.1; 19.4; 19.5; 20.2; 21.1; 26.1; 27.1; 28.1; 36.1; 38.3; 40.3; 40.4; 41.2; 44.4; 46.1; 46.2; 46.3; 51.2; 51.3; 53.3; 53.4; 53.5; 53.6; 56.4; 57.4; 61.1; 62.1; 64.1; 68.1; 69.1; 69.3; 74.2; 76.3; 79.2; 79.3; 82.2; 82.3; 83.6; 85.1; 87.2; 88.1; 88.3; 90.1; 93.2; 95.4; 96.2; 98.9; 101.1; 107.1; 108.1; 109.1; 113.1; 113.2; 117.2; 117.3; 118.1; 118.2; 118.3; 131.1; 132.1; 132.2; 142.3; 143.3; 143.4; 144.1; 145.1; 145.2; 147.1; 148.1; 148.2; 159.3; 161.2; 161.3; 164.1; 176.1; 178.1; 179.2; 179.3; 181.1; 182.1; 184.1; 187.3; 189.1; 202.1; 203.1; 203.2; 205.1; 208.1; 208.2; 208.4; 208.5; 209.1; 211.1; 211.2; 211.3; 211.4; 212.1; 212.2; 212.3; 214.1; 214.2; 214.3; 214.4; 214.5; 214.6; 216.1; 217.1; 218.1; 218.2; 218.3; 219.5; 220.1; 221.2; 224.1; 226.1; 226.2; 226.3; 227.1; 230.1; 230.3; 235.3; 237.1; 237.2; 245.3; 248.1; 249.1; 252.1; 254.1; 254.2; 255.1; 255.2; 259.1; 259.2; 259.3; 259.4; 260.2; 261.2; 263.1; 265.2; 268.1; 269.1; 269.2; 270.1; 272.1; 273.1; 276.4; 276.5; 277.1; 277.3; 282.1; 282.2; 282.3; 285.1; 288.1; 288.2; 288.4; 288.5; 289.1; 290.1; 290.2; 290.3; 291.1; 291.2; 292.1; 292.2; 292.3; 293.2; 293.3; 293.4; 293.5; 293.6; 294.1; 294.2; 294.3; 295.1; 295.2; 296.1; 296.2; 296.3; 296.4; 296.5; 297.2; 297.3; 297.4; 301.1; 301.2; 301.3; 301.4; 303.1; 304.1; 305.1; 305.2; 307.1; 307.2; 307.3; 308.2; 310.1; 310.2; 311.1; 311.2; 312.1; 313.1; 314.1; 314.2; 314.3; 315.1; 316.1; 316.2; 318.1; 318.2; 319.2; 320.1; 322.1; 323.1; 327.1; 328.1; 330.1; 330.2; 330.3; 331.1; 332.2; 333.1; 335.2; 336.1; 336.2; 337.1; 337.2; 338.3; 338.4; 339.1; 340.1; 340.2; 342.1; 343.1; 344.1; 344.2; 345.1; 346.1; 349.1; 350.1; 353.1; 355.2; 357.1; 358.1; 363.1; 363.2; 364.2; 366.1; 366.2; 366.3; 367.1; 368.2; 370.1; 370.4; 371.1; 372.1; 372.3; 375.1; 379.1; 380.2; 382.1; 383.1; 383.3; 385.1; 387.1; 387.2; 389.1; 389.2; 390.1; 390.3; 391.1; 392.1; 392.2; 394.2; 395.1; 395.2; 395.3; 395.4; 395.5; 399.1; 400.1; 401.1; 402.2; 405.1; 419.9; 439.1; 439.2; 520.2; 521.1**; 123rf Germany, c/o Inmagine GmbH, Nidderau (Vyacheslav Lipatov), **3.1; 324.1**

Die Reihenfolge und Nummerierung der Bild- und Textquellen im Quellennachweis erfolgt automatisch und entspricht u. U. nicht der Nummerierung der Bild- und Textquellen im Werk. Die automatische Vergabe der Positionsnummern erfolgt in der Regel von links oben nach rechts unten, ausgehend von der linken oberen Ecke der Abbildung.

Mathematische Begriffe und Bezeichnungen

Funktionaler Zusammenhang und Zahlen

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3 \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\ldots -1; 0; 1 \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Menge der irrationale Zahlen
$\in; \notin$	ist Element von; ist nicht Element von
$a = b$	a gleich b
$a \neq b$	a ungleich b
$a \approx b$	a ungefähr gleich b
$a < b$	a kleiner b
$a > b$	a größer b
$a \leq b$	a kleiner b oder a gleich b
$a \geq b$	a größer b oder a gleich b
$a < b < c$	b liegt zwischen a und c
$\lvert a \rvert$	Betrag der Zahl a

$[a; b]$	abgeschlossenes Intervall; alle Zahlen x mit $a \leq x \leq b$
$]a; b[$	offenes Intervall; alle Zahlen x mit $a < x < b$
$x \to y;\ x \to 2x$	x wird abgebildet auf y; x wird abgebildet auf 2x (Funktionsvorschrift).
$y = 0{,}5x^2 - 2$	Funktionsgleichung mit dem Funktionsterm $0{,}5x^2 - 2$
f	Funktion
$f(x)$	abkürzende Schreibweise für einen Funktionsterm
D_f	Definitionsmenge der Funktion f
W_f	Wertemenge der Funktion f
f'	Ableitungsfunktion der Funktion f
$f'(x_0)$	Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0
F	Stammfunktion der Funktion f
$\int_a^b f(x)\,dx$	Integral der Funktion f von a bis b

Geometrie

$O(0 \mid 0)$	Koordinatenursprung in der Ebene
$O(0 \mid 0 \mid 0)$	Koordinatenursprung im Raum
$P(p_1 \mid p_2)$	Punkt in der Ebene mit den Koordinaten p_1 und p_2
$P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$	Punkt im Raum mit den Koordinaten p_1, p_2 und p_3
PQ	Gerade durch die Punkte P und Q
$\overline{PQ}$	Strecke mit den Endpunkten P und Q
$\lvert\overline{PQ}\rvert$	Länge der Strecke mit den Endpunkten P und Q

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$	Vektor a
$-\vec{a}$	Gegenvektor von $\vec{a}$
$\overrightarrow{AB}$	Vektor von Punkt A zu Punkt B
$\overrightarrow{OP}$	Ortsvektor zum Punkt P
$\lvert\vec{v}\rvert$	Betrag eines Vektors
$\vec{a} \circ \vec{b}$	Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Stochastik

$\overline{A}$	Gegenereignis von A
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A
$P_B(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist
X	Zufallsgröße (Zufallsvariable)
$P(X = k)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße X den Wert k annimmt
$P(X \leq k)$	kumulierte Wahrscheinlichkeit bzw. Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße höchstens den Wert k annimmt.

$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient „n über k“
$P(X = k) = B_{n;\,p}(k)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine nach $B_{n;\,p}$ verteilte Zufallsgröße X den Wert k annimmt
$\bar{x}$	Mittelwert
s	empirische Standardabweichung
$E(X) = \mu$	Erwartungswert der Zufallsgröße X
$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$	Varianz der Zufallsgröße X
$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$	Standardabweichung der Zufallsgröße X

Lambacher Schweizer
Ein klares Konzept für differenziertes Lernen

Nach individuellen Bedürfnissen fördern und fordern
mit vielen Aufgaben und dem dreistufigen, klaren Differenzierungskonzept von Lambacher Schweizer

Grundwissen wiederholen und sichern
mit dem Check-in zu den Grundlagen vor jedem Kapitel, den regelmäßigen Grundwissen-Aufgaben zu wichtigen Inhalten vergangener Schuljahre sowie dem dazu passenden Nachschlageteil im Buch.

Digitale Hilfsmittel kompetent einsetzen
mit anschaulichen Beispielen, Anleitungen und klar gekennzeichneten Aufgaben, die den Einsatz eines modularen Mathematiksystems fordern.

Sicher zur Klausur und zum Abitur
mit dem Check-out zum Lernfortschritt, den Trainingsaufgaben mit Lösungen, zwei Test-Klausuren mit Lösungen am Ende jedes Kapitels und extra Seiten zur Vorbereitung auf das Abitur.

ISBN 978-3-12-**735481**-2
9 783127 354812